Fachbereiche Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes

Mathematik besser einsehen durch Bildverarbeitung

Bernhard Burgeth

mit Unterstützung von
Florian Kern

Tagung der GDM
05. 03. 2013
Universität Münster

Was ist ein Bild?

Lena, auf einem der berühmtesten Testbilder in der Bildverarbeitung

Was ist ein Bild?

Beispiele aus einer Bibliothek für Testbilder

Wie beschreibt man Bilder mathematisch?

Lena, als Grauwertbild

Wie verarbeitet man Bilder?

Lena original

Lena transformiert

Inhalt

- Motivation
- Mathematische Beschreibung von Bildern
- Punkttransformationen
- Rauschen
- Fazit

Wie verarbeitet man Bilder?

Lena ???

Wie geht das?

Inhalt

- Motivation
- Mathematische Beschreibung von Gauwertbildern
  - Bild als Funktion oder Matrix
  - Grauwertverteilung, Histogramme
- Punkttransformationen
- Rauschen
- Fazit

Bild als Funktion

Kontinuierliches Grauwertbild

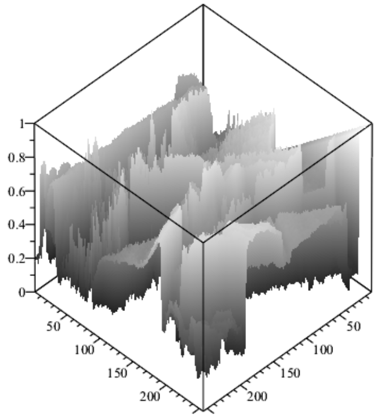
- Abbildung f von Definitionsbereich $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ in Zielbereich $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Ω heißt **Bildbereich** oder **Bildebene**
- die Grauwerte bilden den Wertebereich
- niedrige Grauwerte werden dunkel, hohe Grauwerte hell dargestellt

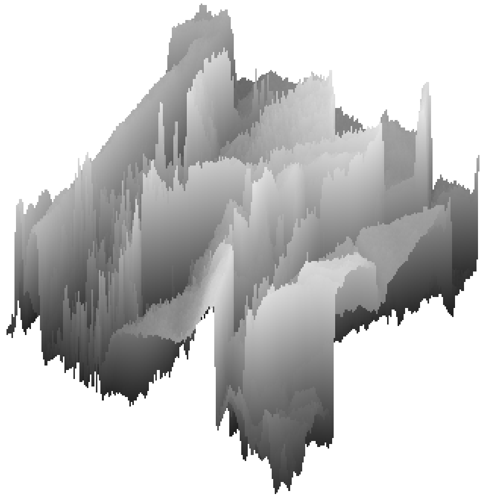
Wie verarbeitet man Bilder?

Lena original

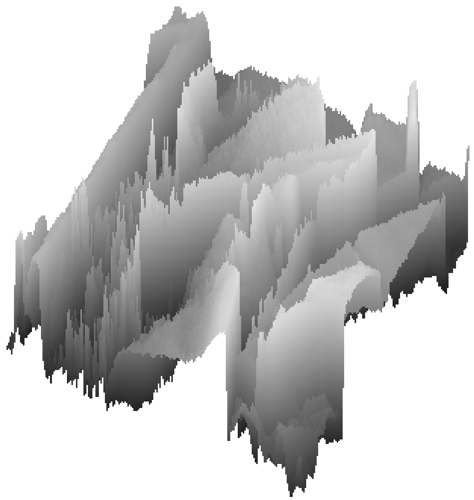


Lena als Funktionsgraph

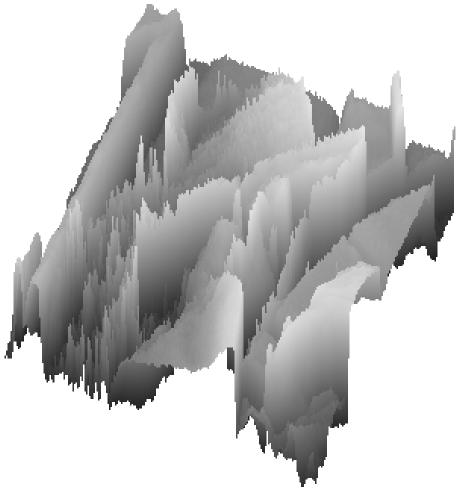
Lena als Funktionsgraph



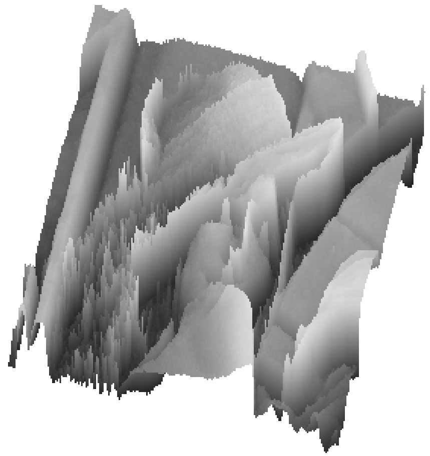
Lena als Funktionsgraph



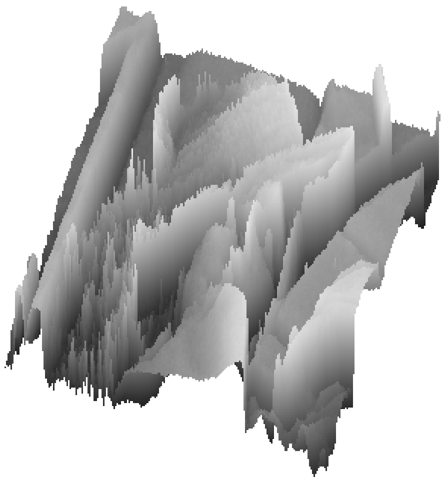
Lena als Funktionsgraph



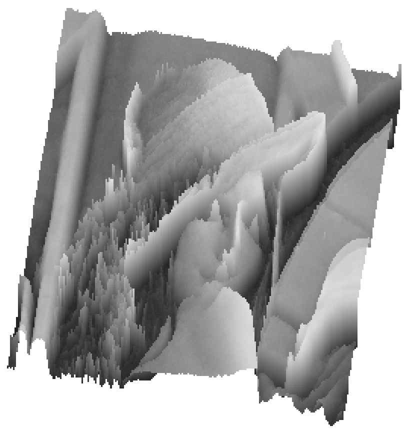
Lena als Funktionsgraph



Lena als Funktionsgraph



Lena als Funktionsgraph



Lena als Funktionsgraph

Lena als Funktionsgraph

Lena als Funktionsgraph

Diskretisierung

Abtasten/Sampling

- meint die Diskretisierung des Bildbereiches Ω
- Bilddaten sind nur auf den Punkten (i, j) eines Rechtecksgitters in Ω gegeben
- erzeugt ein **digitales Bild**

$$\{f_{i,j} = f(i,j) \,|\, i = 1, \ldots, N, j = 1, \ldots, M\}$$

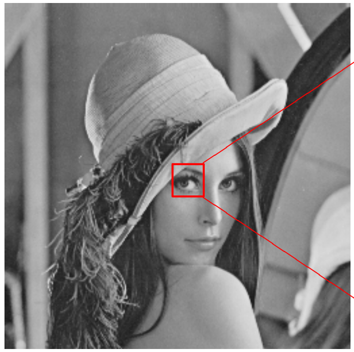
- kann als Matrix angesehen werden

$$(f_{i,j})_{i,j} = \begin{bmatrix} 0.38 & 0.48 & 0.51 & 0.73 & 0.43 & 0.55 & 0.91 & 0.20 \\ 0.38 & 0.75 & 0.44 & 0.72 & 0.81 & 0.67 & 0.17 & 0.63 \\ 0.39 & 0.82 & 0.57 & 0.46 & 0.73 & 0.69 & 0.65 & 0.59 \\ 0.44 & 0.58 & 0.30 & 0.41 & 0.74 & 0.25 & 0.62 & 0.50 \\ 0.45 & 0.60 & 0.63 & 0.61 & 0.81 & 0.14 & 0.57 & 0.81 \\ 0.48 & 0.34 & 0.25 & 0.36 & 0.25 & 0.61 & 0.45 & 0.19 \\ 0.58 & 0.18 & 0.40 & 0.55 & 0.68 & 0.56 & 0.86 & 0.36 \\ 0.37 & 0.29 & 0.42 & 0.54 & 0.61 & 0.46 & 0.29 & 0.42 \end{bmatrix}$$

- Gitterpunkt bzw. die Gitterzelle (i, j) heißen **Pixel**
- üblich: Gitterzellenseitenlängen zu 1 normiert

Abtasten/Sampling

Pixelstruktur



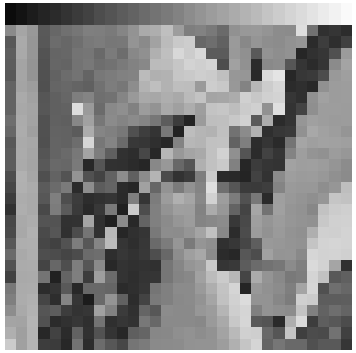
Lena original

Auge vergrößert

Abtasten/Sampling

Vergröbern/Down-Sampling

Lena, 512×512



Lena, 32×32

Abtasten/Sampling

Vergröbern/Down-Sampling

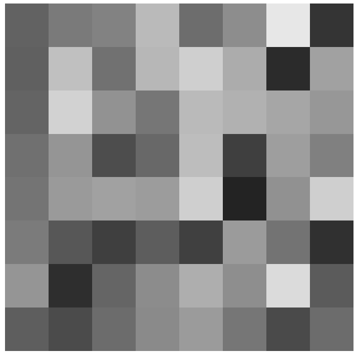
Lena, 512×512

Lena, 128×128

Abtasten/Sampling

Vergröbern/Down-Sampling

Lena, 512×512



Lena, 8×8

Diskretisierung

Quantisierung

- meint Diskretisierung des Wertebereichs $f(\Omega)$
- binäre Bilder: $f(\Omega) = \{0, 1\}$
- byte-Codierung: $f(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 255\}$
- heute oft: $f(\Omega) = [0, 1]$
- Menschen können nur etwa 40 verschiedene Grauwerte unterscheiden.

Kleiner Rückblick

- Bilder als
  - Funktion (empirisch o. kontinuierlich)
  - Matrix
  - Vektor
- Assoziation: (groß/klein) $\longleftrightarrow$ (hell/dunkel)
- Darstellung von Zahlen, Rechengenauigkeit
- Mehrdimensionalität

Quantisierung

256 verschiedene Grauwerte

4 verschiedene Grauwerte

Räumliche Verteilung der Grauwerte

Niveaumengen

- Gegeben: diskretes Bild $f : \Omega \longrightarrow \{c_0, \ldots, c_{255}\} \subset [0, 1]$
- Definition der Niveaumenge zum Grauwert $c_k \in \{c_0, \ldots, c_{255}\}$ als

$$\{(i, j) \in \Omega \,|\, f(i, j) = c_k\} = f^{-1}(c_k)$$

- Niveaubild:

$$I^f_{c_k}(i, j) = f(i, j) \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(c_k)}(i, j)$$

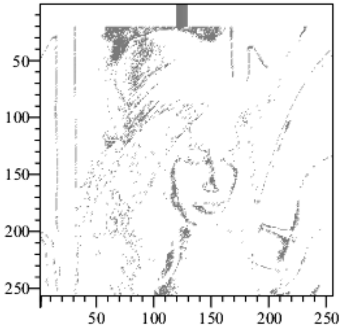
  mit $\mathbf{1}_M$ als Indikatorfunktion einer Menge M,

$$\mathbf{1}_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M \\ 0 \text{ falls } x \notin M \end{cases}$$

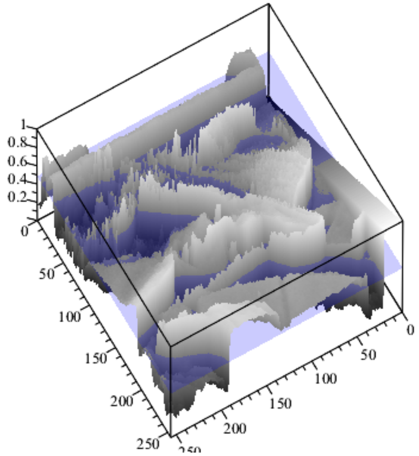
- Nützliche Zerlegung:

$$f = \sum_{k=0}^{255} I^f_{c_k} = \sum_{k=0}^{255} f \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(c_k)}$$

Räumliche Verteilung der Grauwerte

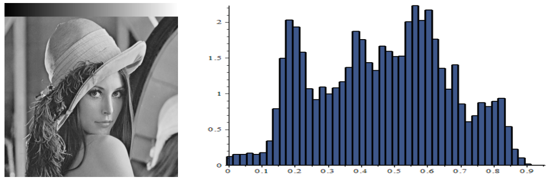


Niveaubild in 2D

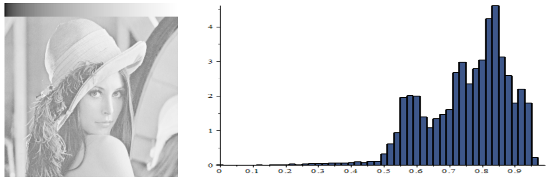


Niveaubild in 3D

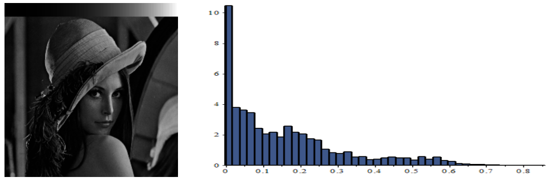
Beispiele: Histogramme



Originalbild



Helles Bild



Dunkles Bild

Häufigkeitsverteilung der Grauwerte

Histogramme

- Gegeben sei diskretes Bild $f : \Omega \longrightarrow [0,1]$
- Die Zuordnung

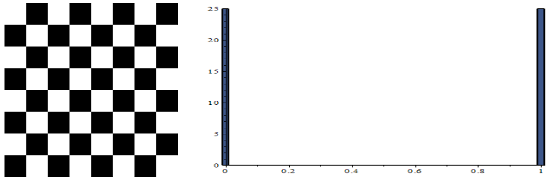
$$c \longmapsto |f^{-1}(c)| = \text{Anzahl}(f^{-1}(c))$$

  liefert das Histogramm H zur Verteilung der Grauwerte,

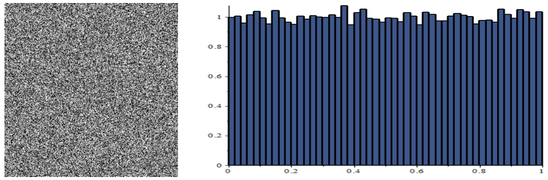
$$H : [0,1] \longrightarrow \{0, \ldots, |\Omega|\}$$

- Die räumliche Anordnung der Pixel in Ω ist ohne Bedeutung für das Histogramm
- Darstellung als Punkte-, Stäbchen-, oder Balkendiagramm

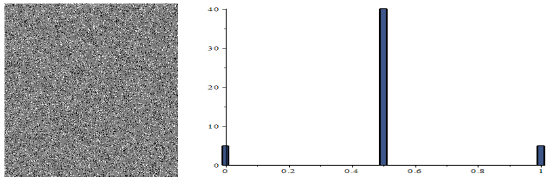
Beispiele: Histogramme



Binäres Bild



Gleichverteiltes Rauschen



„Salz-und-Pfeffer-Rauschen"

Kleiner Rückblick

Mit Bildern können z.B. thematisiert werden

- Bild/Urbild, Umkehrfunktion
- Mengenbeschreibungen
- räumliche Verteilung vs. Häufigkeitsverteilung
- Histogramme (und die Schwierigkeiten)
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Zufallszahlen

Punkttransformationen

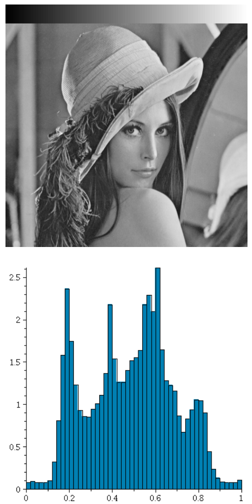
Was passiert, wenn man Funktionen auf Bilder anwendet?

- Gegeben ein Bild
$$f\,:\,\Omega \longrightarrow [0,1]$$
- Betrachte Funktion
$$T\,:\,[0,1] \longrightarrow [0,1]$$
- Verknüpfung $T \circ f$ von Transformation T und Bild f liefert **transformiertes Bild**:
$$T \circ f\,:\,\Omega \longrightarrow [0,1]$$
- Sichtbare Effekte:
  - Transformation der Häufigkeitsverteilung der Grauwerte/Histogramme
  - Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften von T werden „sichtbar“
- Herausförderung: Geg. T, wie wird Bild und Histogramm verändert werden?

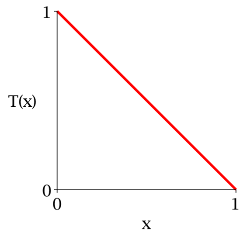
Inhalt

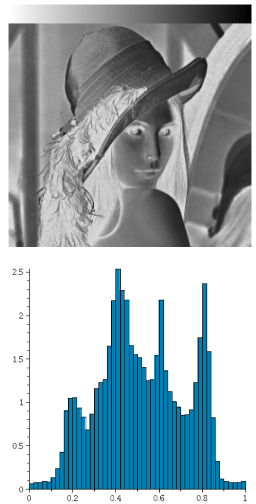
- Motivation
- Mathematische Beschreibung von Gauwertbildern
- Punkttransformationen
  - Anwendung von Funktionen auf Bilder
  - Veränderung der Grauwertverteilung
  - Rechnen mit Bildern
- Rauschen
- Fazit

Beispiel: Punkttransformation

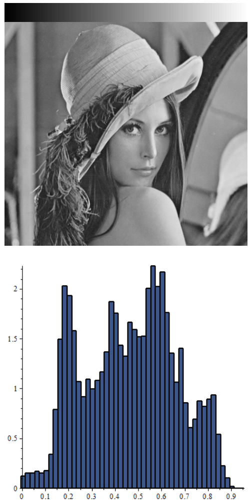


$$T(x) = 1 - x$$

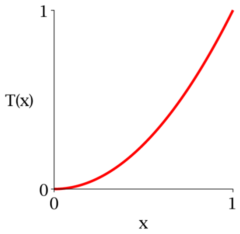


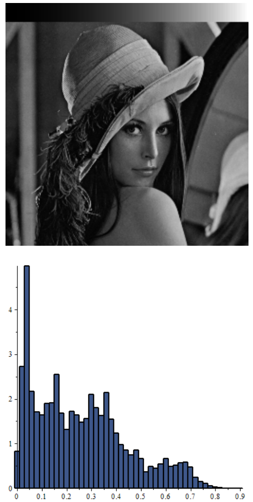


Beispiel: Punkttransformation

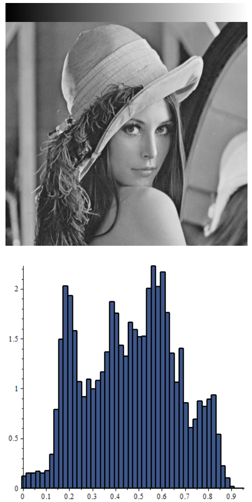


$$T(x) = x^2$$

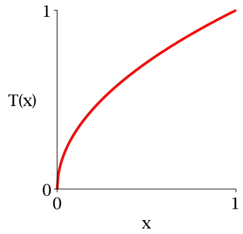


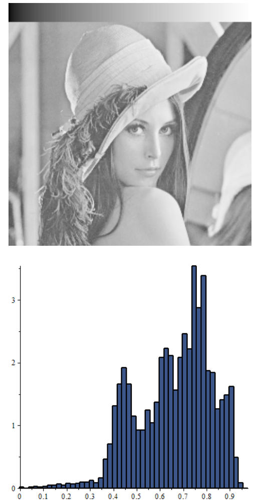


Beispiel: Punkttransformation

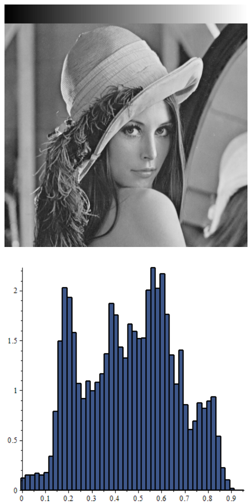


$$T(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

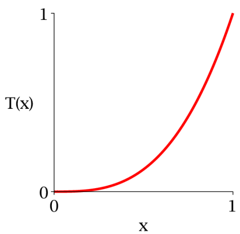


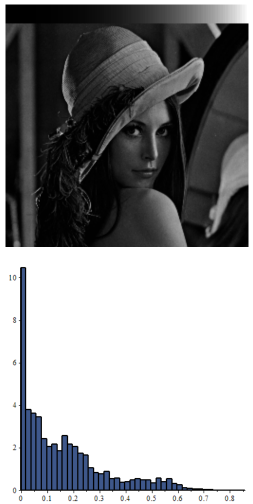


Beispiel: Punkttransformation

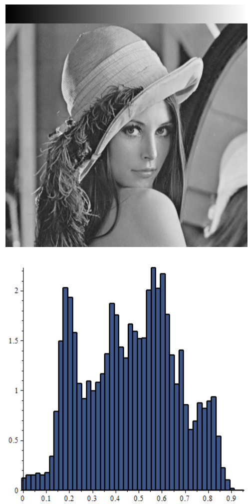


$$T(x) = x^3$$

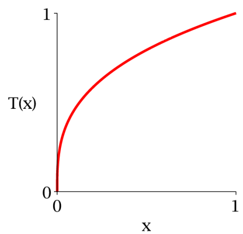


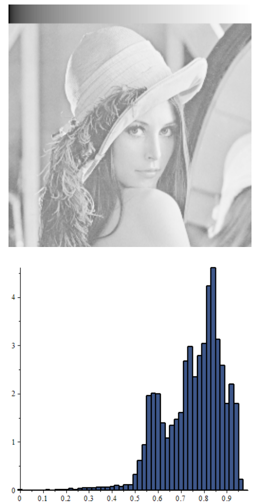


Beispiel: Punkttransformation

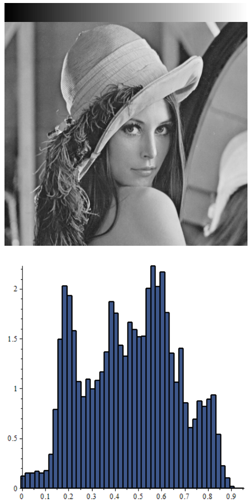


$$T(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

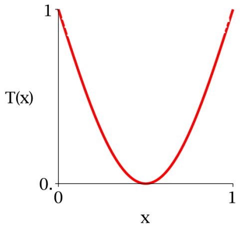


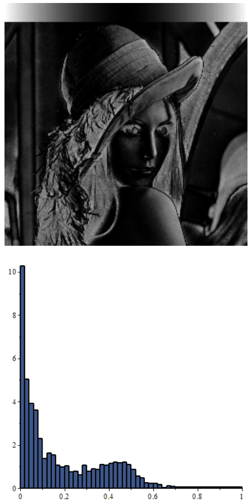


Beispiel: Punkttransformation

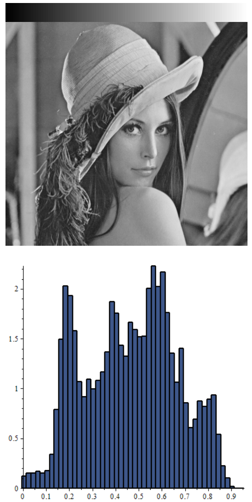


$$T(x) = 1 - \sin(\pi x)$$

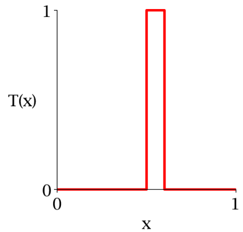


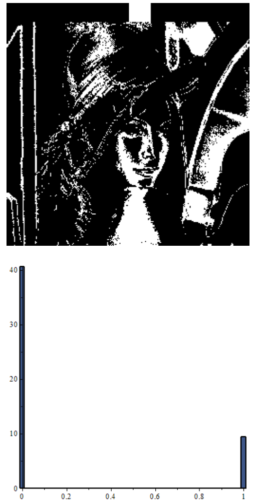


Beispiel: Punkttransformation

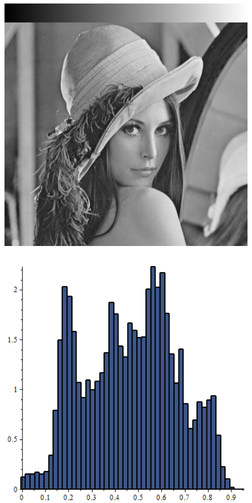


$$T(x) = \mathbf{1}_{[0.5,0.6]}(x)$$

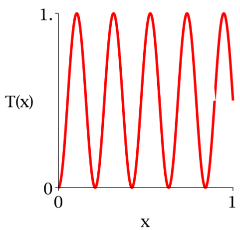


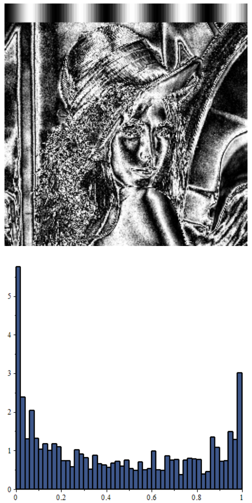


Beispiel: Punkttransformation

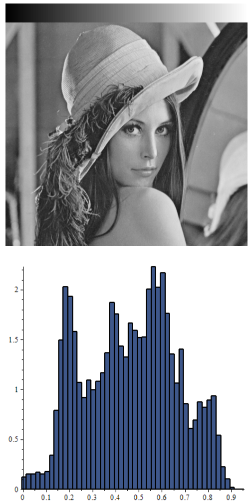


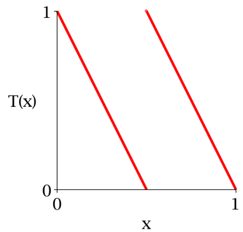
$$T(x) = \sin^2(4.75\,\pi\,x)$$

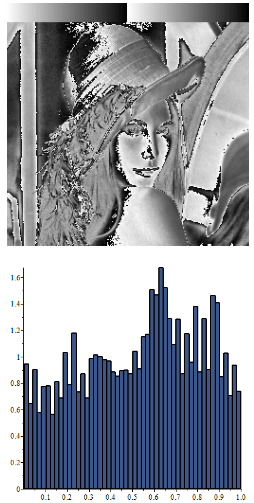




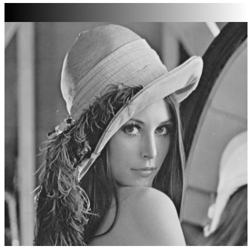
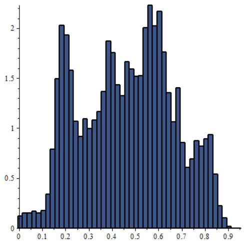
Beispiel: Punkttransformation



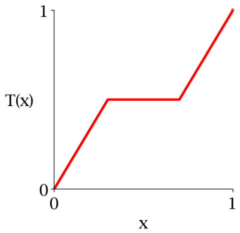




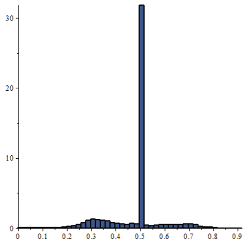
Beispiel: Punkttransformation

$\Longrightarrow$



$\Longrightarrow$

Punkttransformationen

Beispiel: Multiplikation

???

Punkttransformationen

Kann man mit Bildern rechnen ?

- $\mathcal{F} := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f$ ist Funktion $\}$ bildet Vektorraum
- $\mathcal{K} := \{ f : \Omega \to [0,1] \,|\, f$ ist Bild $\}$ bildet konvexe Teilmenge von $\mathcal{F}$
- $\mathcal{K}$ stabil unter Multiplikation
- Metamorphosen durch Konvexkombinationen

Punkttransformationen

Beispiel: Multiplikation

 $\times$  $=$ 

Punkttransformationen

Beispiel: Konvexkombination

K

$\frac{3}{4}\cdot\mathsf{K} + \frac{1}{4}\cdot\mathsf{B}$

B

Punkttransformationen

Beispiel: Konvexkombination

K

$\frac{1}{4}\cdot\mathsf{K} + \frac{3}{4}\cdot\mathsf{B}$

B

Punkttransformationen

Beispiel: Konvexkombination

K

$\frac{1}{2}\cdot\mathsf{K} + \frac{1}{2}\cdot\mathsf{B}$

B

Kleiner Rückblick

Mit Bildern lassen sich thematisieren:

- Verknüpfung von Funktionen
- Monotonie
- Umkehrbarkeit
- Stetigkeit
- Design von Funktionen
- Ungleichungen, (Halb)ordnungen, $f \geq g$
- Rechnen mit Bildern,
- Funktionenraum, Vektorraum
- Konvexität
- Geometrie des Raumes der Bilder

Inhalt

- Motivation
- Mathematische Beschreibung von Gauwertbildern
- Punkttransformationen
- Rauschen (auch als „Vorspeise“)
- Fazit

Beispiel: Rauschen

Kameramann, 512×512

Kameramann, 30% uniformes Rauschen

„Punkttransformation“ Rauschen

- wichtige Form der Degradation von Bildern
- stochastisches Phänomen
- oft nicht jedes Pixel betroffen

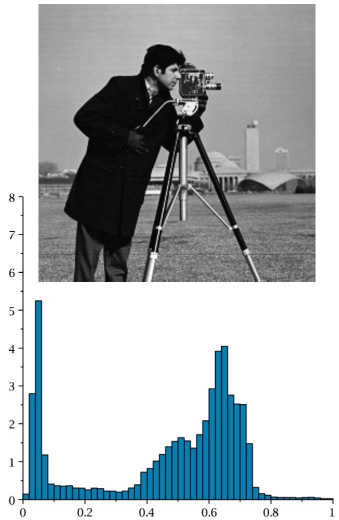
Additives Rauschen

- Modellannahme: Bild und Rauschen stochastisch unabhängig

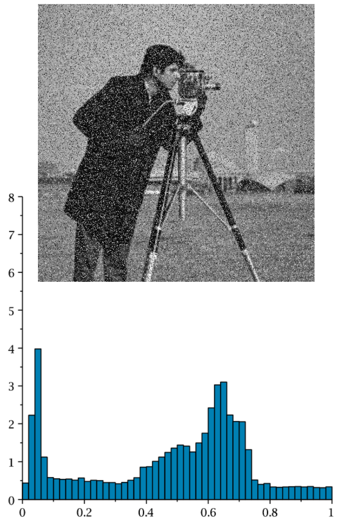
$$f(i,j) = g(i,j) + n(i,j)$$

  mit Rauschen n, Originalbild g und verrauschtem Bild f
- Rauschen n wird durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert, z.B.
  - Gleichverteilung (uniformes Rauschen)
  - Bernoulli-Verteilung (Salz-und-Pfeffer-Rauschen)
- Herausförderung: Künstliches Rauschen, wie?

Beispiel: Rauschen

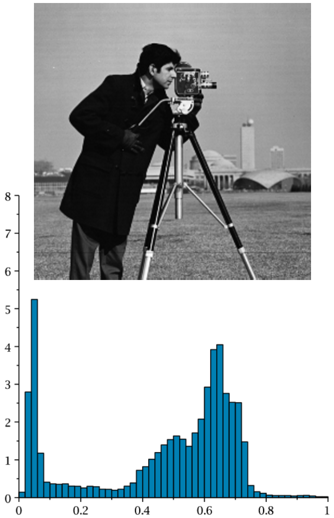


Kameramann, 512×512

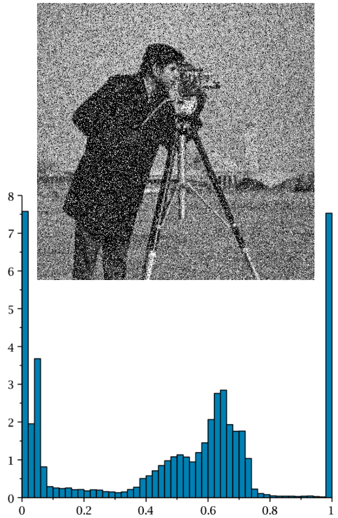


Kameramann, 30% uniformes Rauschen

Beispiel: Rauschen

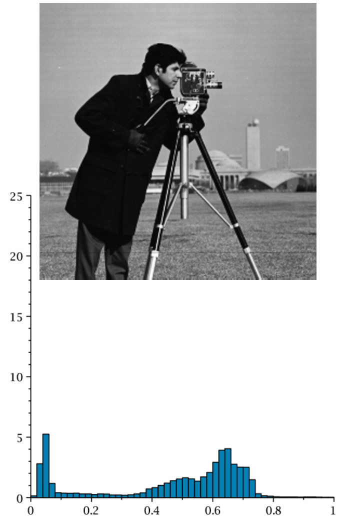


512 × 512

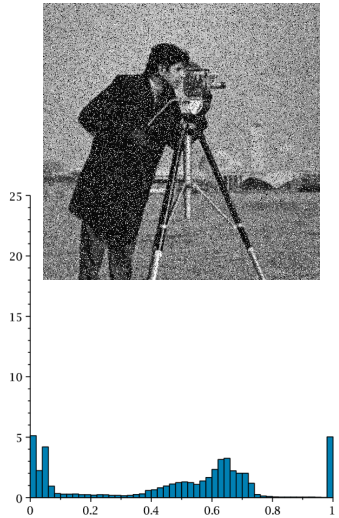


30% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen



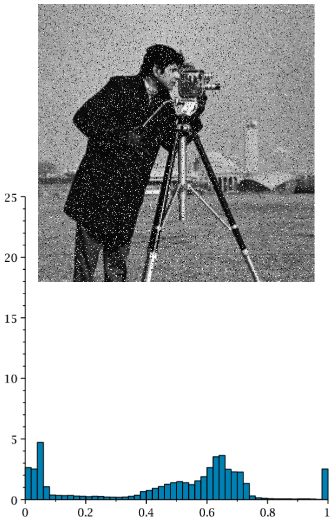
512 × 512



20% SuP-Rauschen

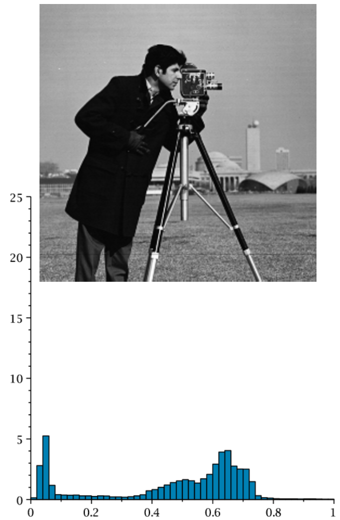
Beispiel: Rauschen

512 × 512

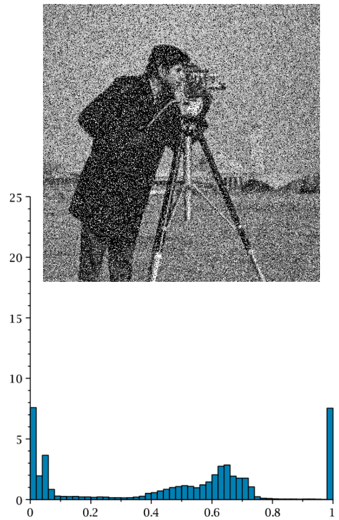


10% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen



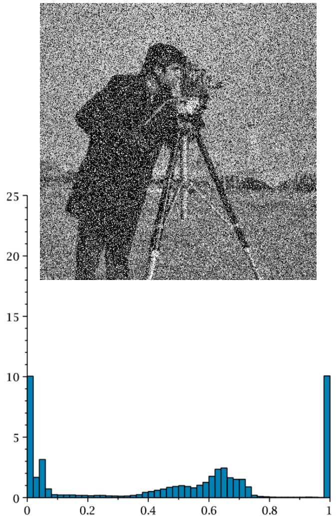
512 × 512



30% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen

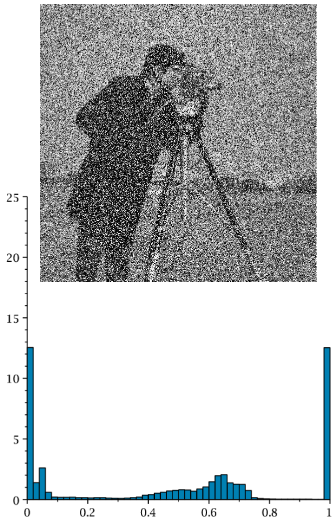
512×512



40% SuP-Rauschen

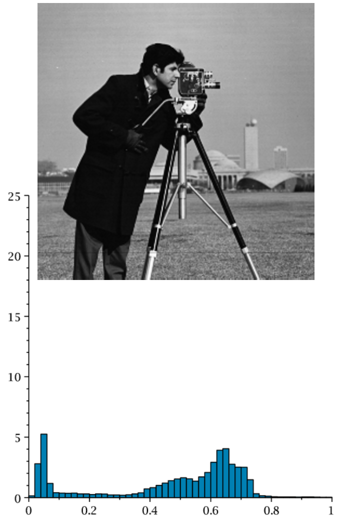
Beispiel: Rauschen

512×512

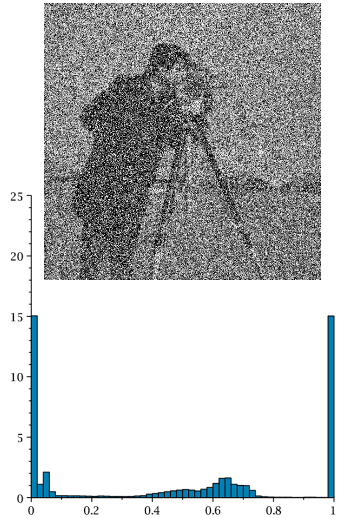


50% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen

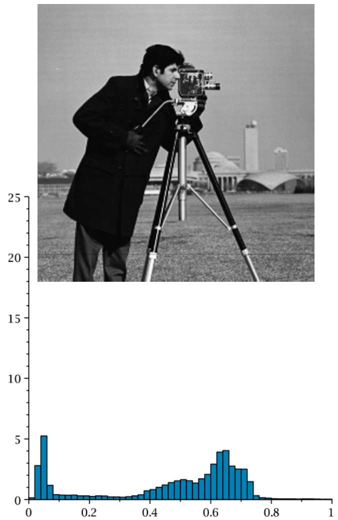


512×512

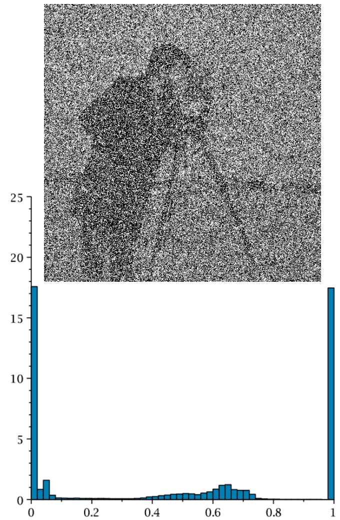


60% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen



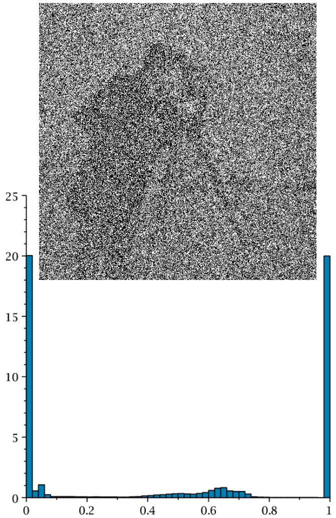
512×512



70% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen

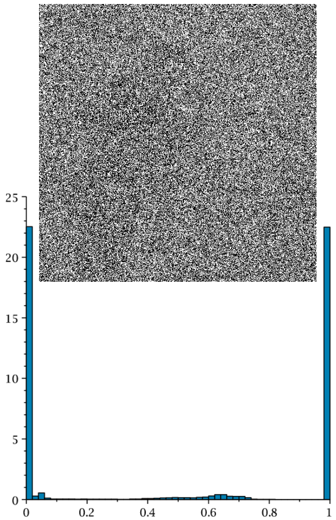
512 × 512



80% SuP-Rauschen

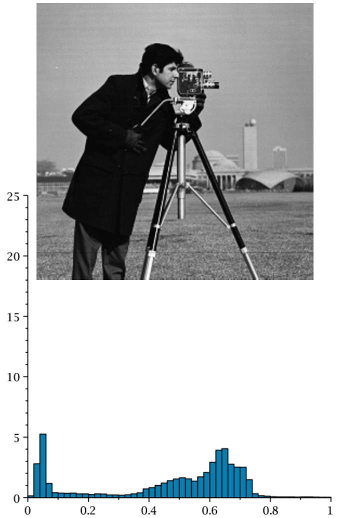
Beispiel: Rauschen

512 × 512

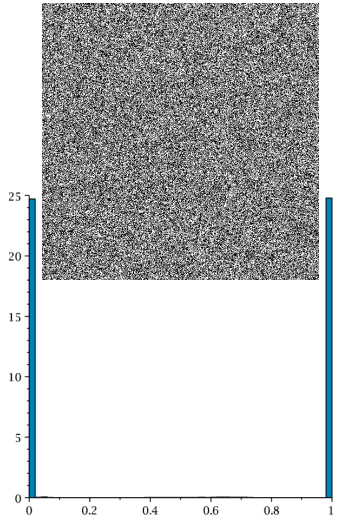


90% SuP-Rauschen

Beispiel: Rauschen



512 × 512



99% SuP-Rauschen

Kann man Bilder entrauschen?

Entrauschen

512 × 512

30% SuP-Rauschen

Kann man Bilder entrauschen?

Entrauschen

512×512 | 30% SuP-Rauschen | entrauscht ?

Kann man Bilder entrauschen?

Entrauschen

512×512 | 30% SuP-Rauschen | entrauscht

Wird erreicht durch lokale Transformationen!

Kann man Bilder entrauschen?

Entrauschen

512×512 | 30% SuP-Rauschen | entrauscht

Wie geht das?

(Vorläufiges) Fazit

- Schon mit elementarer Bildverarbeitung lassen sich mathematische Konzepte sichtbar machen.
- Mit Punkttransformationen lassen sich Begriffe wie Verknüpfung von Funktionen, und deren Stetigkeit, Monotonie und Umkehrbarkeit augenfällig darstellen.
- Zufall, Wahrscheinlichkeit, Verteilung und Histogramme erscheinen in neuem Licht (von Nützlichkeit?).
- Rechnen(!) mit Funktionen wird visuell erfahrbar.
- Bildverarbeitung mit Stift und Papier ist möglich:
  Kleine Bilder oder besser mit **Signalen**, also Zahlenreihen.
- Der Lernende kann sichtbar gestalten, schöpferisch tätig sein, spielen;
  er hat Bilder gemacht mit Mathematik.

(Vorläufiges) Fazit

- Schon mit elementarer Bildverarbeitung lassen sich mathematische Konzepte sichtbar machen.
- Mit Punkttransformationen lassen sich Begriffe wie Verknüpfung von Funktionen, und deren Stetigkeit, Monotonie und Umkehrbarkeit augenfällig darstellen.
- Zufall, Wahrscheinlichkeit, Verteilung und Histogramme erscheinen in neuem Licht (von Nützlichkeit?).
- Rechnen(!) mit Funktionen wird visuell erfahrbar.
- Bildverarbeitung mit Stift und Papier ist möglich:
  Kleine Bilder oder besser mit **Signalen**, also Zahlenreihen.
- Der Lernende kann sichtbar gestalten, schöpferisch tätig sein, spielen;

  er hat **Macht** mit Mathematik.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74