



# Mathematisch fundiertes fachdidaktisches Wissen

Lisa Hefendehl-Hebeker  
Universität Duisburg-Essen

Münster, 5. März 2013



# Anlass der Fragestellung

„Es ist an der Zeit, gründlich darüber zu diskutieren, was „fachdidaktisches Wissen“ ausmacht, in welchem Bezug es zur Fachwissenschaft steht und welche Qualifikationen eine „Fachdidaktikerin“ oder ein „Fachdidaktiker“ haben muss, um dieses fachdidaktische Wissen mathematisch fundiert entwickeln und vermitteln zu können.“

Walcher & Wittmann 2011



# Bildungstheoretische Grundposition

„Deshalb gehört es zur Bildung, dass sie unterschiedliche Weltzugänge, unterschiedliche Horizonte des Weltverstehens eröffnet, die ... nicht wechselseitig substituierbar sind und auch nicht nach Geltungshierarchien zu ordnen sind: empirische, logisch-rationale, hermeneutische und musisch-ästhetische Weltzugänge mit ihren jeweils unterschiedlichen Potenzialen an Verfügungswissen und Orientierungswissen, mit ihren jeweils eigenen Rationalitätsformen.“

B. Dressler 2006, S. 110



# Mathematik als Weltzugang

Mathematik ist eine Weise des Weltverstehens,

- die unverwechselbar und nicht ersetzbar ist,
- logisch-rational vorgeht,
- diese Form der Rationalität zu einem Höchstmaß an Stringenz und zugleich zu einer weiten Anwendbarkeit entwickelt hat
- und damit im Zeitalter der Hochtechnologie eine unentbehrliche Position einnimmt.

# Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Mathematikunterricht sollte

- in stufengemäßer Form erlebbar machen, wie mathematische Wissensbildung geschieht,
- und dabei je nach Bildungsgang
  - Sicherheit in der alltagspraktischen Bewältigung des Faches gewinnen (Verfügungswissen),
  - dann auch wissenschaftlich vermittelte Erfahrungen und Erkenntnisse erwerben,
  - schließlich (Sek. II) die Erkenntnisweisen des Faches wissenschaftstheoretisch reflektieren (z. B.: Welche Art von Orientierungswissen stellt die Mathematik bereit?) ,
  - und auf allen Stufen ein ausgewogenes Verhältnis zwischen intellektueller Selbstentfaltung und Verwendbarkeitsaspekten herstellen.

Dies ist ohne eine „künstliche Vermittlung“ im MU nicht möglich.



## Was Lehrkräfte können sollten

Idealtypische Einteilung in Dimensionen

- Fachlich-inhaltliche Dimension
- Fachlich-epistemologische Dimension
- Lern- und kognitionspsychologische Dimension
- Unterrichtsmethodische Dimension

Hieraus wird sich ergeben, was Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker vermitteln können sollten



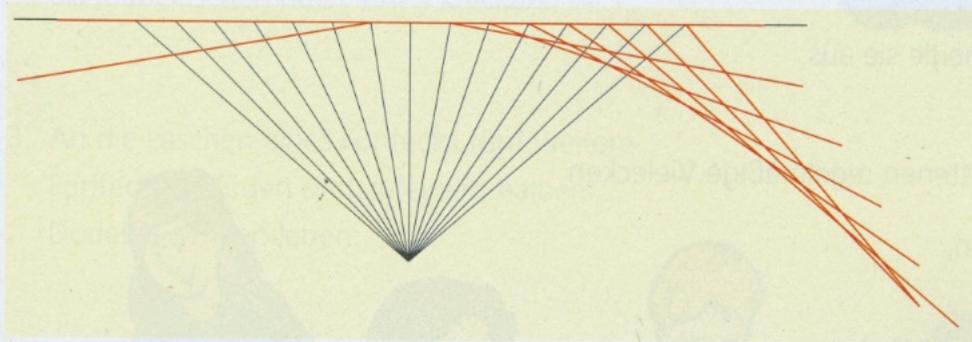
## Die fachlich-inhaltliche Dimension

Eine solide fachliche Grundbildung

- Wissensgrundlage für den Unterricht
- Vertieftes Durchdringen des Schulstoffes
- Darüberhinaus wissen und erzählen können, welche Rolle die Mathematik in der Welt spielt
- Wissensreserven für die Gestaltung phantasievoller und produktiver Aufgaben

# Beispiel

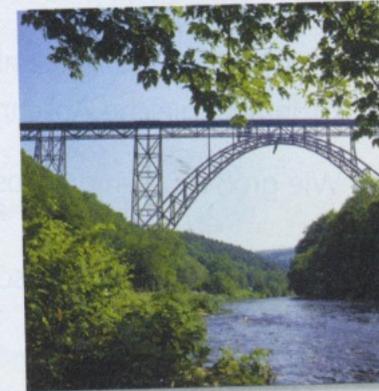
- 3 Zeichne eine Gerade und einen etwa 3 cm entfernten Punkt. Zeichne etwa 15 feine Verbindungsstrecken vom Punkt zur Geraden. Zeichne mit dem Geodreieck senkrecht zu jeder Strecke eine rote Linie nach unten.



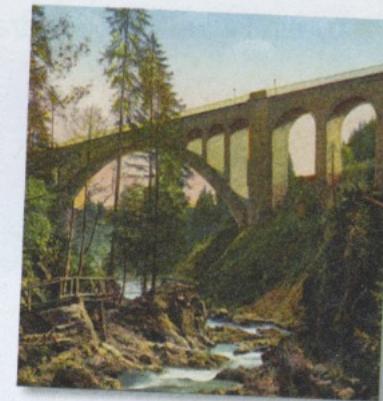
Die roten Linien begrenzen einen Bogen.

- 4 Wiederhole die Zeichnung von Aufgabe 3
- a) mit einem Punkt, der etwa 4 cm von der Geraden entfernt ist,
  - b) mit einem Punkt, der etwa 2 cm von der Geraden entfernt ist,
  - c) mit einem Punkt, der oberhalb der Geraden liegt.

Was fällt dir auf?



Müngstener Brücke bei Solingen



Gutachbrücke bei Neustadt im Schwarzwald

# Die fachlich-epistemologische Dimension I

Wie geschieht mathematische Wissensbildung *horizontal*?

- Welche Phänomene können mit dem jeweiligen Wissensbereich organisiert werden?
- Welche Denkhandlungen sind beteiligt?
- Welche spezifischen Stilmittel und Rationalisierungspraktiken („Mathematischer Habitus“) ?
  - Genaues Beobachten und gezieltes Fragen
  - Plausibles Schließen
  - Exaktes Schließen: Wie führt man einen Beweis?
  - Gedankliches Ordnen (z. B.: Wie trifft man eine Fallunterscheidung?)
  - Formalisieren – was ist das?
  - ...



## Die fachlich-epistemologische Dimension II

Wie geschieht mathematische Wissensbildung  
*vertikal*?

- Wie läuft eine genetische Entwicklung vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken und schließlich präzisen Beschreiben in der Sprache der Mathematik?
- Wie kann man ein mathematisches Thema auf verschiedenen Stufen der Denkentwicklung intellektuell redlich entfalten?
- ...

# Die lern- und kognitionspsychologische D.

- Stufen der Denkentwicklung
  - Vom konkret-operativen zum formalen Denken (Piaget)
- Individuelle Präferenzen für verschiedene Formen mathematischer Begriffsbildung
  - prädikativ vs. funktional (I. Schwank)
- Individuelle Lernwege, Lernhürden, Fehlvorstellungen, Fehlermuster (Diagnose)



# Die unterrichtsmethodische Dimension

Umsetzen der genannten Kenntnisse in

- Entwicklung von Lernumgebungen
  - Aufgabenideen
  - Lernimpulse
  - Lehrmaterialien
- Fachlich Inhalte und Wissensbildungsprozesse akzentuierende Techniken der Unterrichtsmoderation

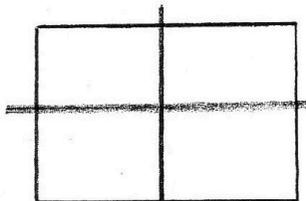
## Beispiel 1: Das operative Prinzip

Aufgabe aus einer Klausur zu einer Vorlesung „Figuren und Abbildungen im MU“ :

- „Erläutern Sie, wie man die Senkrechtrelation mit Hilfe von Fallexperimenten erarbeiten kann.“
- Mindestens zehn Prozent der Studierenden simplifizierten das Experiment in einer Weise, dass die mathematische Substanz auf der Strecke blieb.

# Lösung einer Studentin

b) Man nimmt ein Blatt Papier und faltet es zunächst einmal der Länge nach. Anschließend faltet man das Blatt auseinander und faltet es der Breite nach. Das Blatt sieht dann ungefähr wie folgt aus:



Die beiden Faltachsen schneiden sich und stehen senkrecht, d.h. mit einem  $90^\circ$ -Winkel, aufeinander.  $\rightarrow$  hier nutzt du aber bereits aus, dass die Seiten des Blattes senkrecht stehen!

## Beispiel 2: Parabelscharen

Schargleichung  $y = x^2 - px + 3p$

- Bestimme die Scheitelkoordinaten der Schargleichungen

$$S\left(\frac{p}{2}; -\frac{p^2}{4} + 3p\right)$$

- Zeige: Alle Scharparabeln laufen durch den Punkt P(3;9)
- Bestimme den Trägergraphen der Scheitel-punkte.

Wichtig für gutes „Erklären“: sicherer Umgang mit den verschiedenen Variablenaspekten

# Missverständnisse und Scheinklarheiten

Studierende verkennen oft die Aufgabe der Fachdidaktik; dabei vollziehen sie grundlegende Verwechslungen:

- Schonatmosphäre vs. stufengemäße Vorgehensweise
- Oberflächlicher „Spaß“ statt echte intellektuelle Herausforderung (Flow-Erleben)

Wichtig auch: eine ausgewogene Entwicklung der Fachdidaktik als Hochschuldisziplin