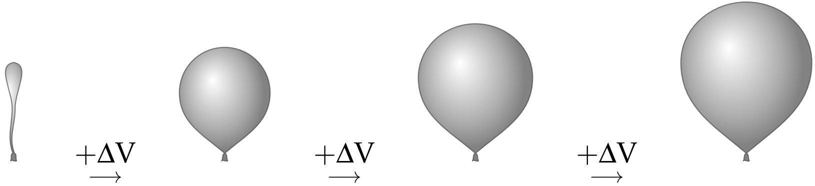
INFINITESIMALRECHNUNG NACH LAZARE CARNOT IM HEUTIGEN ANALYSISUNTERRICHT?

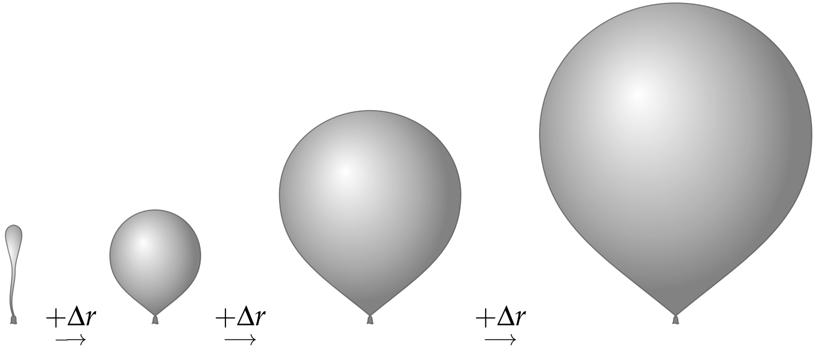
Johanna Heitzer

05. März 2013, GDM Münster

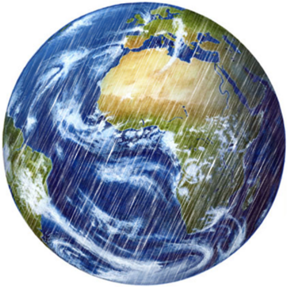
GLIEDERUNG

- Einstieg in die Problematik der Änderungsraten
- Heutige und gestrige Lehrplanvorgaben
- Ein interessantes Stück Wissenschaftsgeschichte
- Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot…
- …am Beispiel der Volumenänderungsrate
- Fazit in Bezug auf den Mathematikunterricht


+ΔV
+ΔV
+ΔV


$+\Delta r$
$+\Delta r$
$+\Delta r$

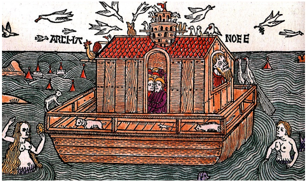
Sintflut früher und heute



ZUR ZEITLICHEN EINORDNUNG

3000 v.Chr. 0 2000 n.Chr.

Sintflut



Johanna Wanka

Curriculare Vorgaben 2012

„Die Schülerinnen und Schüler können Grenzwerte auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“

(KMK Bildungsstandards Mathematik SekII, 2012, S.22)

„Ein anschaulich geprägter und nicht-formaler Grenzwertbegriff reicht an dieser Stelle völlig aus, ein an Maßstäben der Hochschule ausgerichteter Zugang über Epsilontik oder eine andere Theorie der Folgen ist den Zielen der Jahrgangsstufe 11 nicht angemessen. Im Leistungskurs sollte der Grenzwertbegriff später verstieft werden, z. B. zur Behandlung der Integralrechnung.“

(NRW Lehrpläne Mathematik SekII, 1999, S.16)

CURRICULARE VORGABEN 2012

„Die Schüler erwerben bei der Beschäftigung mit irrationalen Zahlen propädeutische Vorstellungen vom Unendlichen und vom Grenzwertbegriff. [.. Sie lernen die] näherungsweise Berechnung von π zur propädeutischen Erfahrung des Grenzwertbegriffs [kennen].“

(Lehrplan Mathematik Sachsen, 2009, S. 25-26)

„Die Schüler gewinnen inhaltliches Verständnis von den Begriffen Grenzwert, erste Ableitung und bestimmtes Integral. [..] Sie kennen Zahlenfolgen als spezielle Frunktionen [..] und das Ermitteln von Grenzwerten bei Funktionen.“

(Lehrplan Mathematik Sachsen, 2009, S. 31-34)

INFINITESIMALRECHNUNG IN DER SCHULE?

ARGUMENTE UM 1900 (NACH A. ZEIMETZ, SAARBRÜCKEN)

Pro:

- Verständnis des Kulturlebens der Gegenwart
- allgemeine Grundlage für verschiedene Studiengänge
- Wissenschaftsorientierung (statt „Schellbachscher Methode")

Contra:

- Zeitmangel, Unvereinbarkeit mit selbsttätigem Lernen
- zu hoher Schwierigkeitsgrad
- Verunsicherung der Lernenden
- Unvereinbarkeit mit dem Schulsystem
- Unmöglichkeit des Durchdringens, reiner Kalkül

INFINITESIMALRECHNUNG IN DER SCHULE

DARSTELLUNGSWEISEN AB 1925 (NACH K. KRÜGER, PADERBORN)

- sehr sorgfältig auf geometrische Anschauung gestützt, graphisches Differenzieren vor den Rechnungen
- kalkülhaft, Einübung von Regeln zum „unfallfreien“ Umgang mit den Differenzialen

Kritische Frage:

- Zugang über Tangentensteigungen (vertrauter Kontext)

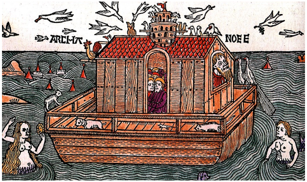
  versus

- Zugang über Änderungsraten (breiteres Anwendungsspektrum)

Zur zeitlichen Einordnung

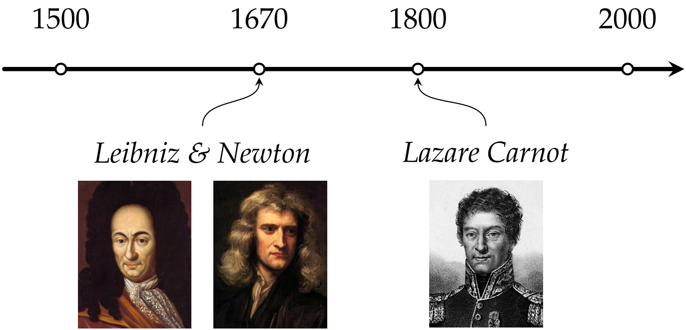
3000 v.Chr. 0 2000 n.Chr.

Sintflut

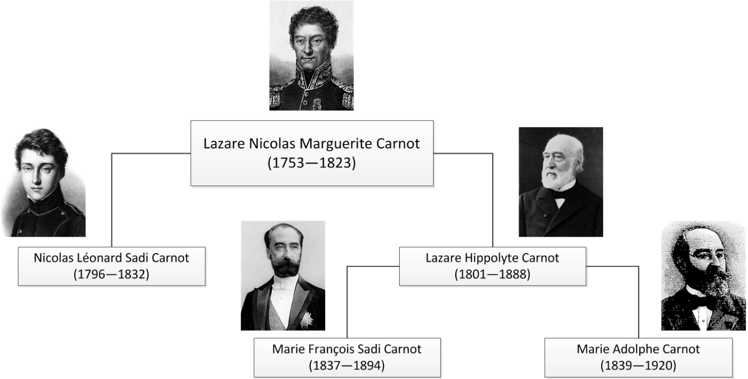


Johanna Wanka

Zur zeitlichen Einordnung

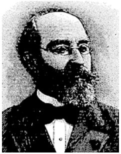


AUSSCHNITT AUS DEM FAMILIENSTAMMBAUM



Marie Adolphe Carnot

- Chemiker, Bergbauingenieur, Mineninspektor
- **Mineralоge, Entdecker des Carnotit**
- Kommandant der Ehrenlegion



Marie Adolphe Carnot (1839-1920)

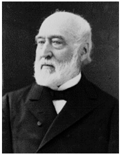
MARIE FRANÇOIS SADI CARNOT

- Ingenieur und Brückenbauer
- Abgeordneter, Minister im Staatsbauministerium, Finanzminister
- **Staatspräsident von Frankreich**
- Gesetze zur Einschränkung der Pressefreiheit und Bekämpfung des Anarchismus
- Von einem Anarchisten erstochen

Marie François Sadi Carnot (1837-1894)

Lazare Hypolyte Carnot

- Politiker
- Minister, Senator



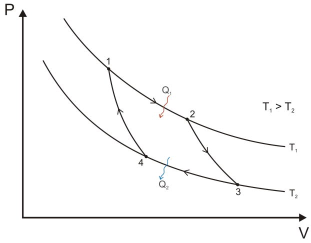
Lazare Hypolyte Carnot (1801-1888)

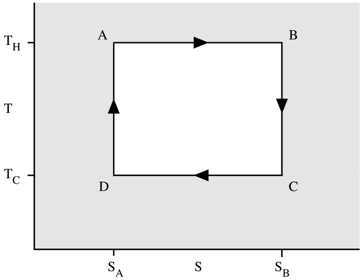
SADI NICOLAS LÉONARD CARNOT

- Studium u. a. bei POISSON und AMPÈRE
- Kämpfer für NAPOLEON, Militäringenieur
- Ideen zur Ökonomie und Steuerreform
- Industrielle Probleme, insbesondere Gastheorie
- „Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers“
- **Begründer der Thermodynamik, CARNOTPROZESS**
- Mit 36 Jahren an Cholera verstorben

Sadi Nicolas Léonard Carnot (1796-1832)

DER CARNOTPROZESS





- Eine reine Wärmekraftmaschine kann nie einen höheren Wirkungsgrad erreichen als $1 - T_{II}/T_I$.
- Die Wärme wandert von allein immer nur vom wärmeren zum kühleren Ort.

LAZARE NICOLAS MARGUERITE CARNOT

- Militärstratege (Revolution, Koalitionskriege…)
- „De la défense des places fortes"
- Kriegsminister unter NAPOLEON, Exil in Magdeburg
- **Mathematiker, Verbreiter des Infinitesimalkalküls**
- „Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung"
- „Geometrie der Stellung"(u. a. Kosinussatz)
- Mitbegründer der „École polytechnique"

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823)

Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung

Hintergrund:

Newton (1642—1727)

Leibniz (1646—1716)

Philosophie:

„In der Mathematik versteht man die Dinge nicht.
Man gewöhnt sich nur an sie.“ (John von Neumann)

ZUR PROBLEMLAGE

Schwierigkeit 1:

Vorstellung des Begriffs der Unendlichkeit,
Beziehung zu „dem Nichts in der Mitte"

Schwierigkeit 2:

Ausdrücken der verschiedenen Bedingungen einer Aufgabe durch Gleichungen, Lösen dieser Gleichungen

Lösung:

Wenn exakte Lösung nicht möglich: Annäherung mit kleinem Fehler-Einfluss auf das Ergebnis

Definitionen

Hauptgröße $\equiv$ vom Ausdruck der Aufgabe selbst gegeben

Hilfsgröße $\equiv$ zusätzlich eingeführt, um Vergleiche zwischen den Hauptgrößen zu erleichtern; hat Grenze, von der sie sich nur um unendlich kleine Größe unterscheidet

Gleichheit in letztem Verhältnis $\equiv$ beliebige Annäherung des Verhältnisses an die Einheit

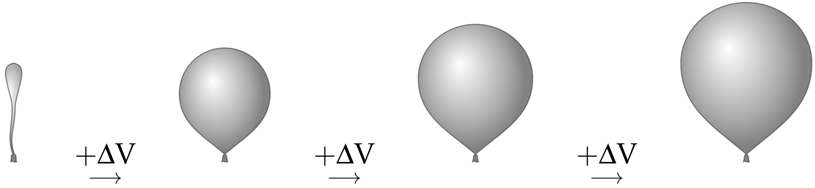
Unvollkommene Gleichung $\equiv$ Gleichung mit ungleichen, aber in letztem Verhältnis gleichen Seiten

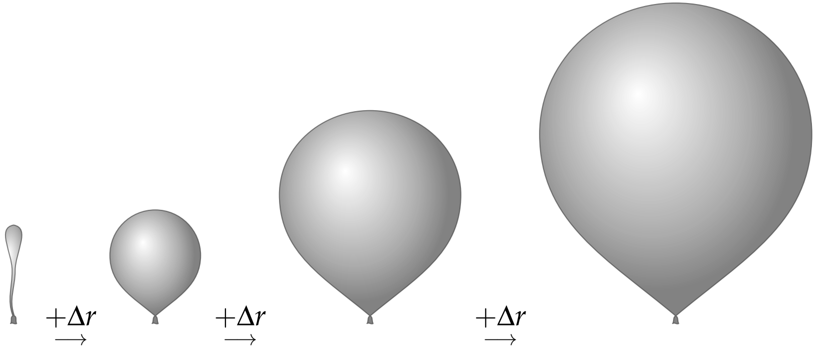
Sätze über unvollkommene Gleichungen

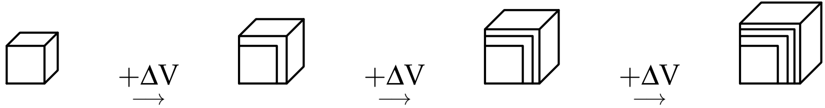
Eine unvollkommene Gleichung wird durch Ergänzen/Abziehen einer unendlich kleinen Größe entweder richtig oder bleibt unvollkommen (wird aber nicht falsch).

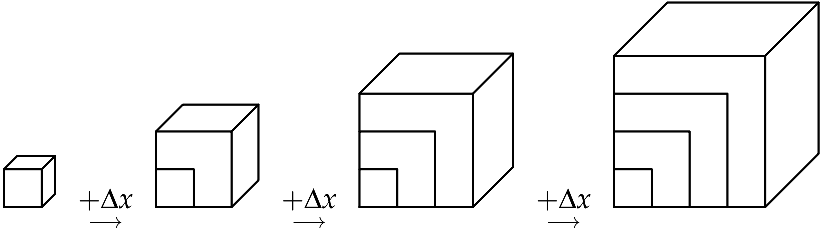
Gleichungen, die nur Hauptgrößen enthalten, können nicht unvollkommen sein (sondern nur richtig oder falsch).

Eliminiert man aus einer unvollkommenen Gleichung durch Ergänzen/Abziehen unendlich kleiner Größen alle Hilfsgrößen, so ist die resultierende Gleichung richtig.


$+\Delta V$
$\longrightarrow$
$+\Delta V$
$\longrightarrow$
$+\Delta V$
$\longrightarrow$


$\xrightarrow{+\Delta r}$
$\xrightarrow{+\Delta r}$
$\xrightarrow{+\Delta r}$


+ΔV
+ΔV
+ΔV


$\xrightarrow{+\Delta x}$
$\xrightarrow{+\Delta x}$
$\xrightarrow{+\Delta x}$

Volumenzuwachsrate nach Carnot

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{V}} - \mathrm{V} &= \tilde{x}^3 - x^3 \\
&= \left[x + (\tilde{x} - x)\right]^3 - x^3 \\
&= x^3 + 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3 - x^3 \\
&= 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3 \\
\widetilde{\mathrm{V}} - \mathrm{V} &\overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x)
\end{aligned}$$

$$\frac{\widetilde{\mathrm{V}} - \mathrm{V}}{3x^2 \cdot (\tilde{x} - x)} \quad \longrightarrow \quad 1$$

$$\mathrm{V}' \quad \overset{\text{ilV}}{=} \quad \frac{\widetilde{\mathrm{V}} - \mathrm{V}}{\tilde{x} - x} \quad \overset{\text{ilV}}{=} \quad 3x^2$$

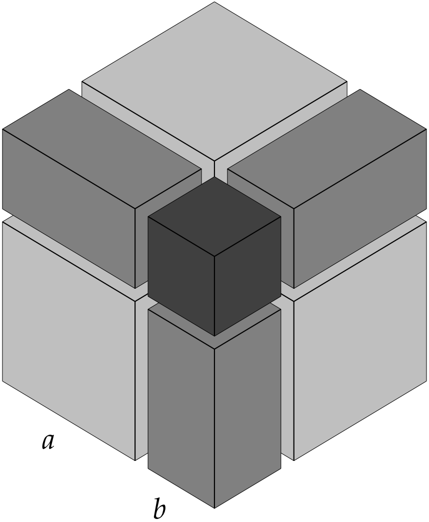
VOLUMENZUWACHSRATE MIT DIFFERENTIALEN

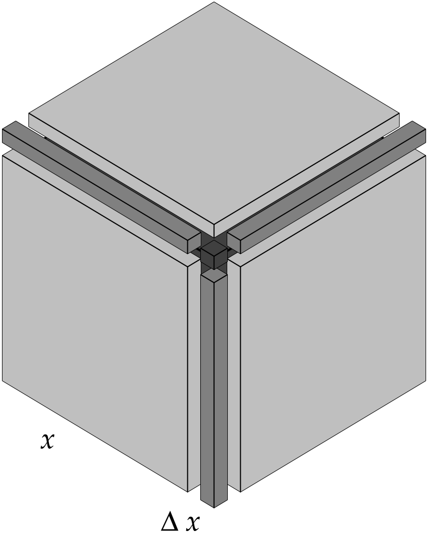
$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{V} &= \left[x + (\Delta\, x)\right]^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot (\Delta\, x) + 3x \cdot (\Delta\, x)^2 + (\Delta\, x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot (\Delta\, x) + 3x \cdot (\Delta\, x)^2 + (\Delta\, x)^3\end{aligned}$$

$$\Delta \mathrm{V} \overset{ilV}{=} 3x^2 \cdot (\Delta\, x)$$

$$\frac{\Delta \mathrm{V}}{3x^2 \cdot (\Delta\, x)} \quad \longrightarrow \quad 1$$

$$\mathrm{V}' \quad \overset{ilV}{=} \quad \frac{\Delta \mathrm{V}}{\Delta\, x} \quad \overset{ilV}{=} \quad 3x^2$$


a
b

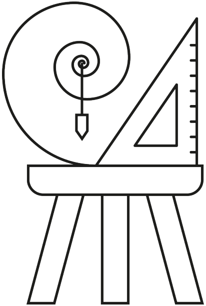

x
Δ x

AUS LERNPSYCHOLOGIE UND MATHEMATIKDIDAKTIK

- Menschen mögen Geschichten
- Lernen ist an Emotionen gebunden
- Neugier steigert Motivation und Aufmerksamkeit
- Beschaulich und vernetzt Gelerntes wird besser behalten
- Mathematik sollte als lebendige Wissenschaft mit charakteristischen Merkmalen erfahren werden

Zum Fazit

„Das bloße Wissen in der Mathematik, auf Anwendungen berechnet, die Bekanntschaft mit dazu dienenden Sätzen und Formeln, selbst mit dem Mechanismus, der zu solchen Sätzen führt, ist zu richtigen Anwendungen noch nicht hinreichend, sondern der mathematische Geist, oder die mathematische Art zu denken, muß der Leitfaden sein.“ (A. L. Crelle, 1845)



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!