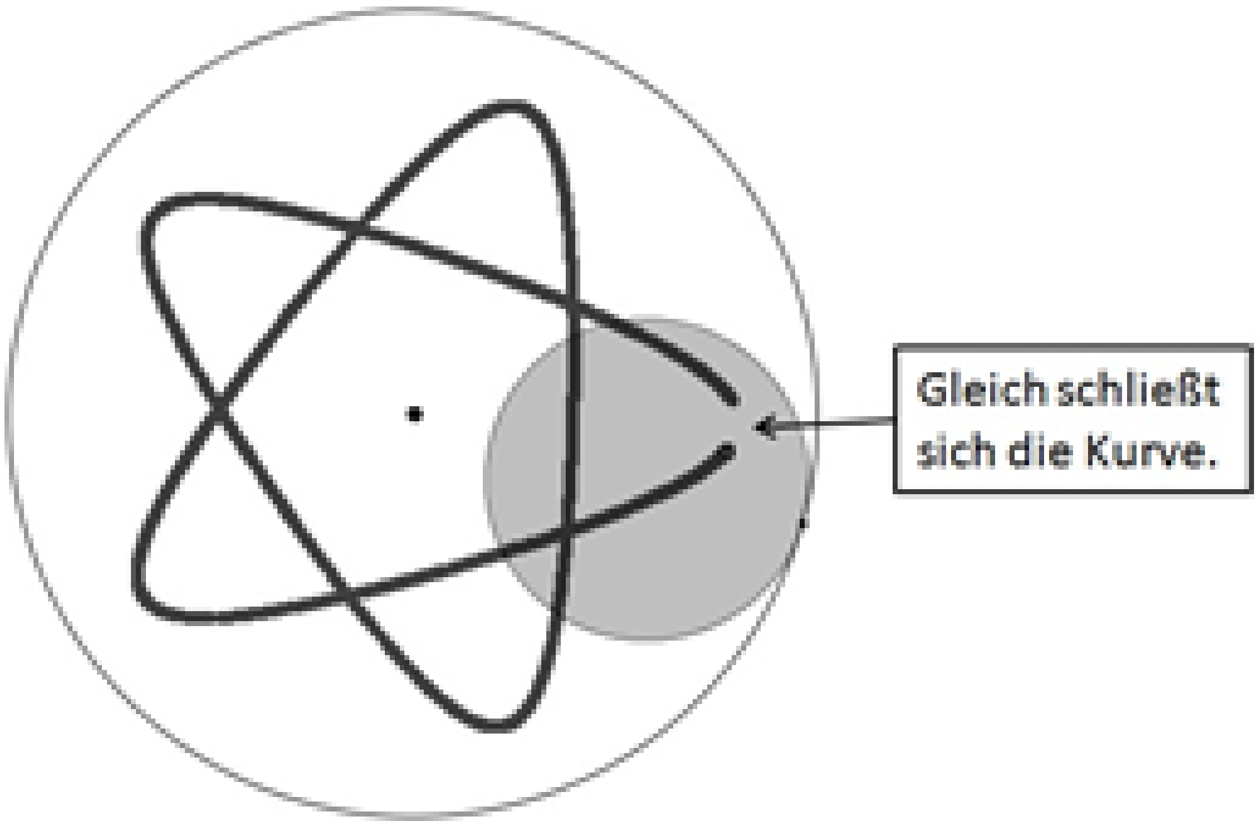
Rainer Kaenders

Am Spirographen Mathematik erleben

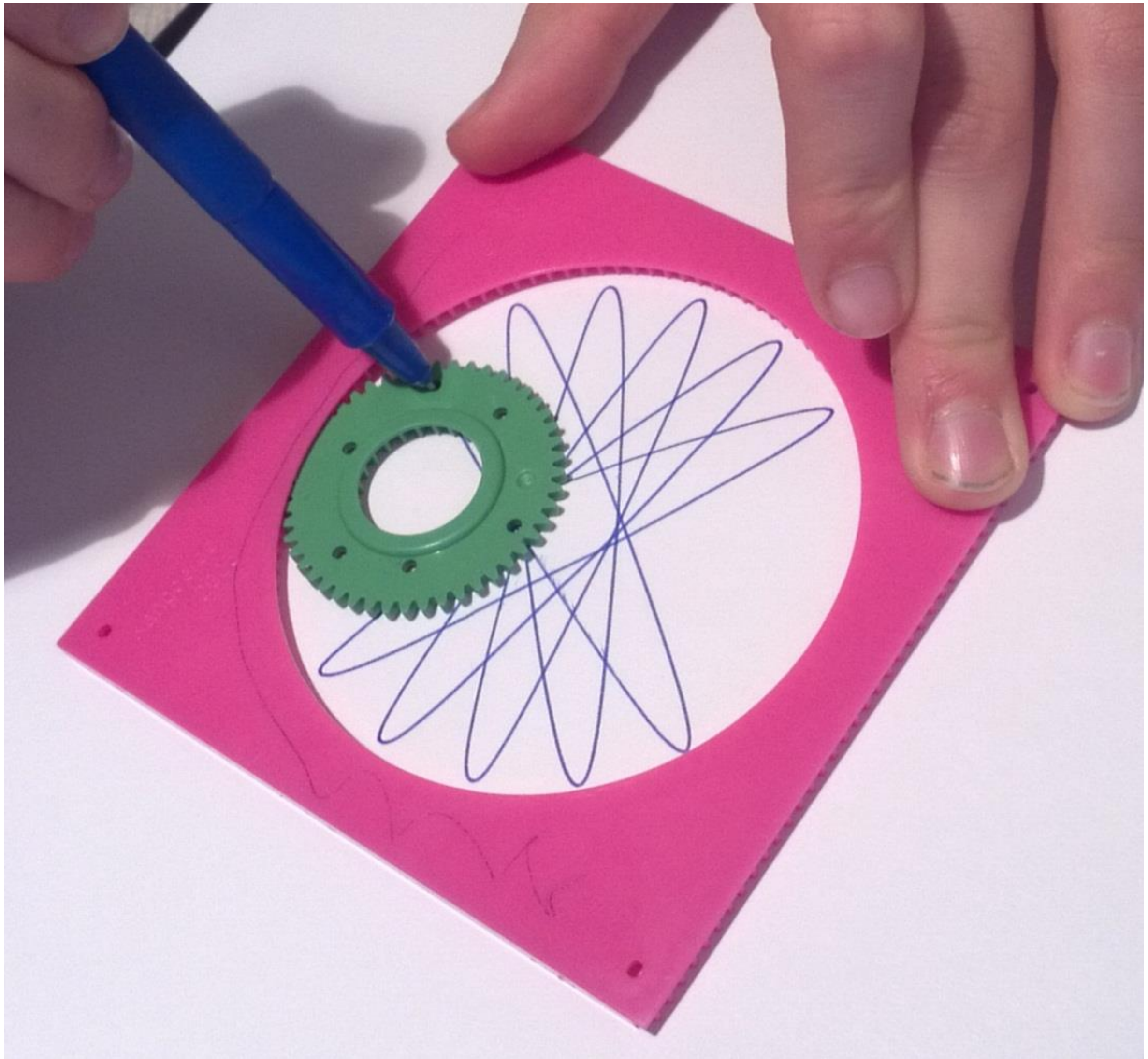
GDM Jahrestagung Münster 2013

Am Spirographen Mathematik erleben

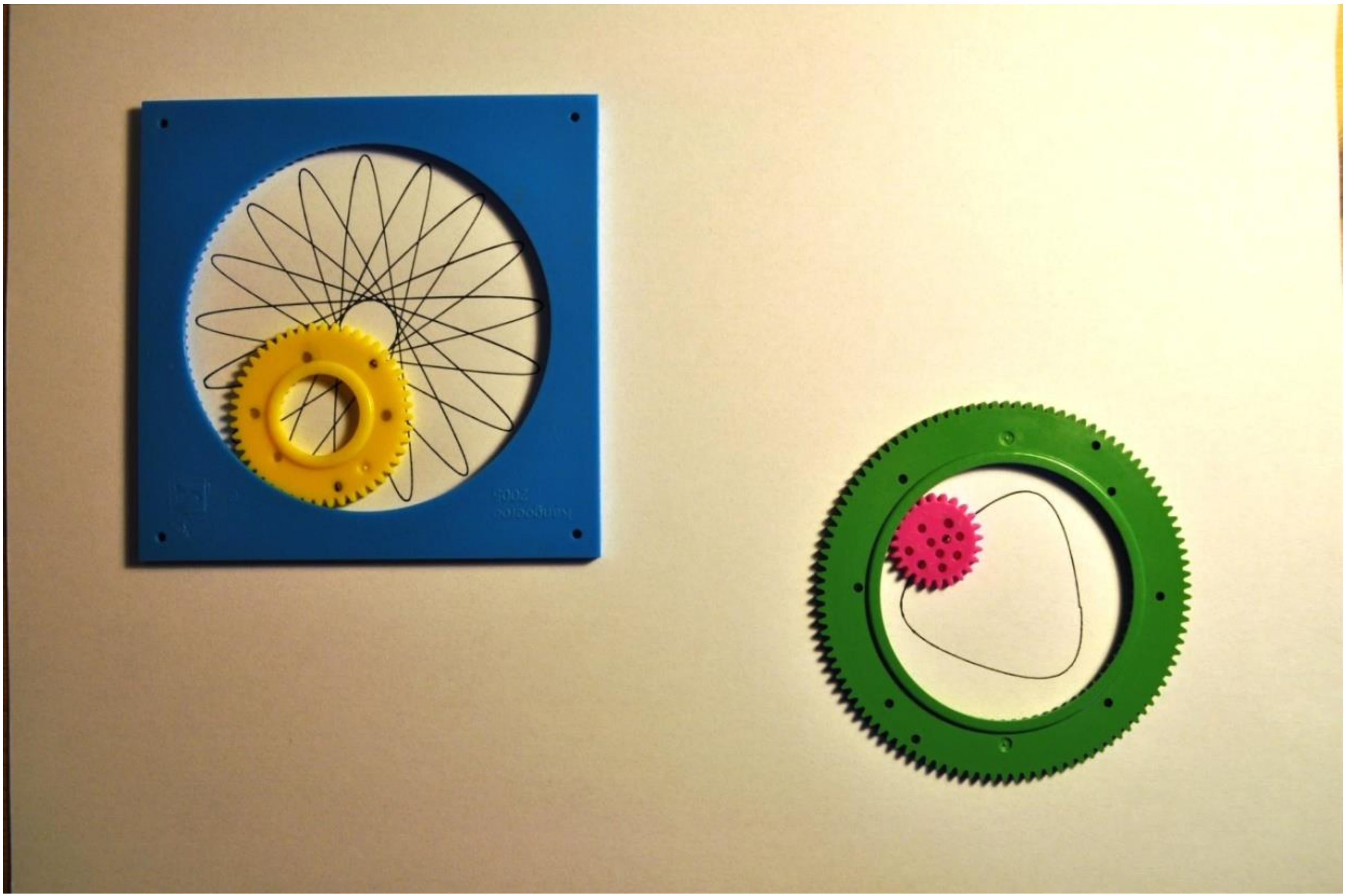
1 ZEICHNEN, ZÄHLEN, SPRECHEN
2 BILDUNG UND EROS
3 REICHE UND ARME KONTEXTE
4 BEZIEHUNGSHALTIGKEIT


Gleich schließt
sich die Kurve.

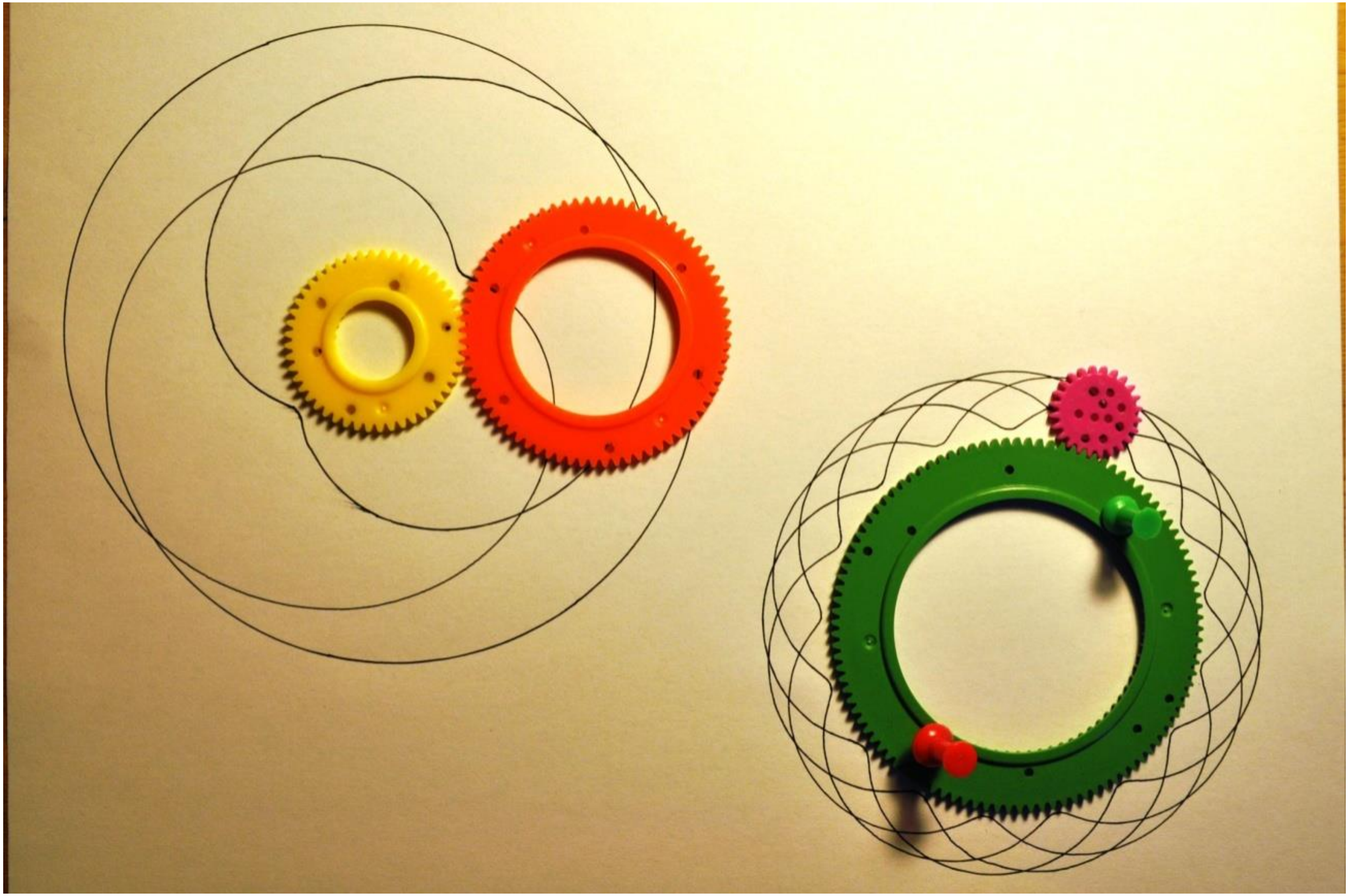
Zeichnen, zählen und darüber reden



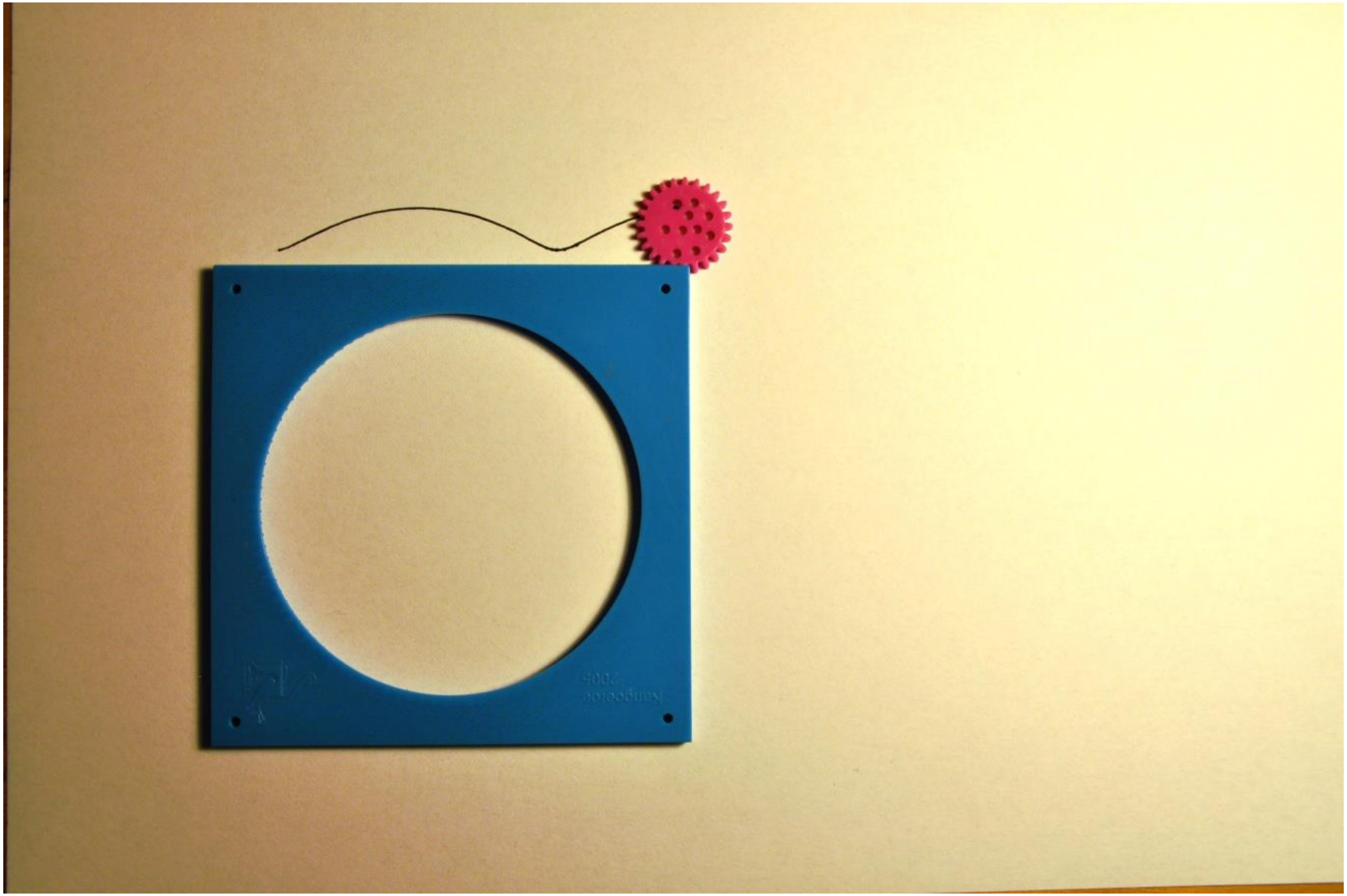
Arten des Abrollens



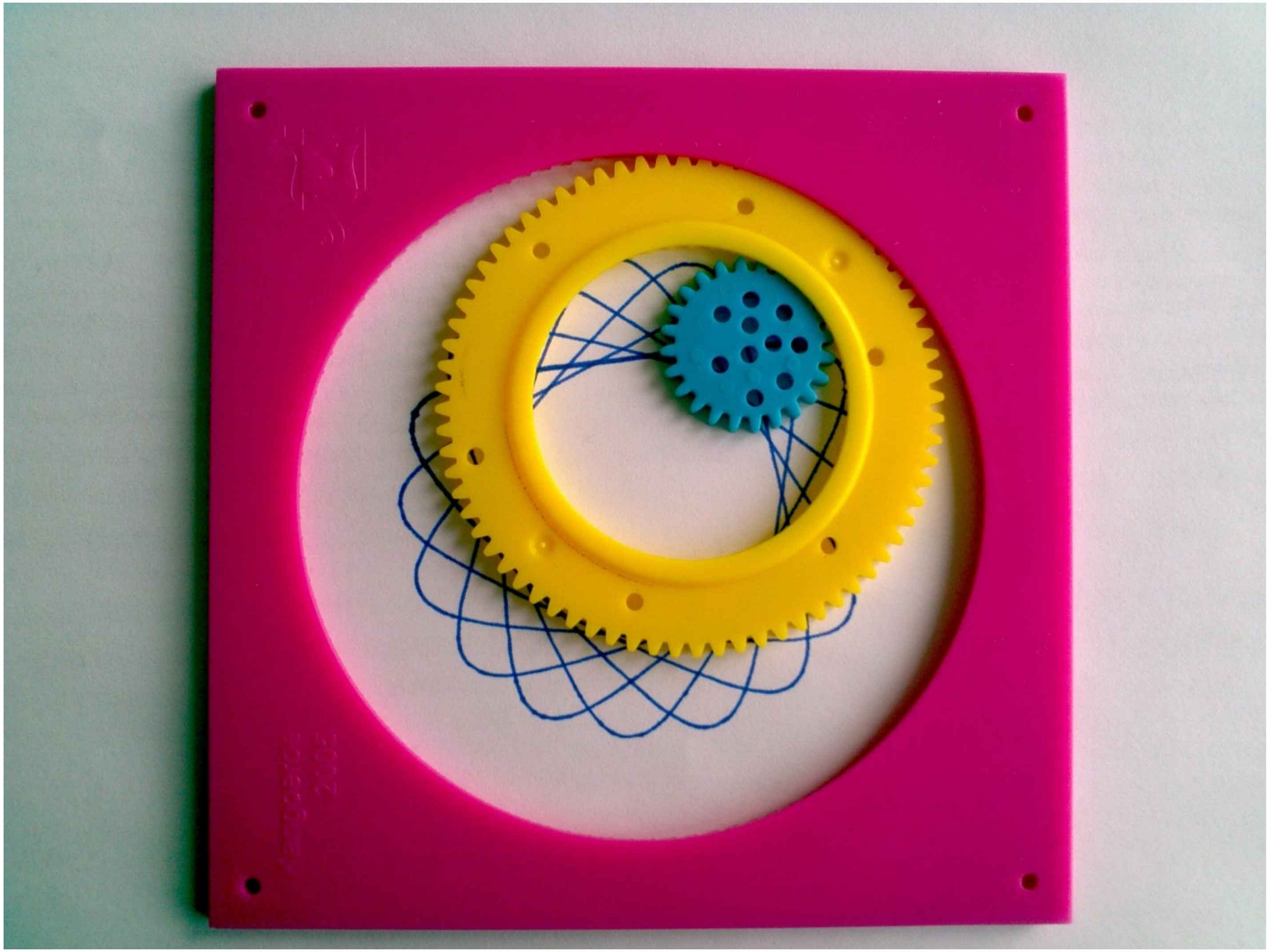
Arten des Abrollens



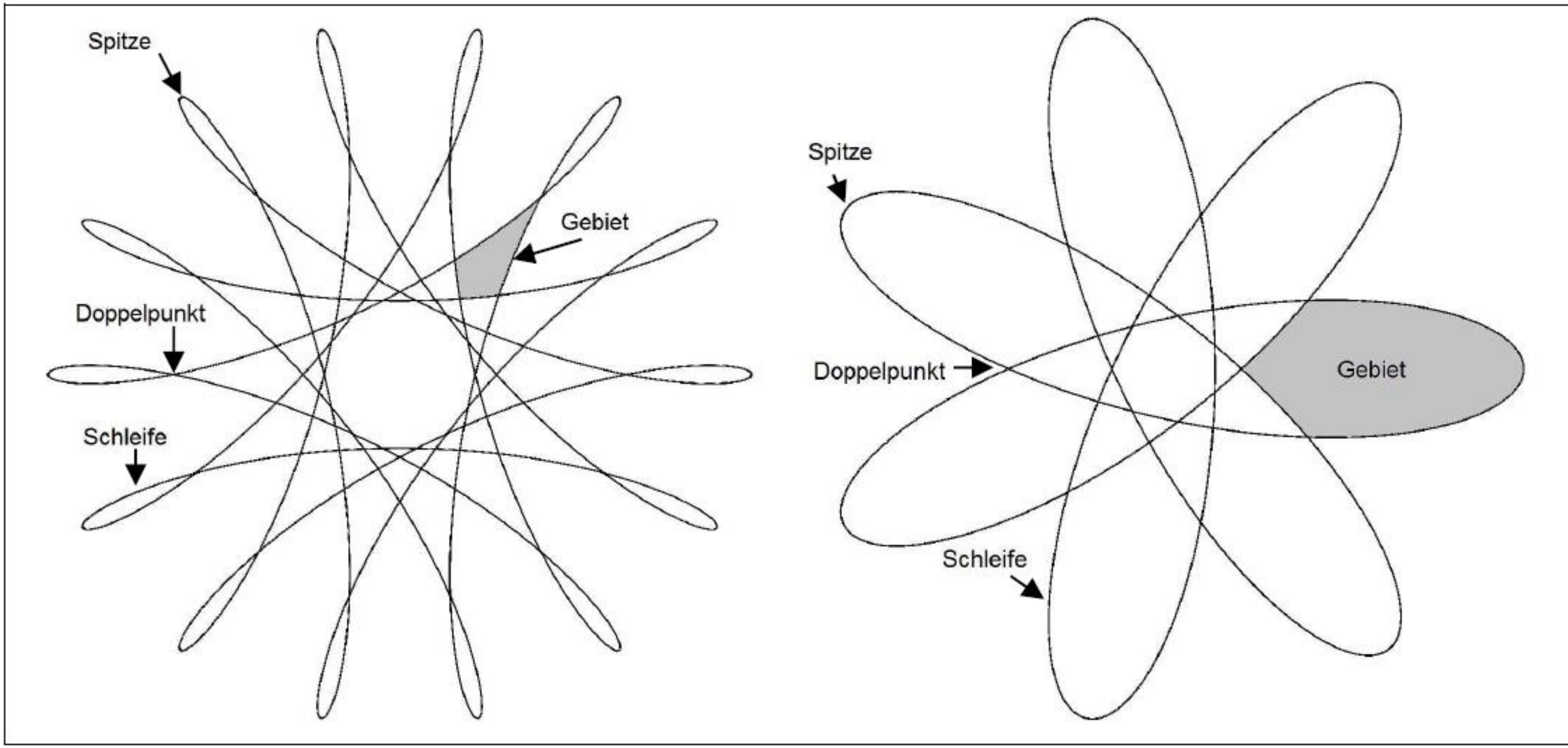
Arten des Abrollens



Trirograaf

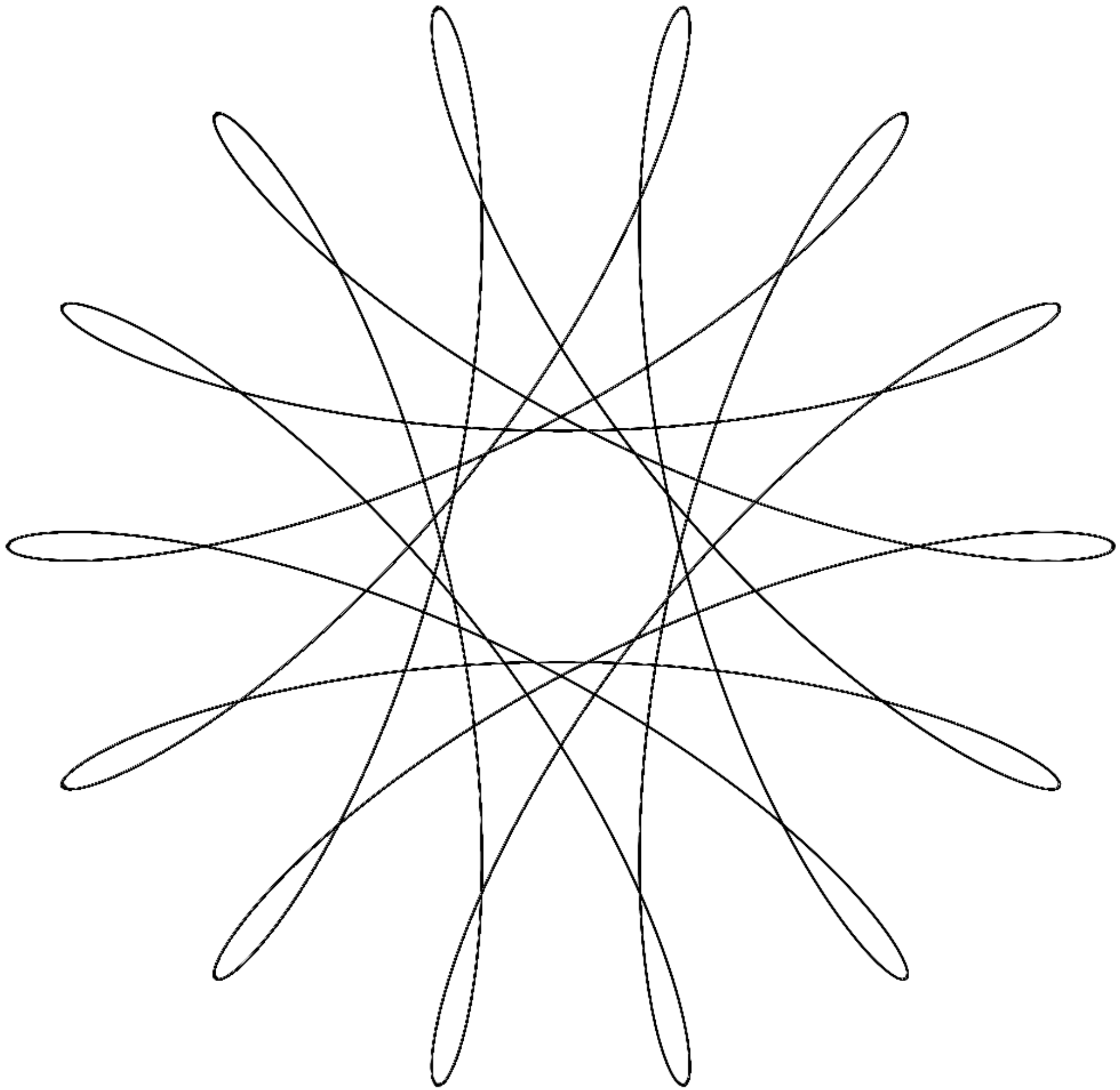


Spirographensprache

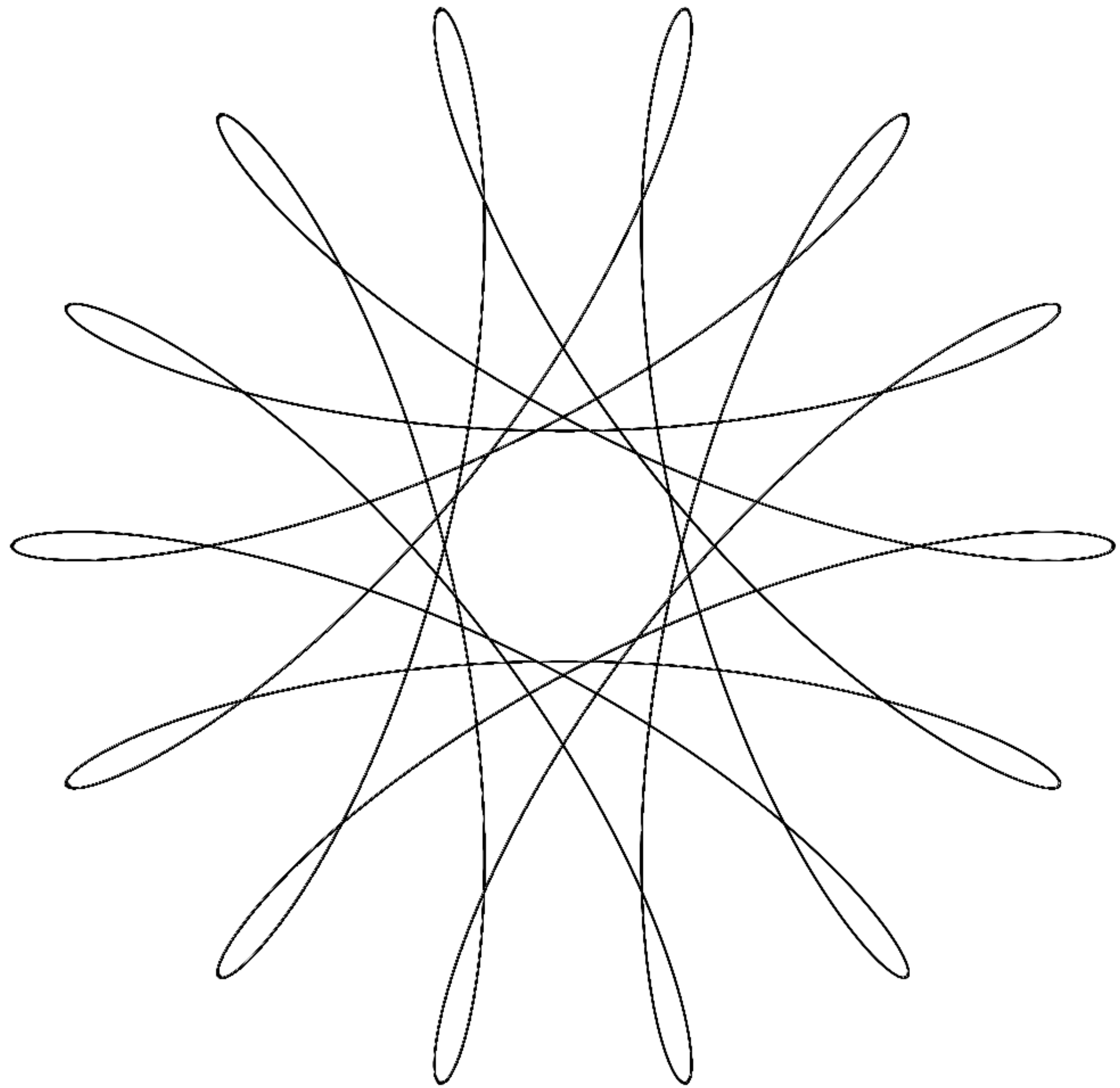


Umlauf, Umdrehung, …

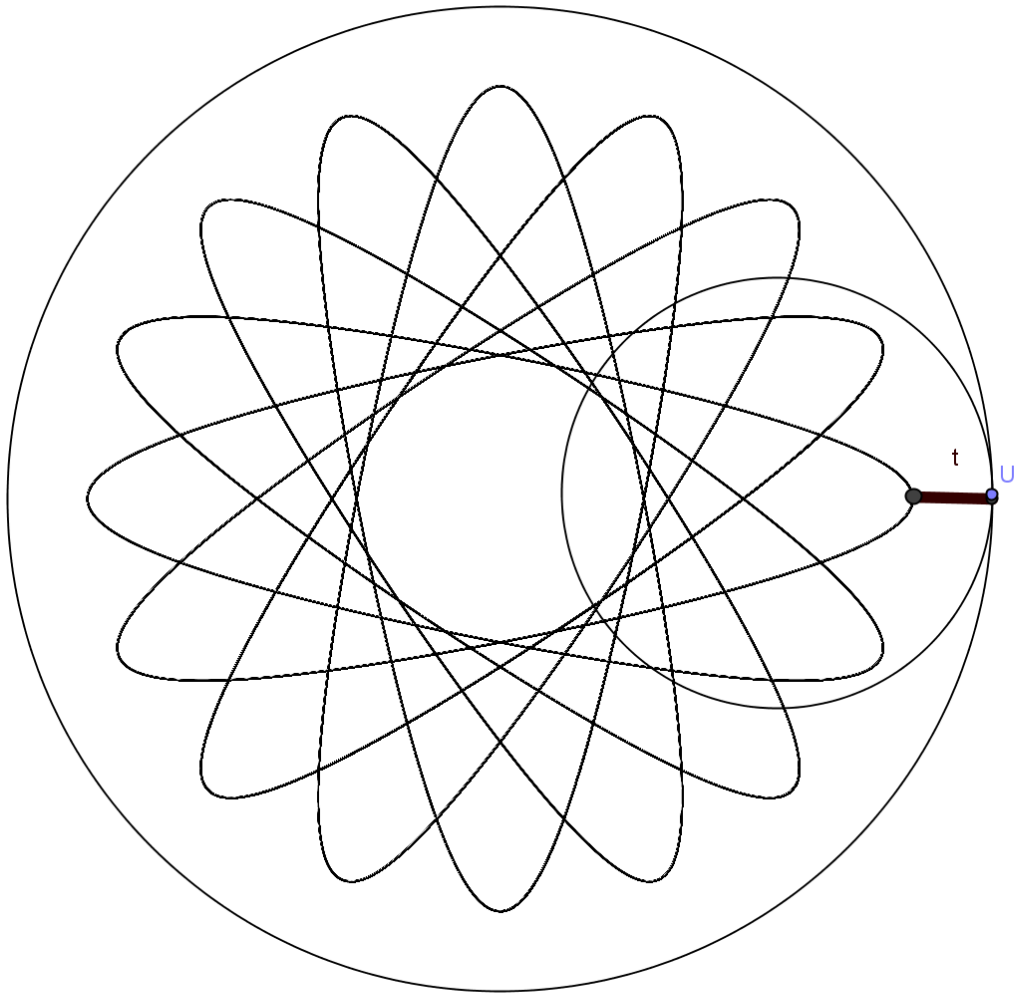
Zählen



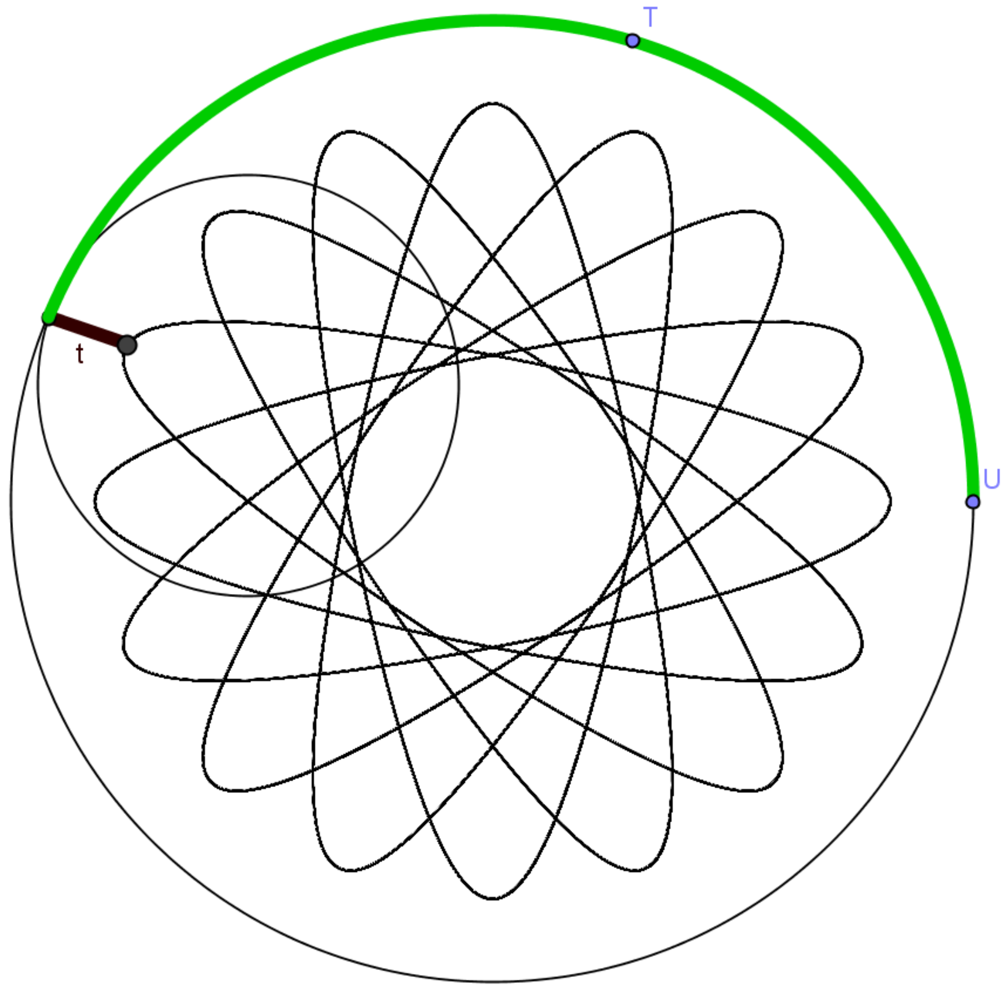
n und k gegeben…



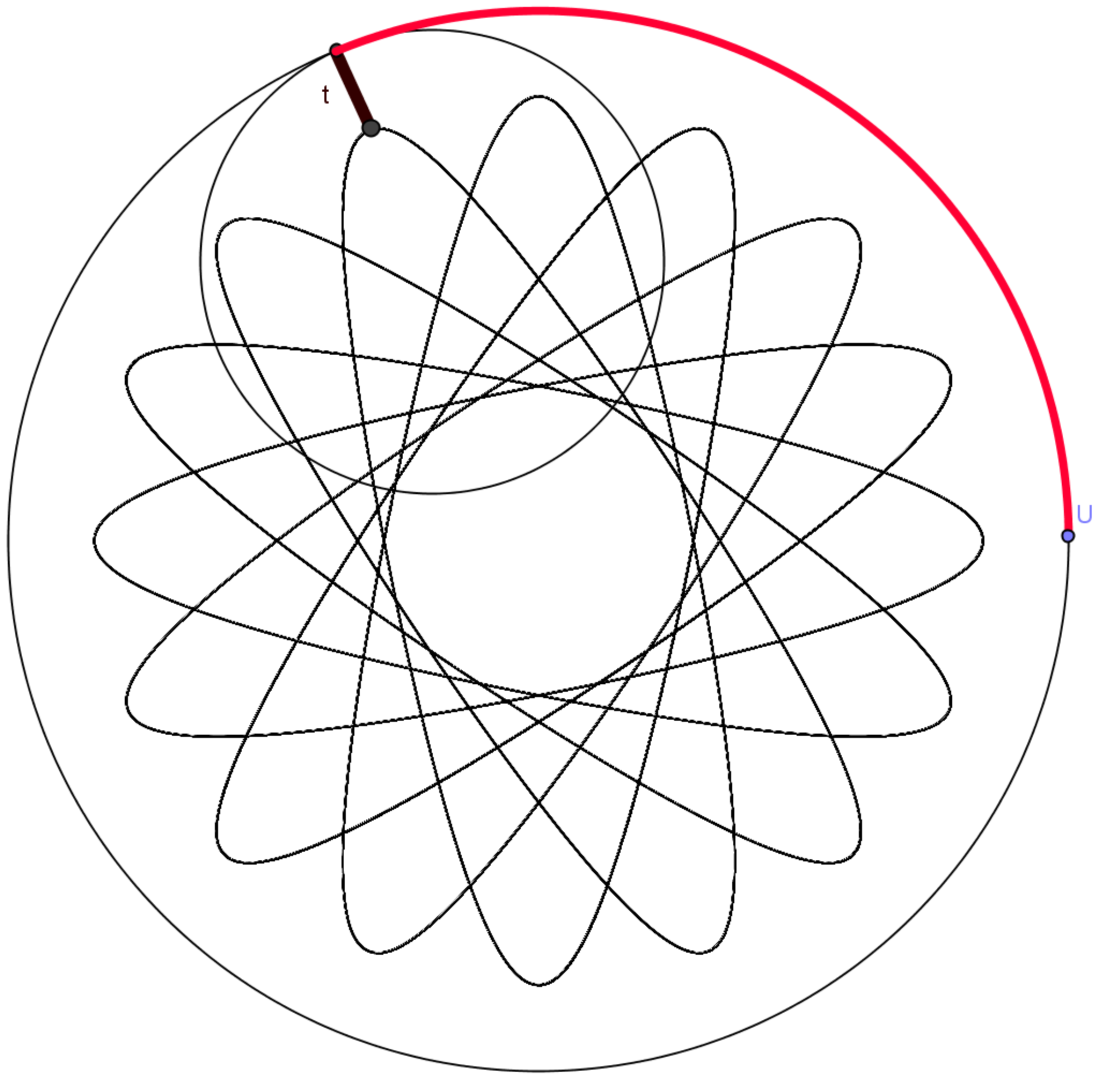
Rechnen mit dem Spirographen



Rechnen mit dem Spirographen



Teilen mit Rest



ggT linear kombinieren

- n Anzahl Zähne großes Rad
- k Anzahl Zähne kleines Rad
- Oder euklidischen Algorithmus durchführen:

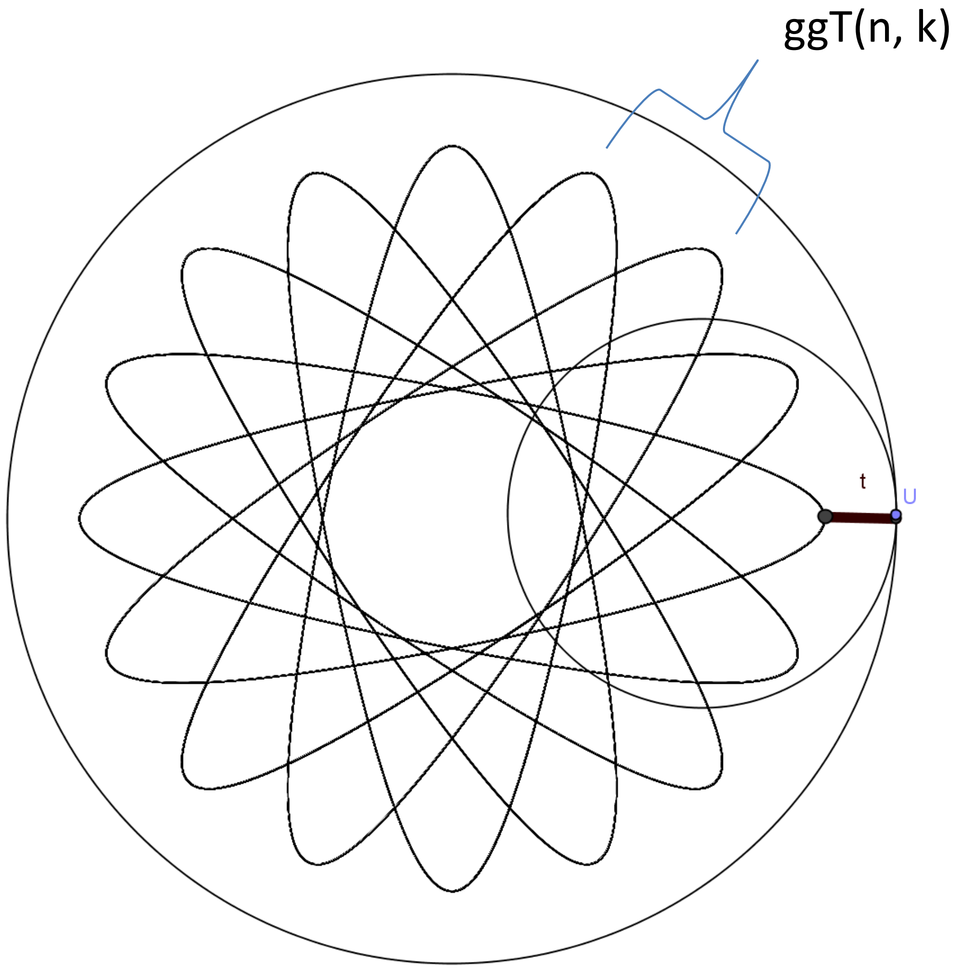
  Suche, bis auf Vielfache von n, die kleinste Zahl

  $$y \cdot k.$$
- Suche die kleinste Möglichkeit für den Ausdruck

  $$y \cdot k - x \cdot n.$$

  mit x, y ganze Zahlen. Das ist der ggT.

Rechnen mit dem Spirographen



n=16
k=7

kgV(n, k) ist die minimale Zahl von Zähnen, die abgerollt werden müssen bevor sich die Kurve schließt.

$$Abstand\ von\ benachbarten\ Spitzen = ggT(a, b)$$

$$= \frac{a}{Anzahl\ Spitzen} = {}^{a}\!\Big/\!\frac{kgV(a,b)}{b} = \frac{ab}{kgV(a,b)}$$

Kurven raten

Großes Rad **innen *n = 28*** Zähne,

kleines Rad **außen *k = 8*** Zähne.

Über wie viele Zähne ***z*** muss abgerollt werden bis die **Kurve sich schließt**?

a. 8

b. 28

c. 56

d. 224

Kurven raten

Großes Rad **innen** $n = 28$ Zähne,

kleines Rad **außen** $k = 8$ Zähne.

Über wie viele Zähne z muss abgerollt werden bis die **Kurve sich schließt**?

Antwort **c**!

$z = 56$ Zähne, weil z = **kgV**$(8,28) = 56$ ist.

Kurven raten

Großes Rad **innen** ***n* = 28** Zähne,

kleines Rad **außen** ***k* = 8** Zähne.

… wie viele Spitzen ***s*** hat die Kurve?

a. 7

b. 8

c. 14

d. 28

Kurven raten

Großes Rad **innen** ***n = 28*** Zähne,

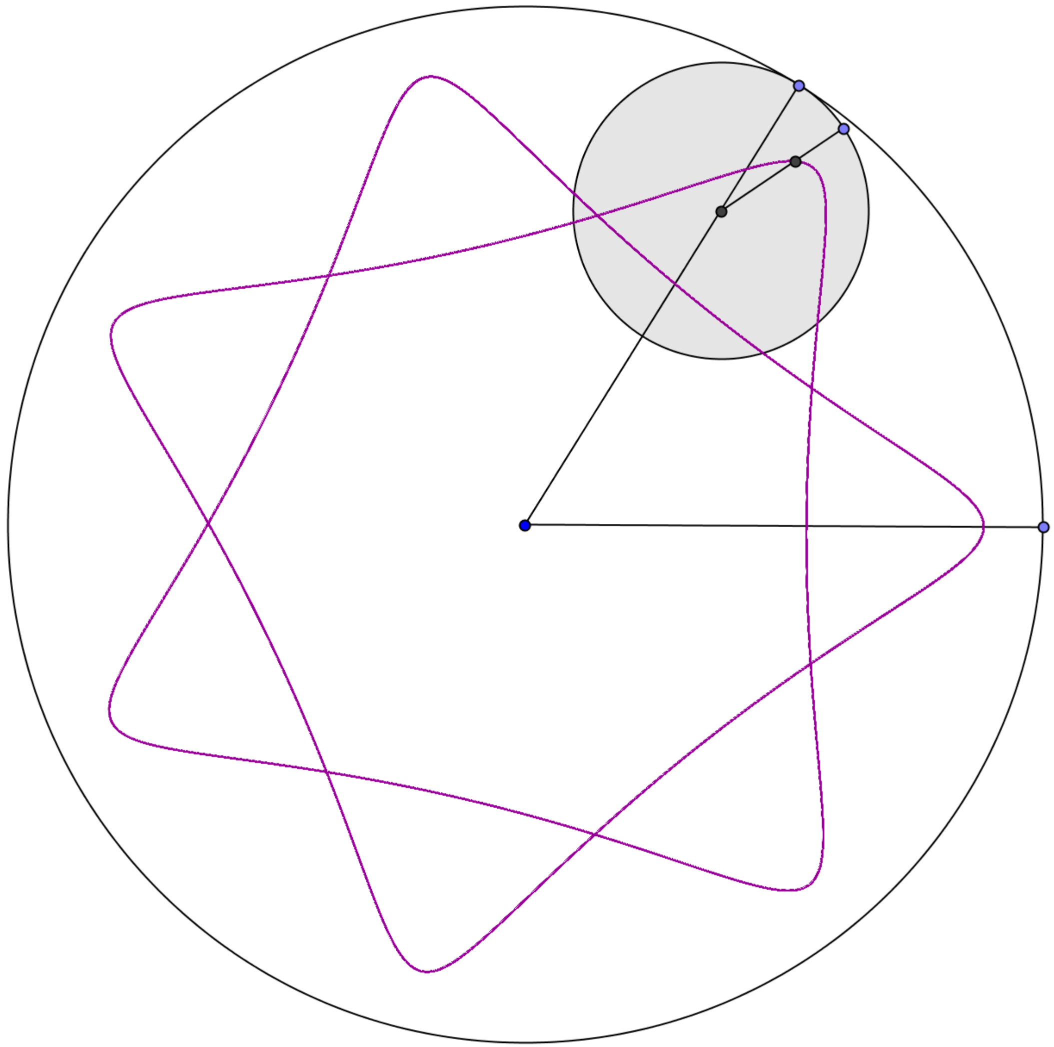
kleines Rad **außen** ***k = 8*** Zähne.

… wie viele Spitzen ***s*** hat die Kurve?

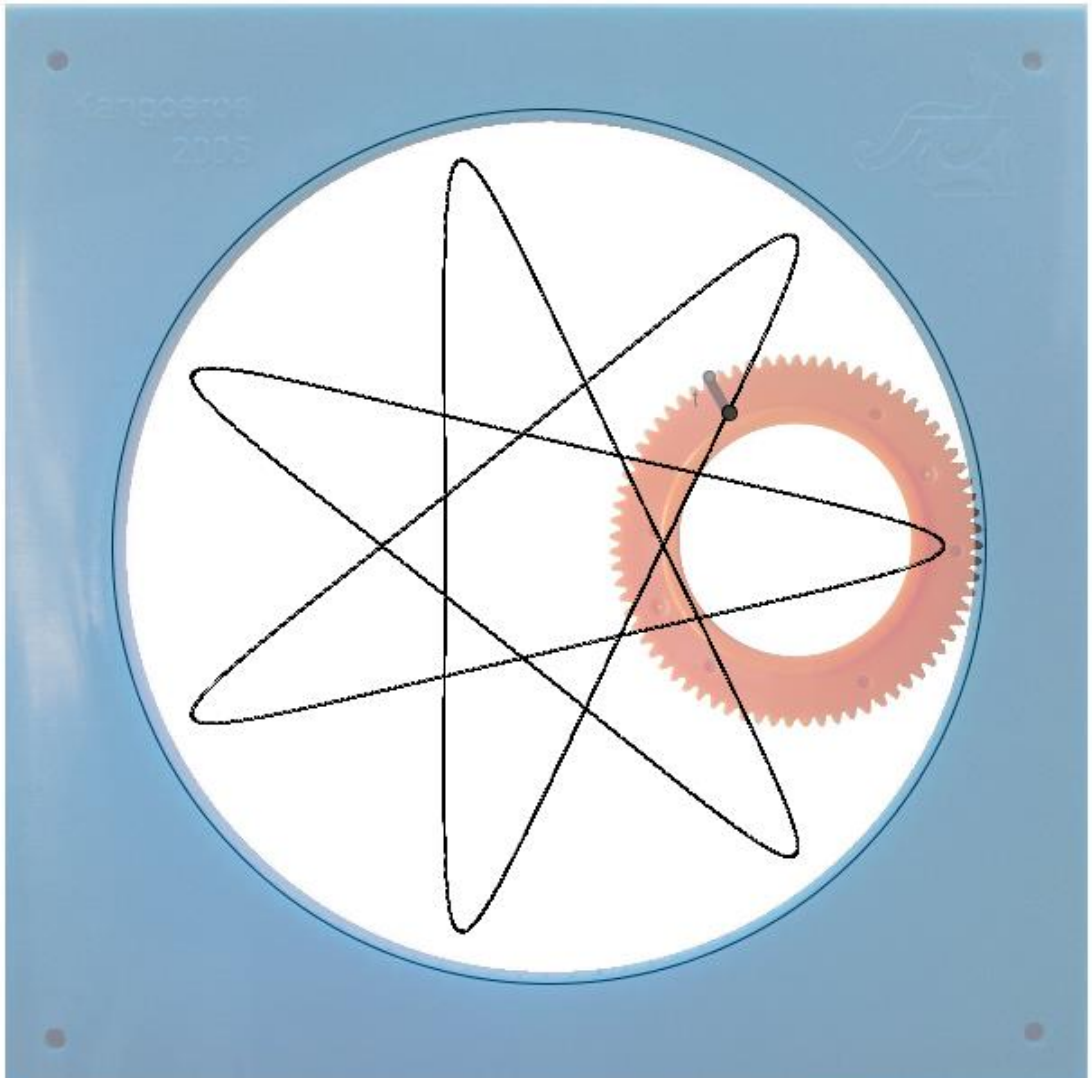
Antwoord **a**!

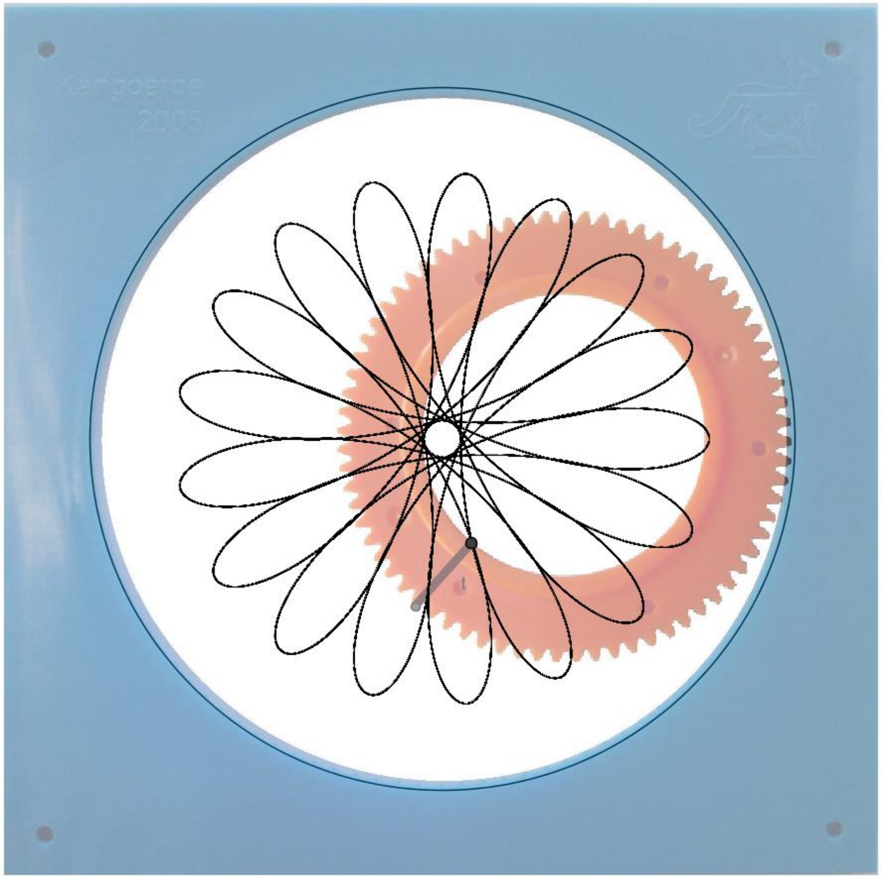
s = ***7*** Spitzen, da ***s*** = ***z : k*** = ***56 : 8*** = ***7*** ist.

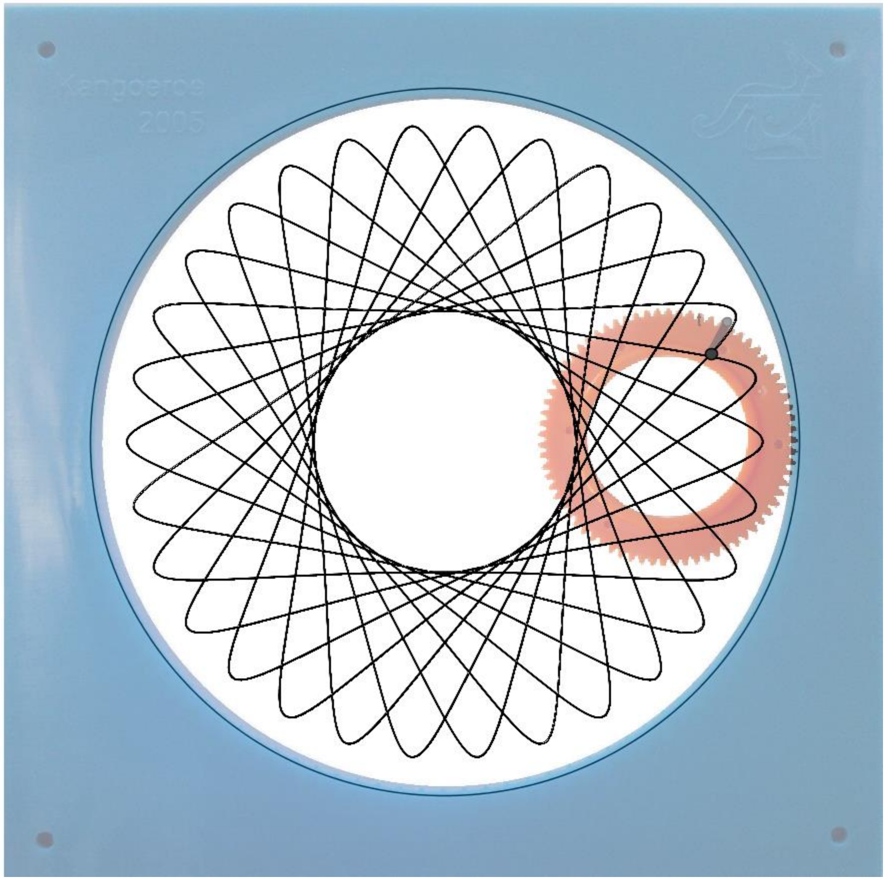
Stimmt!



Erfahrung erweitern mit Werkzeugen

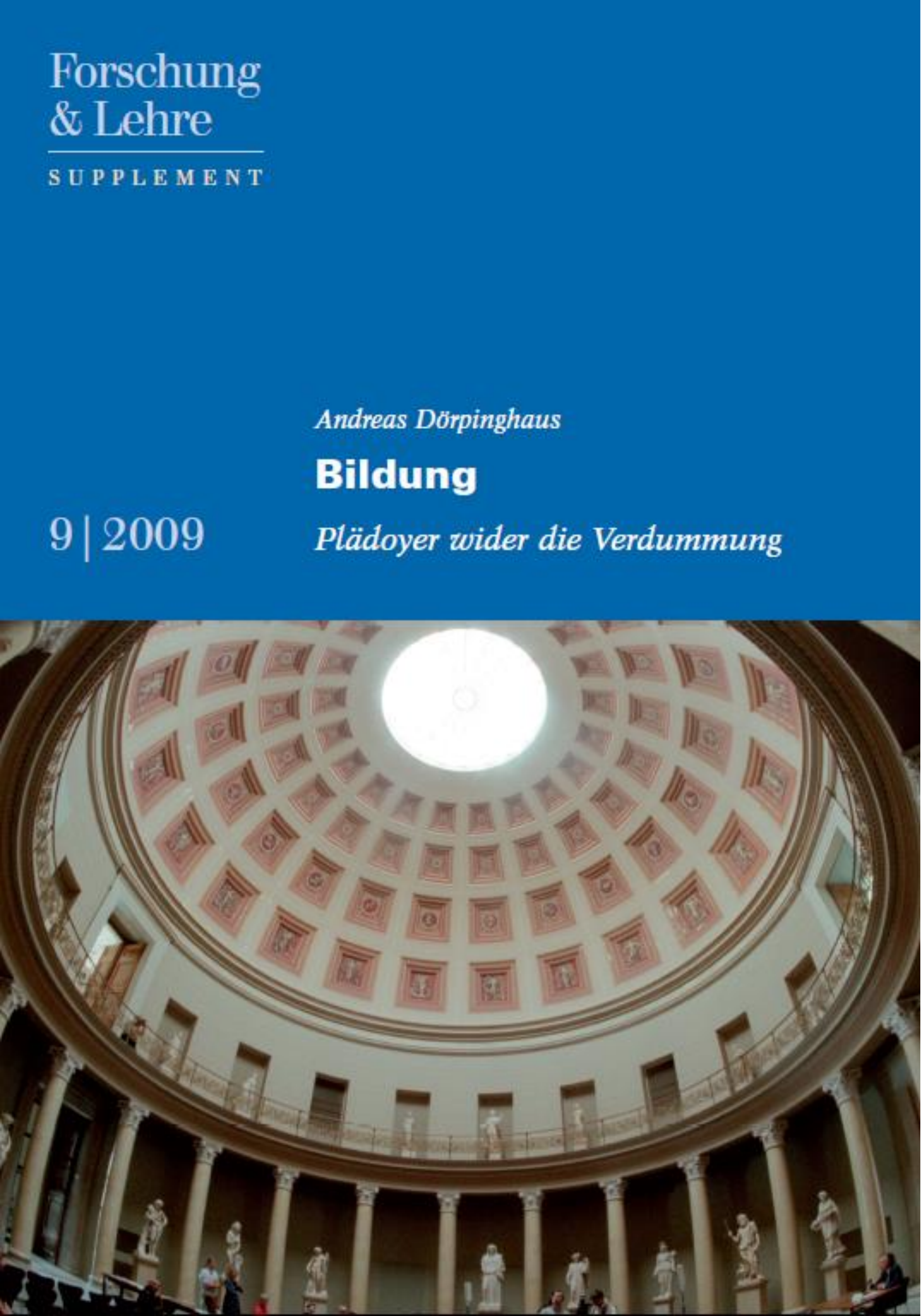






Am Spirographen Mathematik erleben

2 BILDUNG UND EROS



Prof. Dr. Andreas Dörpinghaus

Lehrstuhl für Allgemeine
Erziehungswissenschaft
Universität Würzburg

Bildung – Dörpinghaus

Die Lust und Liebe, das, was die Griechen *eros* nannten, die Bildung und Lernen selbst mit sich bringen, gerade in der Widerständigkeit einer Sache im Ringen um ihr Verstehen und in der Dauer der angestrengten Aufmerksamkeit auf sie, hat keiner so wunderbar wie der antike Philosoph Platon in seinem „Höhlengleichnis“ aus seinem Werk politeia illustriert. (…)

Das Höhlengleichnis beschreibt in Kürze einen Bildungsprozess, der in der Umwendung des Blicks besteht. Der Mensch wendet sich von einer Welt des Scheins, der Lüge und der Unmündigkeit ab und versucht stattdessen die Dinge selbst zu ergründen. Platon beschreibt dabei die Schmerzen, die mit dieser Veränderung nicht des Menschen, sondern seiner Sichtweise verbunden sind, die Beschwerlichkeit dieses Weges bis hin zur Eingewöhnung in diese andere Sicht auf die Menschen und ihre Welt.

Bildung- Dörpinghaus

Dieser Antrieb des Menschen wurzelt in seiner Neugierde und seinem Interesse, sich und die Welt verstehen zu wollen. Wir betreiben Wissenschaft und nehmen Anstrengungen im Denken auf uns aus Liebe (eros). Das mag in unseren modernen Ohren pathetisch und überzogen klingen, doch ist dieser Gedanke des eros lediglich eine alltagsgesättigte Antwort auf die Frage, warum wir bereit sind, freiwillig Dinge auf uns zu nehmen, die uns nicht im engen Sinne nutzen.

Dieser Eros, diese Lust auf Bildung, dieses Angemacht-werden-von etwas und Nicht-mehr-ablassen-können, weil es uns beschäftigt und uns keine Ruhe lässt, ist, und das ist entscheidend für das Verständnis des eros, eben kein innerer Trieb des Menschen, wie man zunächst und durch psychologische Denkmuster geschult meinen könnte. Nein, er ist eine unbändige Neugierde, die sich an den Dingen entzündet und für deren Verständnis man all die Mühen auf sich nimmt.

Hintergrund

- *„Sterne, Blumen, Zacken, stumpf und scharf – das alles kann der Spirograph“*

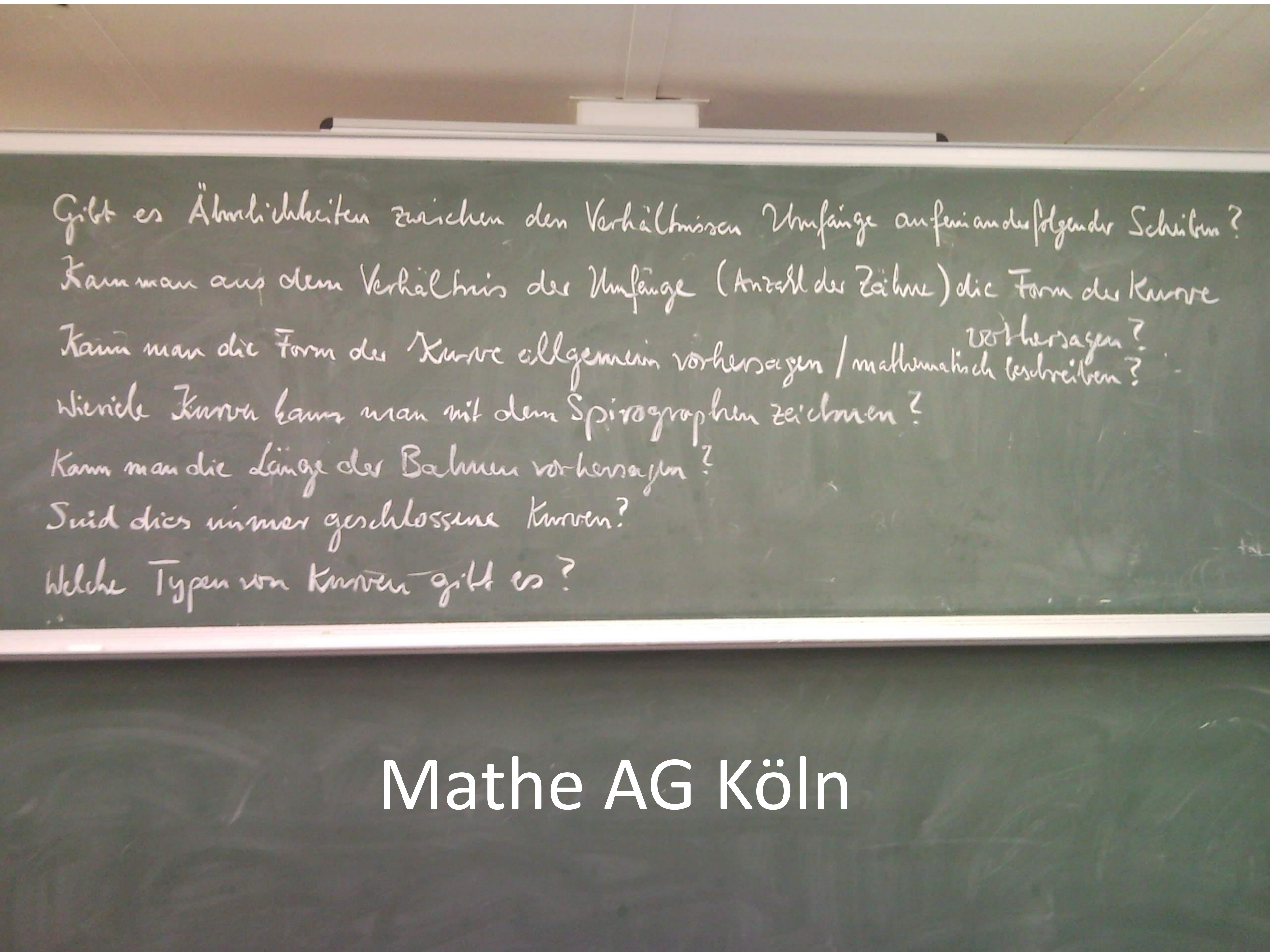
  KölnerKinderUni 2011 mit den Schülerinnen Dilay, Ira, Kristin begeleitet Mareike Mink, Tommy Schmidt
- Überlegungen mit Stephan Berendonk, Dr. Leon van den Broek (Examensarbeiten und Känguru Camp Eberwalde)
- Stephan Berendonk & Leon Van den Broek
  SpiroSporen.
  Zebra-Boek Serie, Utrecht: Epsilon-Uitgaven.
- **Freude an Mathematik – am Beispiel des Spirographen**

  Beitrag im Band *Mathematikdidaktik* in der Reihe „Lehren lernen“,
  Hrsg. Helmut Linneweber-Lammerskitten
- Nationale Wiskundedagen 2013 zum Thema:

  Erleben von Mathematik (ca. 50 Teilnehmer)

Der Erfinder war 1965 Denys Fisher, der das Spielzeug erstmals auf der Nürnberger Spielwarenmesse vorführte. Doch bereits vor Denys Fisher gab es einen Erfinder, welcher um das Jahr 1885 einen Spiralenzeichner patentieren ließ: Bruno Abdank-Abakanowicz. Wikipedia

Aufgabe: Stellen Sie Fragen zum Spirographen!



Mathe AG Köln

Mathematiklehrer NWD

- Doppelpunkte mit gleichem Abstand zum Zentrum liegen auf Kreisen. Was ist das Verhältnis der Radien dieser Kreise?
- Wie viele Farben braucht man minimal, so dass benachbarte Gebiete nicht dieselbe Farbe haben?
- Wie viele verschiedene Kombinationen sind mit 5 Scheiben mit jeweils einem Loch möglich?

Mathematiklehrer NWD

- Wie lang ist die Kurve?
- Radius des inneren und äußeren Begrenzungskreises?
- Wie viele Gebiete gibt es?
- Was ist die Verbindung zu türkischen Knoten?
- Verbindung mit Planetenbahnen?
- Was ist die Bandbreite?
- Kann man die Figur als Parameterkurve beschreiben?

Mathematiklehrer NWD

- Gebiete und Schlaufen werden eingefärbt. Was bleibt weiß?
- Flächeninhalt der Gebiete?
- Radius des Kreises, der die Innenseite berührt?
- Auf wie viele Weisen kann die Figur eingefärbt werden?
- Gibt es einen dreidimensionalen Spirographen?
- Was ist die Parametrisierung einer solchen Kurve?
- Wie findet man den Radius des umhüllenden Kreises der Spitzen?
- Untersuche die eindimensionale Version (entlang einer geraden Linie). Zum Beispiel zwei Trommeln mit verschiedenen Rhythmen.
- Was ist mit dem Innenkreis?

Mathematiklehrer NWD

- Kann man im Vorhinein vorhersagen, wie groß der Radius des Innenkreises sein wird?
- Wie bekommt man ein Dreieck als innere Form?
- Gibt es nur Doppelpunkte oder auch Schnittpunkte mehrerer Linien?
- Wann erhält man nur ein Gebiet?
- Ist die Anzahl der Spitzen immer eine Primzahl?
- Sind die Abstände von innen nach außen nach dem goldenen Schnitt?
- Wie verhalten Sich die Flächeninhalte der Gebiete?
- Wann gibt es eine Tangente in einem Punkt und wann nicht?
- Verhältnis der Anzahlen der Zähne und Abstände?

Mathematiklehrer NWD

- Wie viele verschiedene Gebiete gibt es?
- Verhältnisse der Flächeninhalte dieser Gebiete?
- Wie grenzen die Gebiete aneinander? (Wie viele verschiedene Farben muss man gebrauchen, wenn man ähnlichen Gebieten dieselbe Farbe und benachbarten Gebieten unterschiedliche Farben geben will? 2?
- Wann genau entstehen Doppelpunkte?
- Welchen Einfluss hat der Abstand des Stifts auf die Anzahl der Schnittpunkte bei gleichem Verhältnis der Zähne?

Mathematiklehrer NWD

- Sind 2 Farben genug?
- Wie viele Gebietchen gibt es?
- Wie viele ähnliche Gebietchen gibt es? Wie viele Sorten?
- Bei welchen Verhältnissen bekommt man ‚Zurückschleifen'?
- … Wendepunkte?
- Bekommt man beim Verhältnis 2:1 eine Ellipse?

Am Spirographen Mathematatik erleben

3 REICHE UND ARME KONTEXTE

STRUCTURE AND STRUCTURES

In mathematics the relationship between form and content is reflected by that between something *having* or *being* a structure.

Structuring is a means of organising phenomena, physical and mathematical, and even mathematics as a whole.

HF, China Lectures, p. 20.

Structuring rich context mathematically

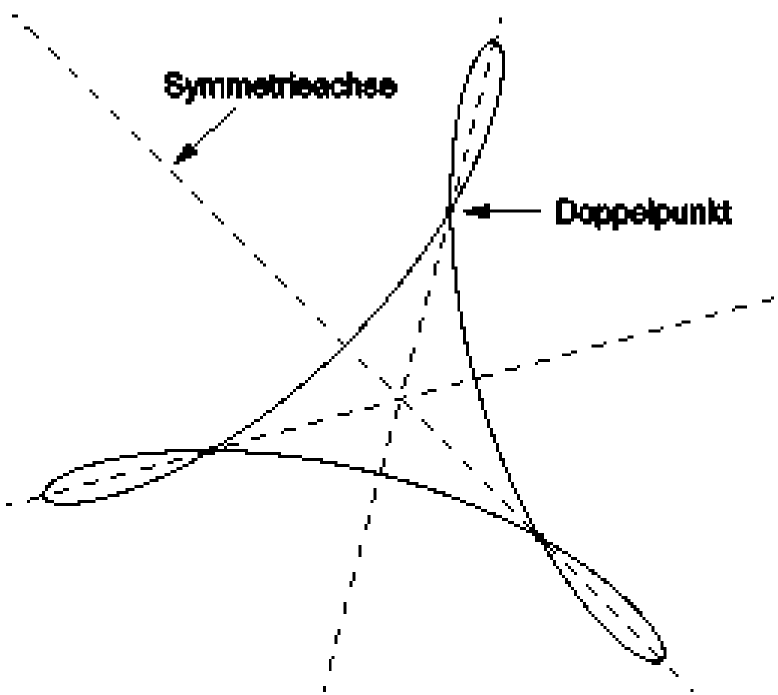
Bourbaki's hierarchy is primarily oriented *from poorer to richer* structures and – accidentally, and certainly not as a matter of principle – from smaller to larger ones. As a matter of fact this is indeed the most natural strategy for a systematic build-up: from poorer to richer. It starts, as it were, with a *tabula rasa,* with that which lacks any structure, i.e. the clean set. But after all, how can rich structures be created from this poor start?

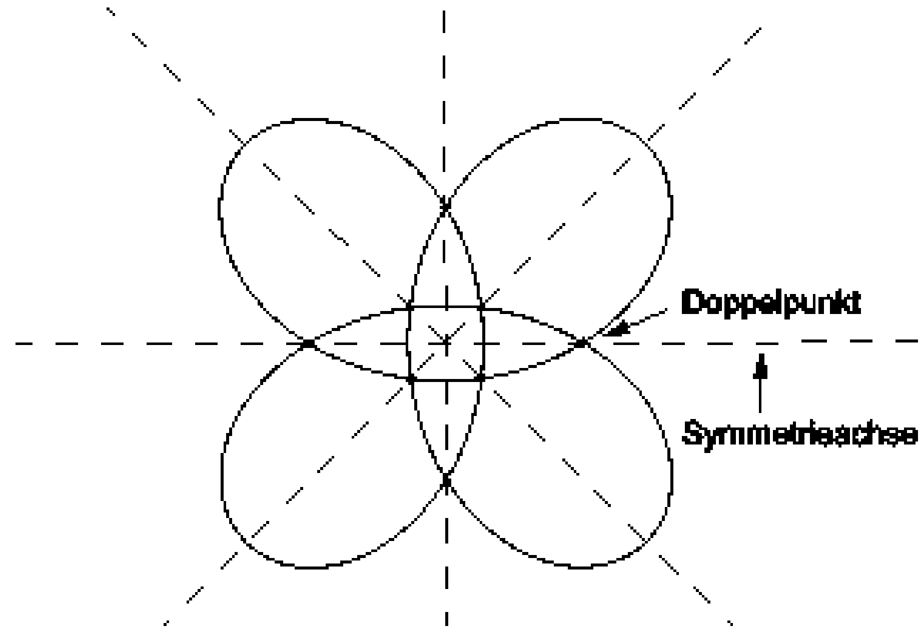
HF, China Lectures, p. 20.

Am Spirographen Mathematik erleben

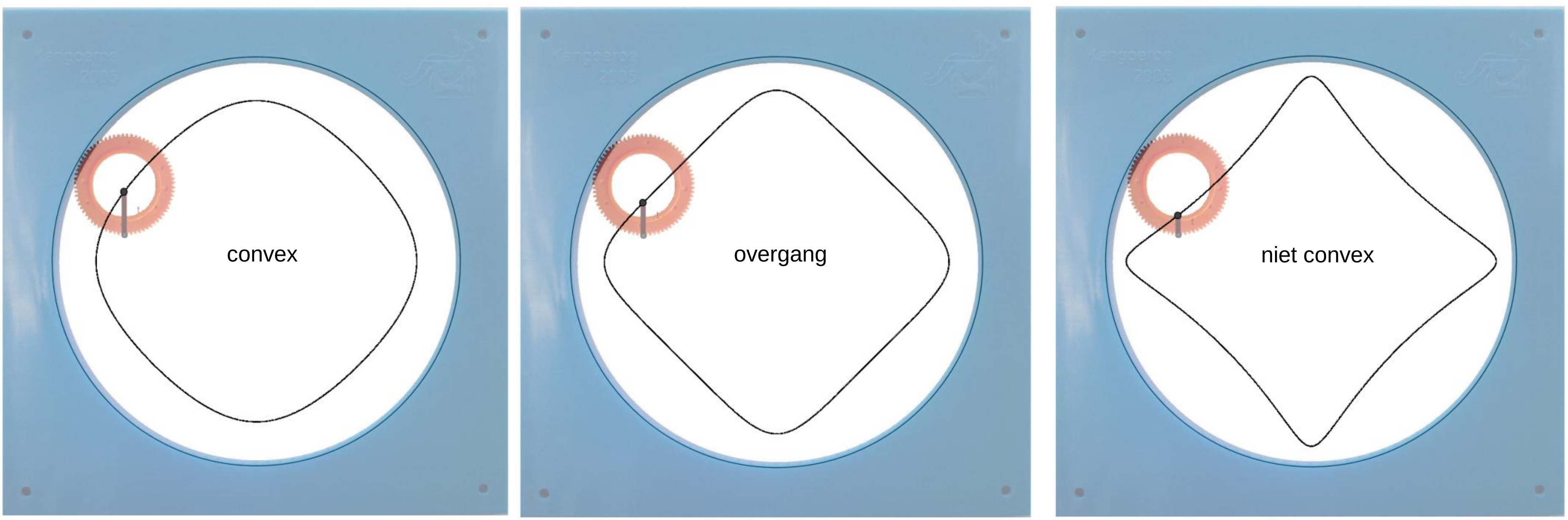
4 BEZIEHUNGSHALTIGKEIT

Symmetriegruppe: $D_{n/ggd(n,k)} = D_{kgv(n,k)/k}$



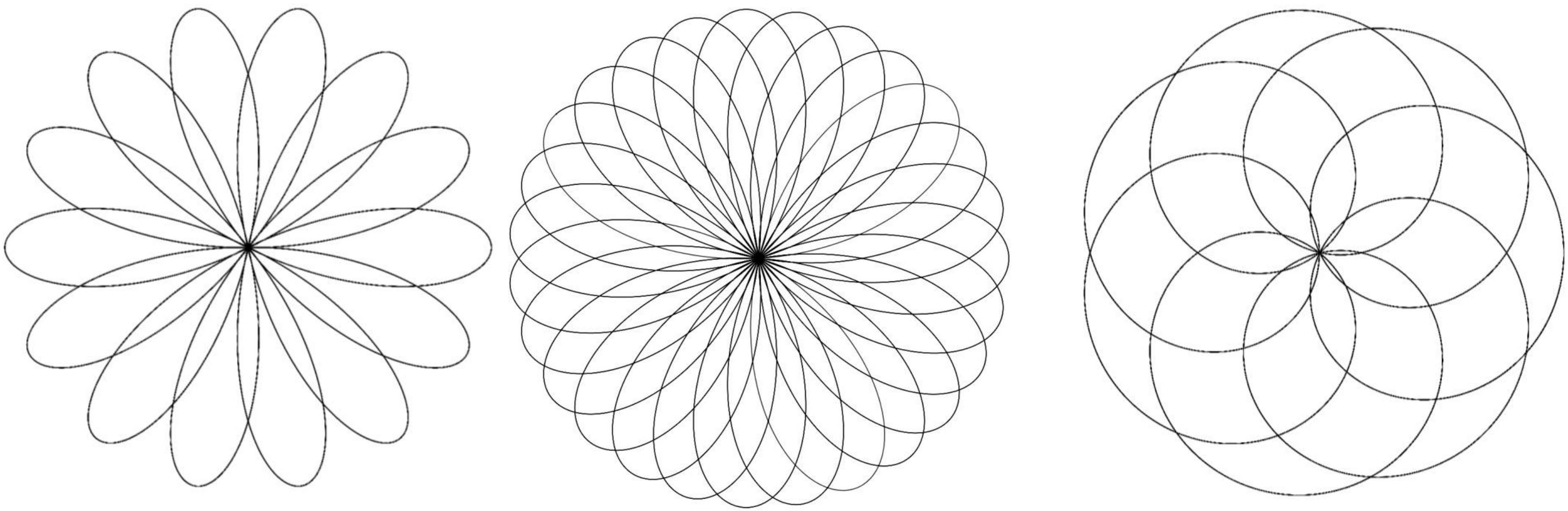


Konvex oder konkav ?



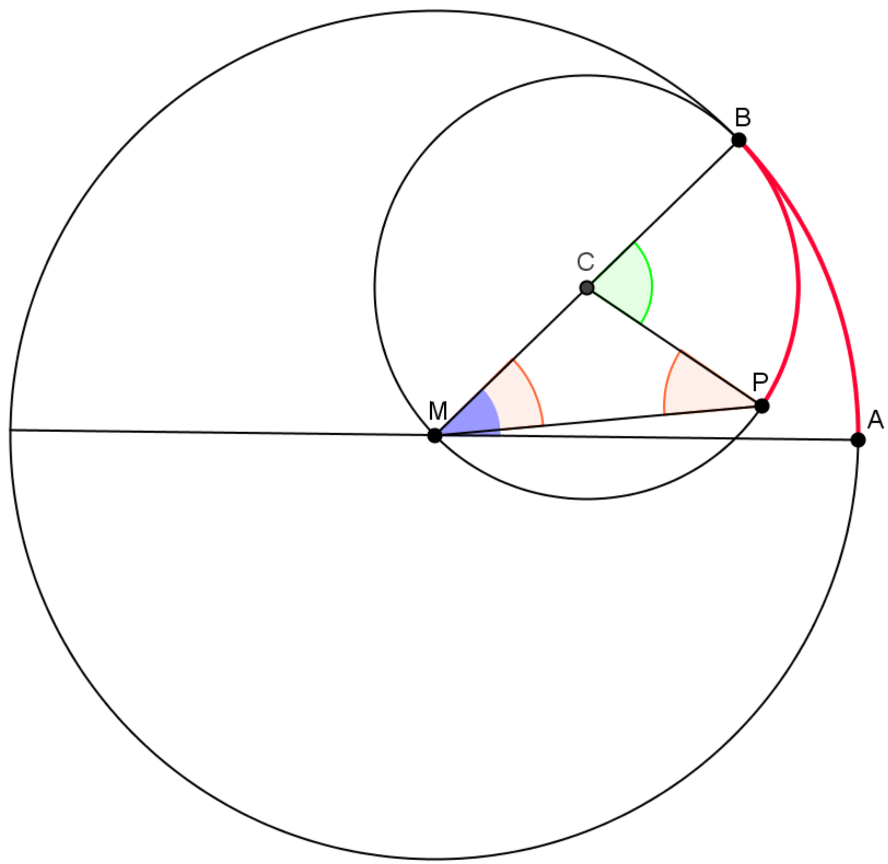
Idee: Leon van den Broek

Rosenkurven

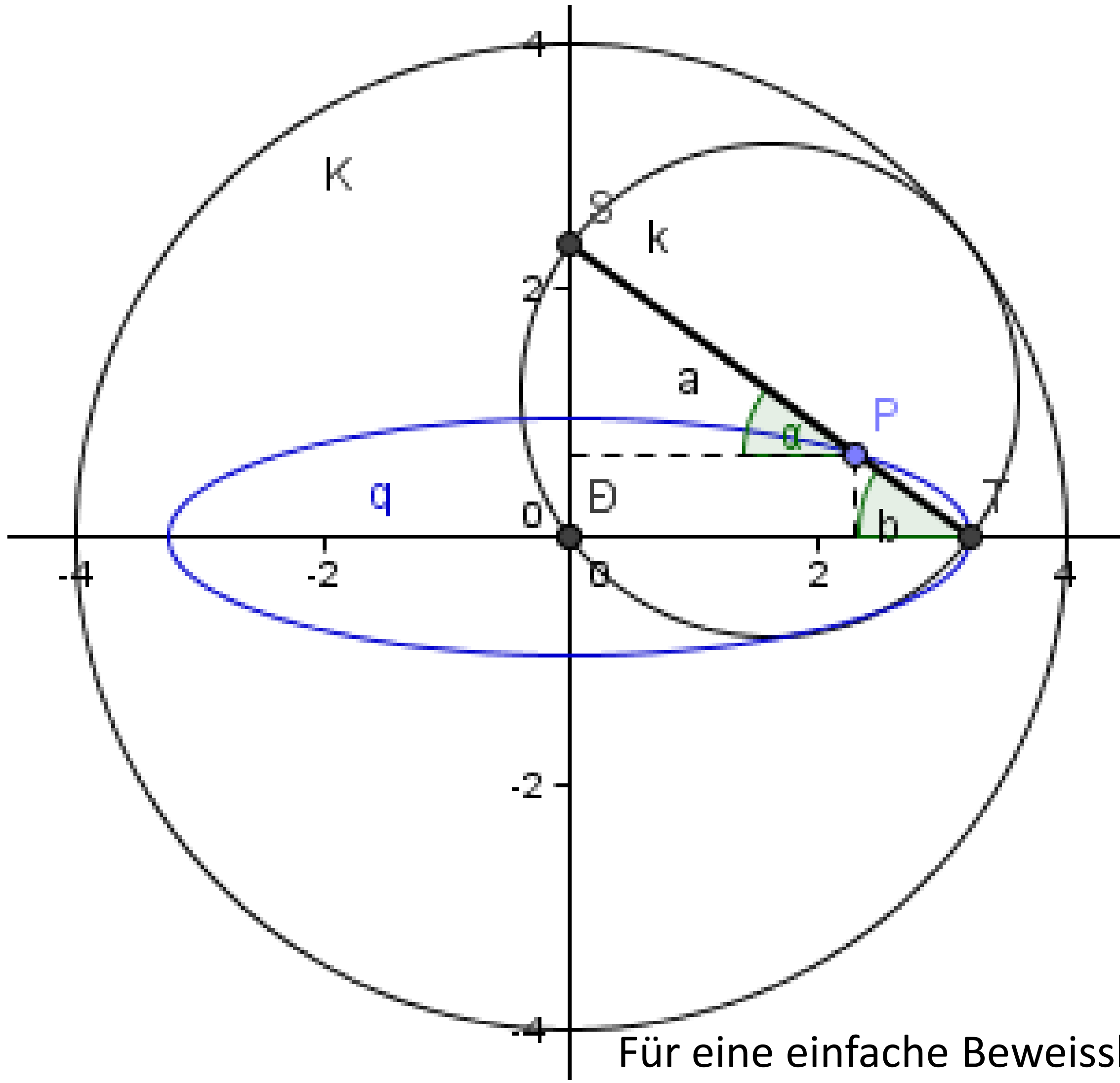


Eine gerade Linie zeichnen!

$R = 2r$

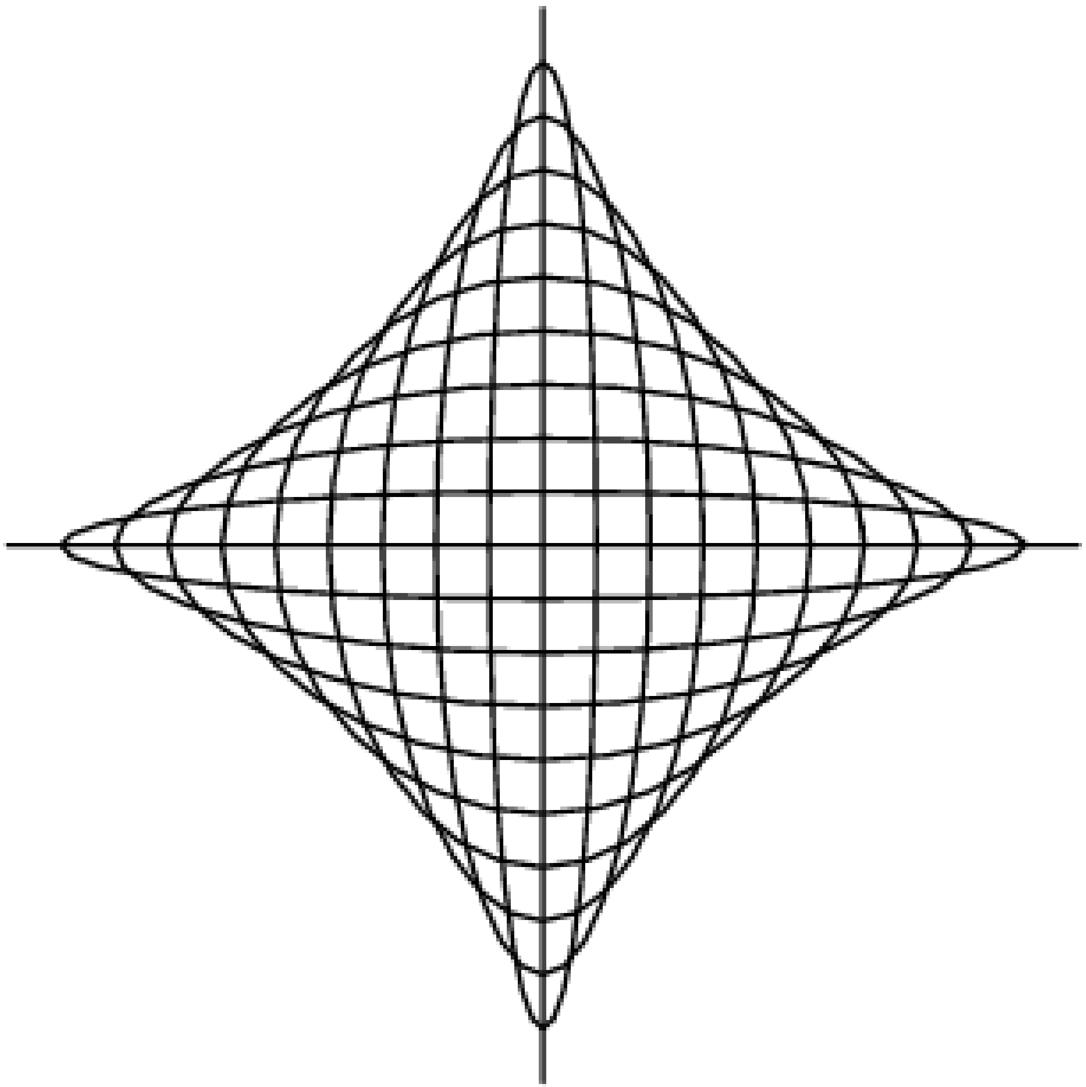


Ellipsograph

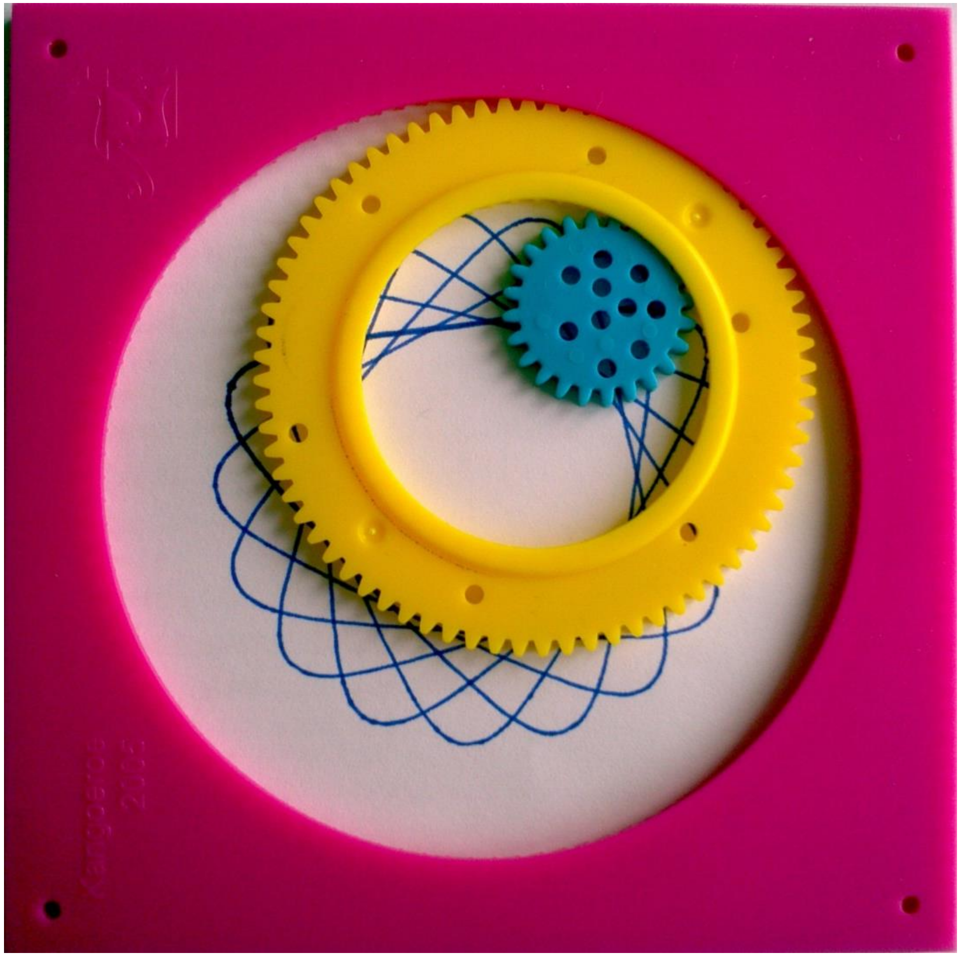


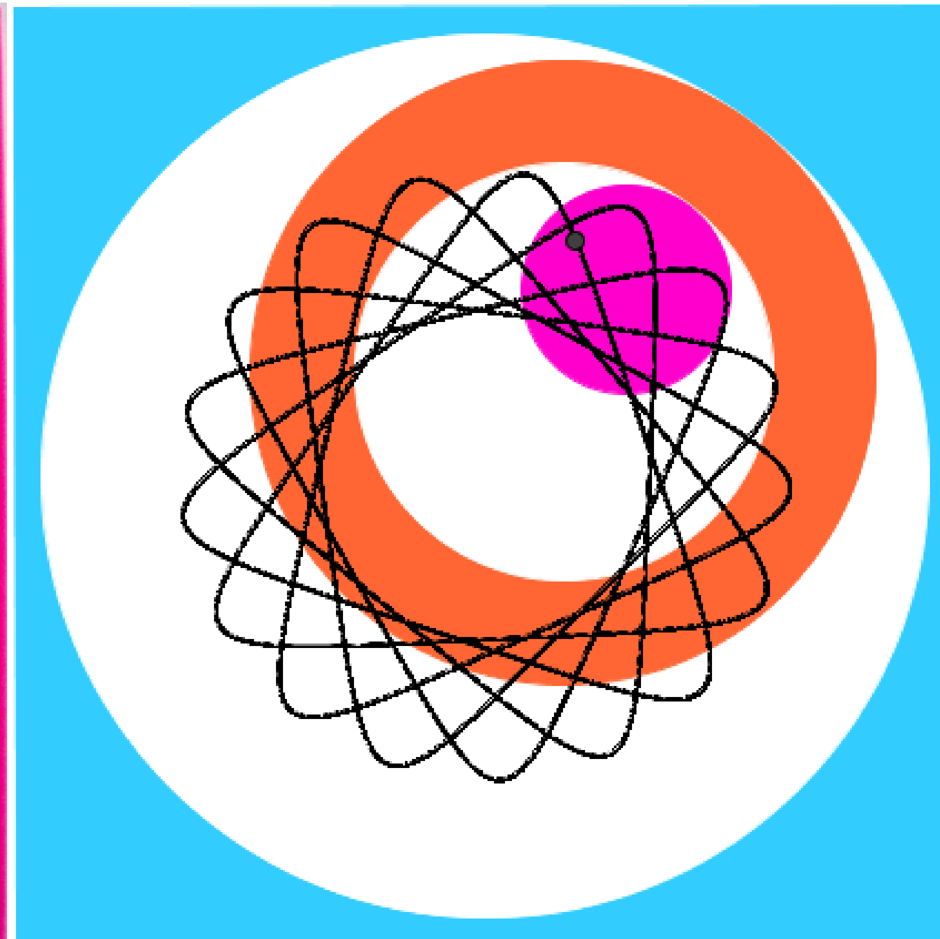
Für eine einfache Beweisskizze siehe Hilbert & Cohn-Vossen [1976] oder Wittmann [1987].

Astroide als Hüllkurve

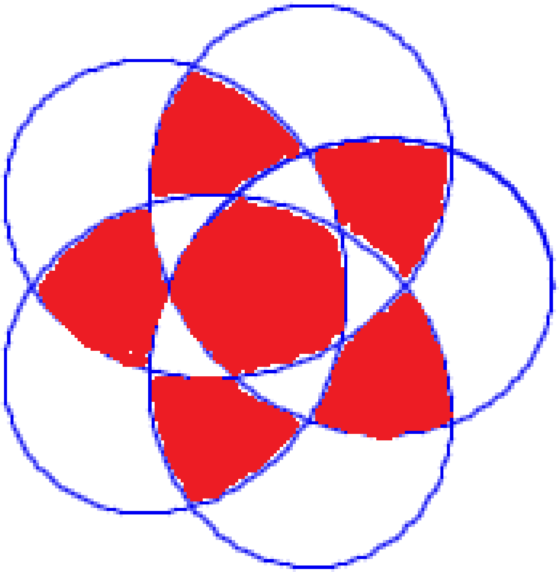


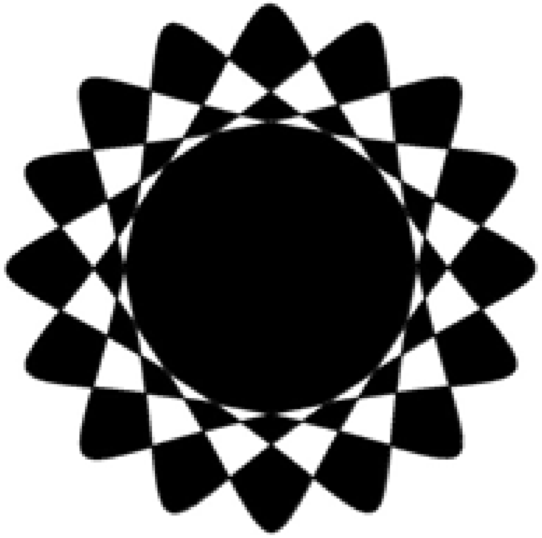
Trirograaf



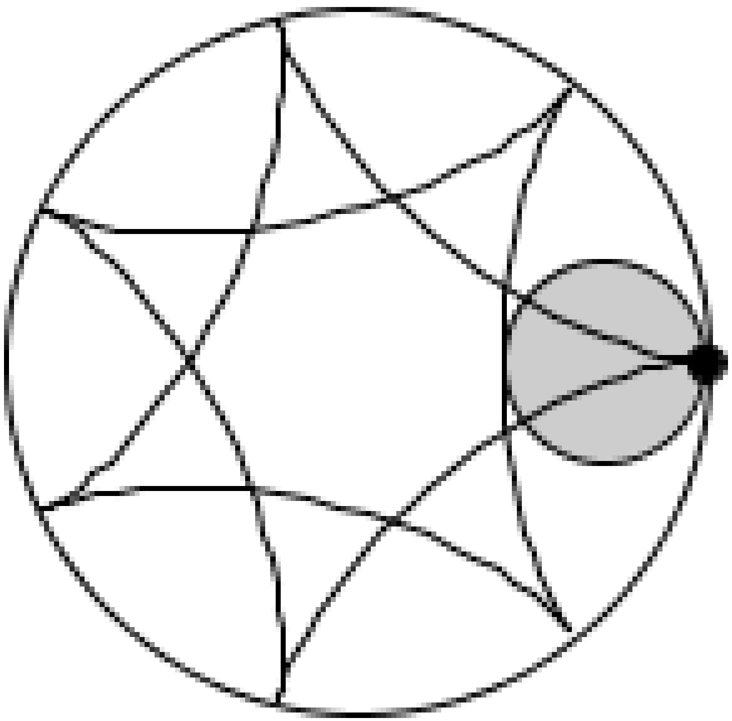


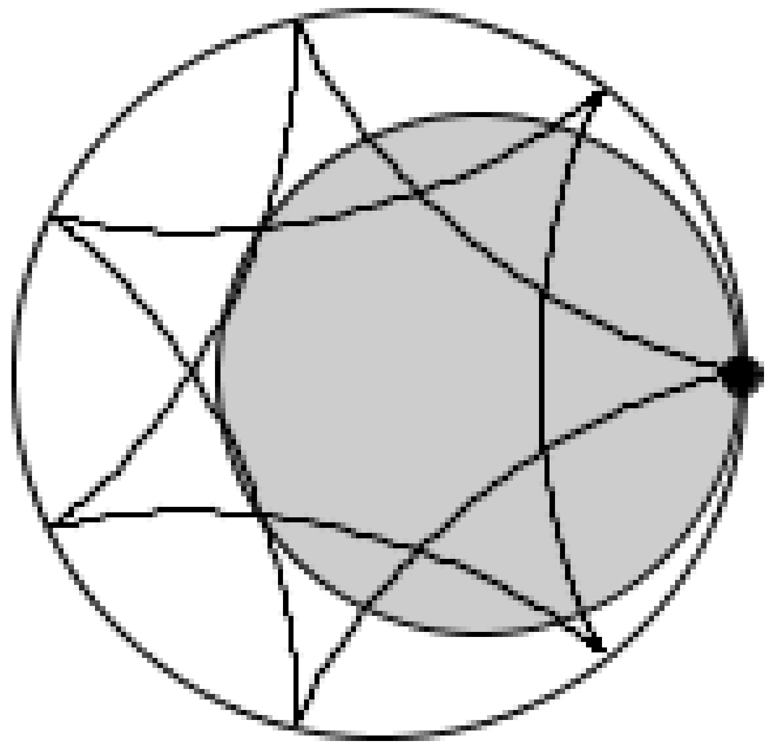
Kleuren en kleurbaarheid

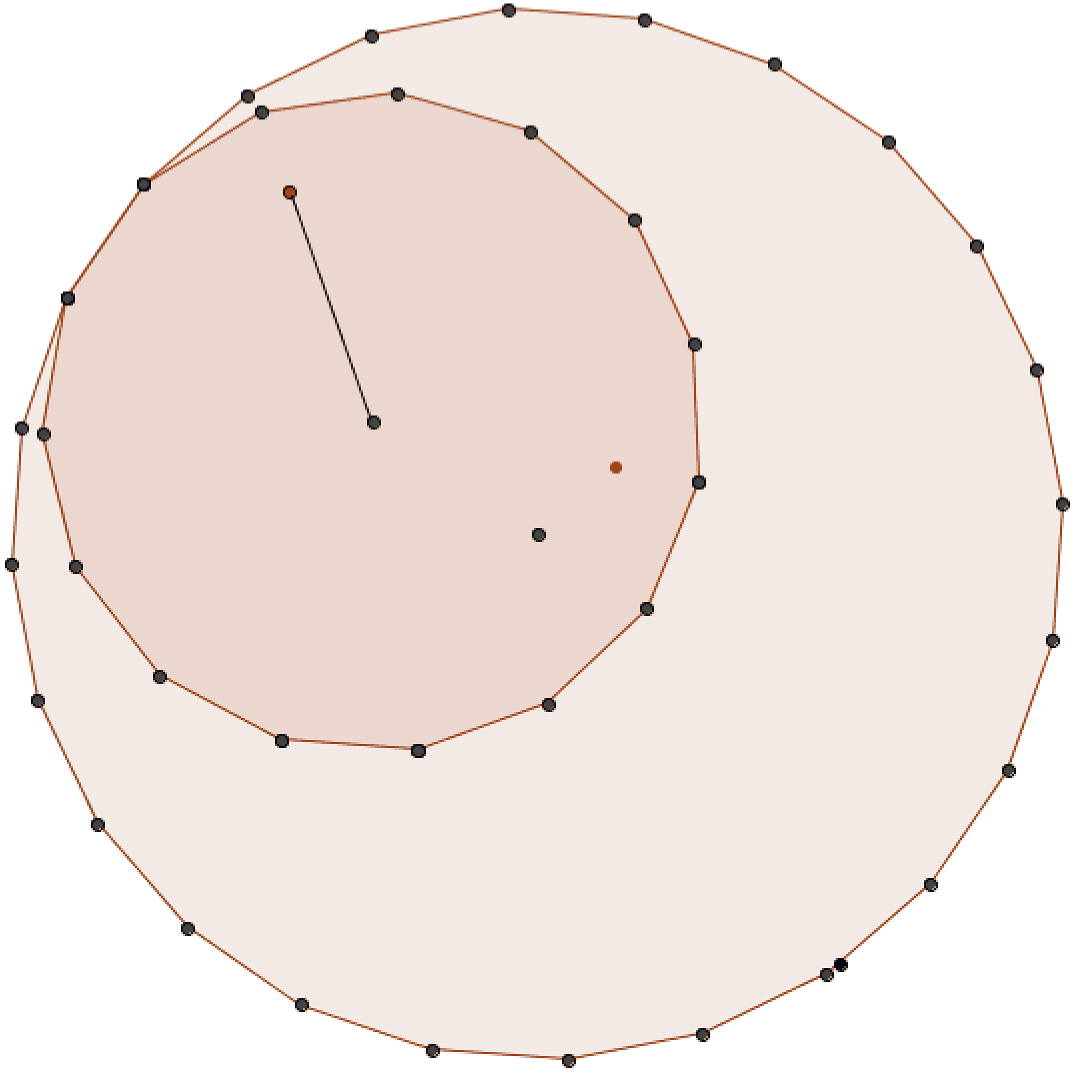


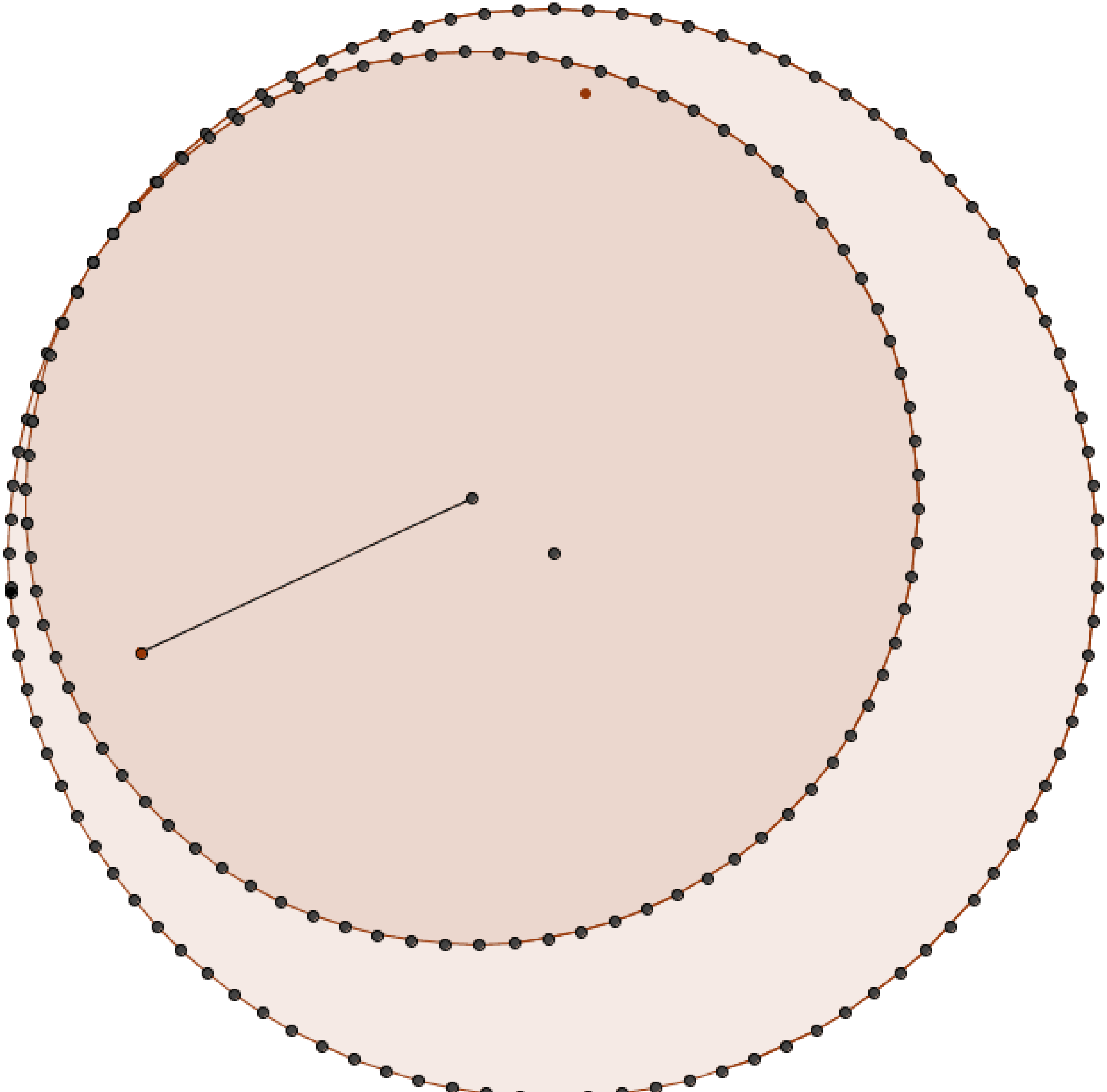


Twee manieren van tekenen





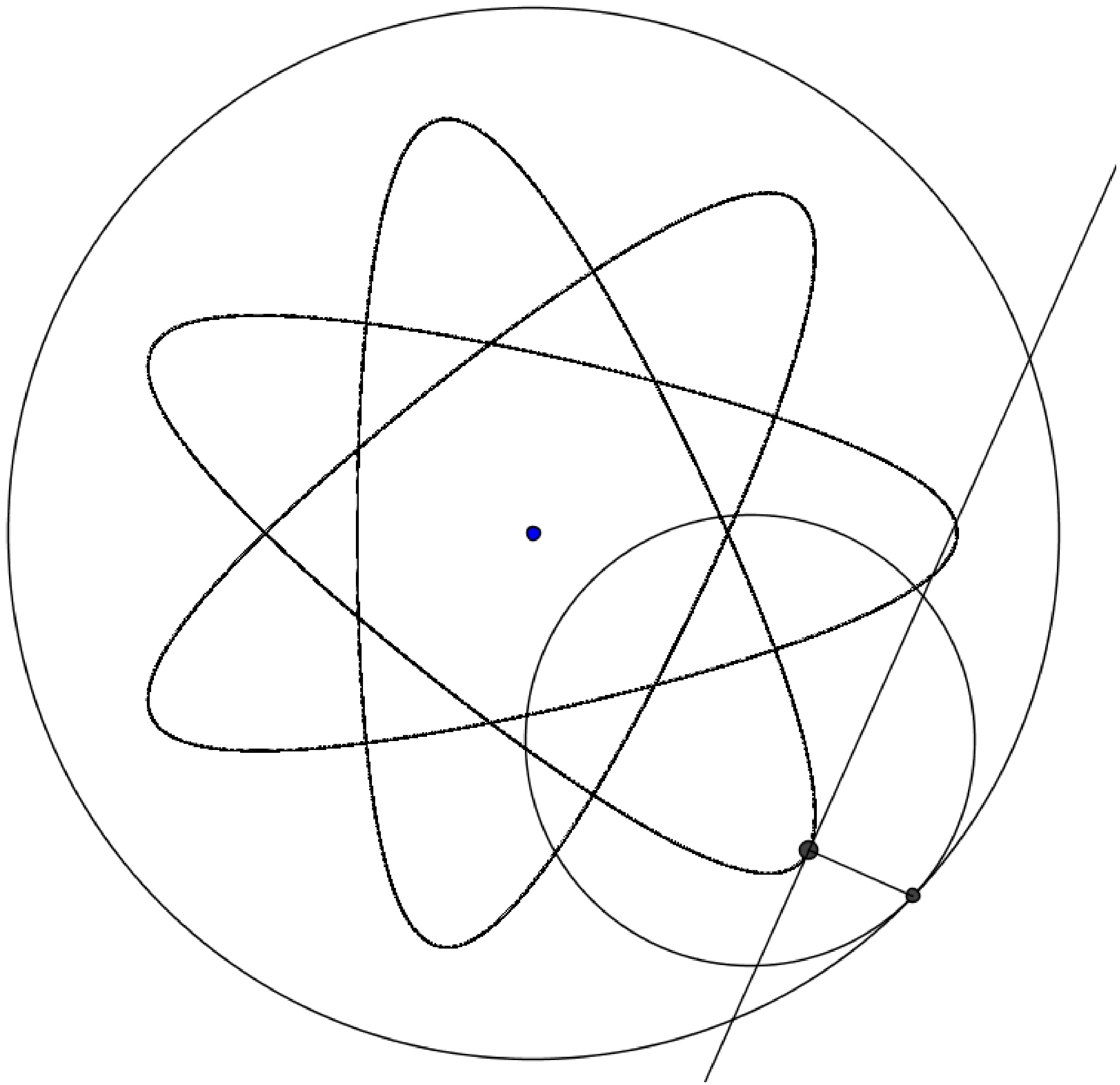




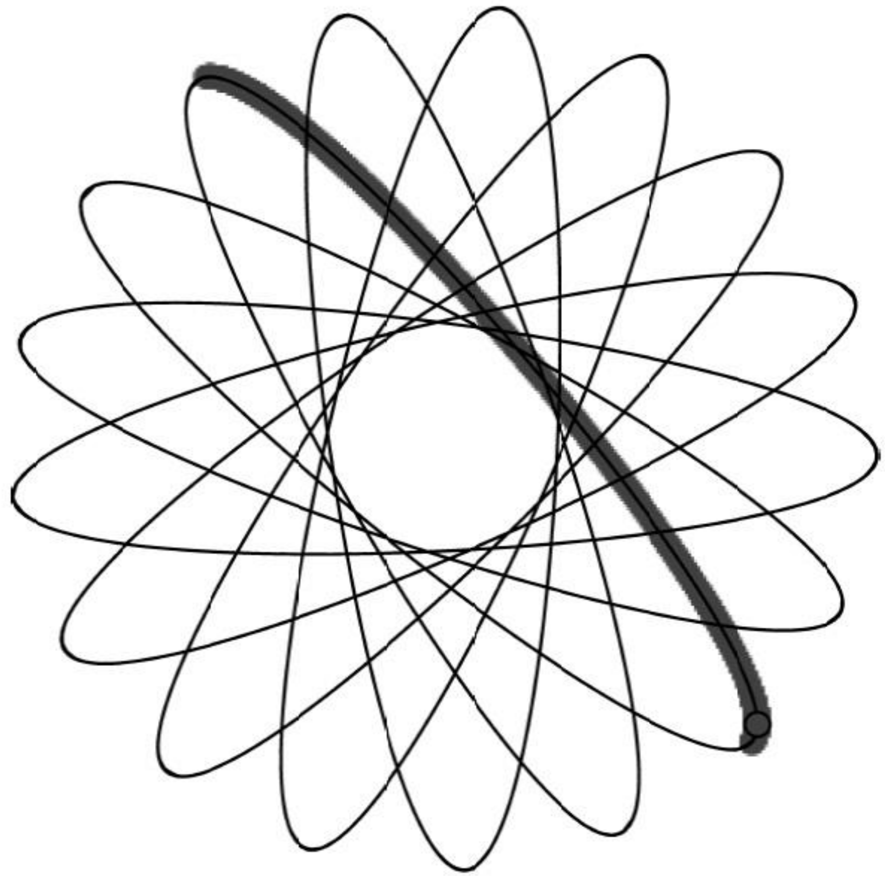
Tangente

Wie konstruiert man die Tangente an einen bestimmten Punkt?

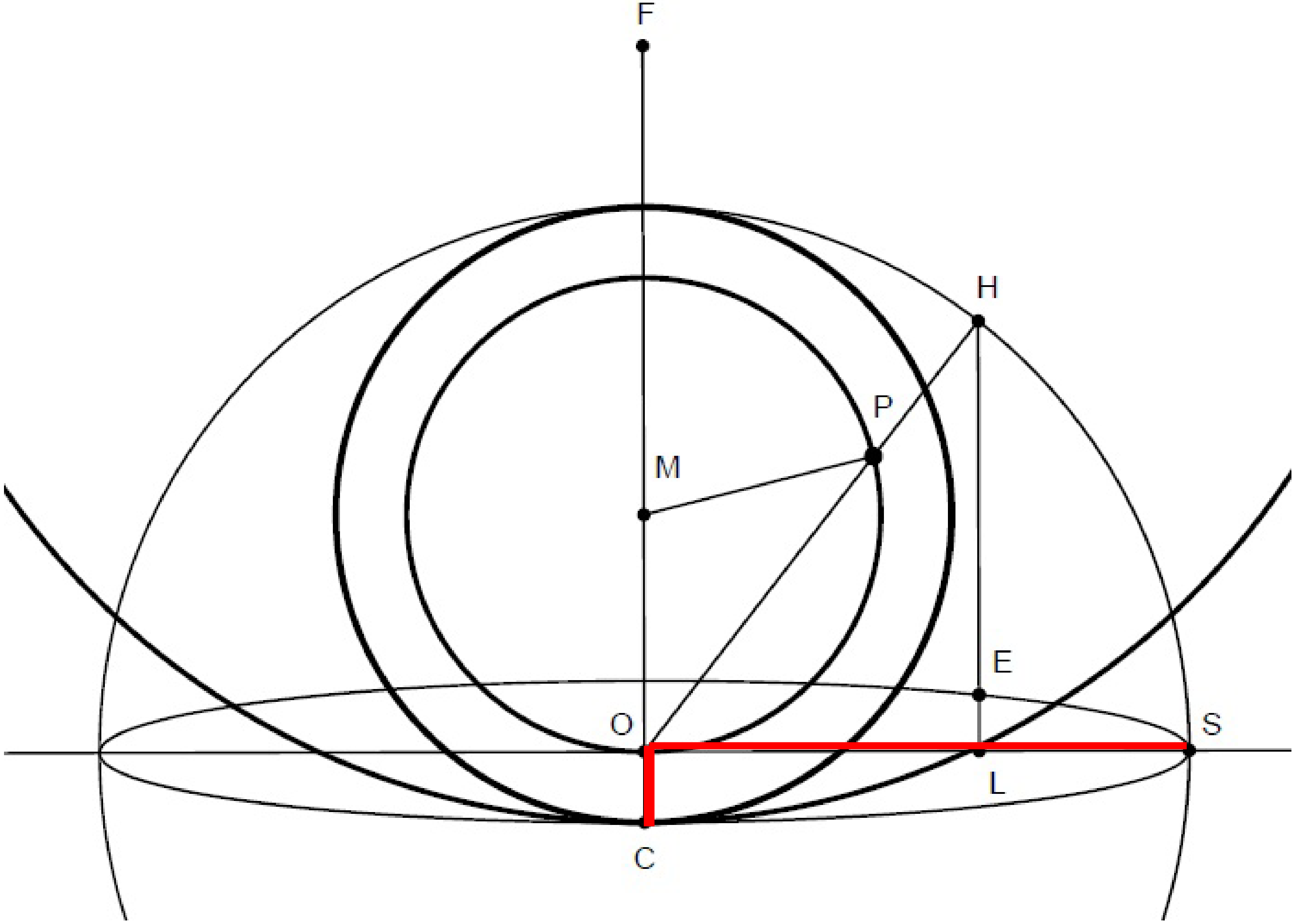
Tangente

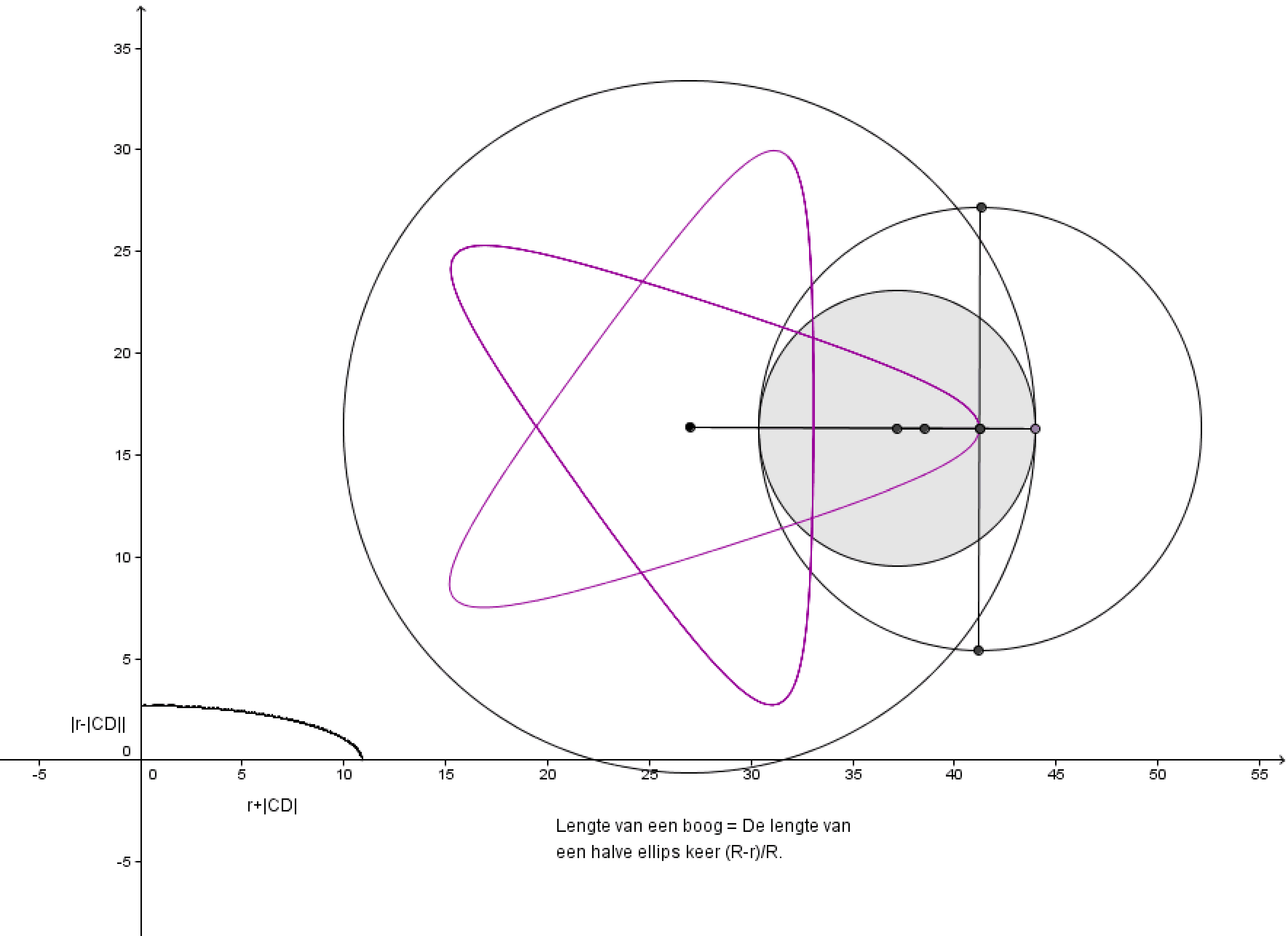


Länge einer Hypotrochoiden



Dieselbe Länge wie die einer Ellipse





|r-|CD||
r+|CD|
Lengte van een boog = De lengte van
een halve ellips keer (R-r)/R.


Vielen Dank!