Zeitgemäße Stoffdidaktik
am Beispiel "Füllgraph"

Stoffdidaktische Analyse, Reduktion und Aufbereitung von Mathematik
ist eine der zentralen Aufgaben mathematikdidaktischer Forschung
zur substantiellen Weiterentwicklung von Mathematikunterricht.

Zeitgemäß sollte dazu der klassische "Höhere Standpunkt" erweitert werden um wesentliche Aspekte kognitiver, epistemologischer und repräsentationaler Natur

Am Modethema "Füllgraph" wird
ein solcher theoretischer Rahmen erläutert
und seine fruchtbare Reichhaltigkeit exemplarisch demonstriert.

Anselm Lambert, Universität des Saarlandes

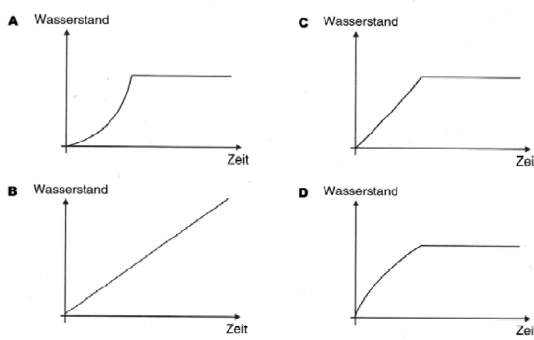
Anselm Lambert **Zeitgemäße Stoffdidaktik** am Beispiel Füllgraph Münster 5. März 2013

Füllgraphen – ein aktuelles Thema

Die Mathematikrelativierer von den Bildungsstandards

Waschbecken
In das rechts abgebildete geschlossene Waschbecken lässt man gleichmäßig Wasser einlaufen – d.h. pro Sekunde immer gleich viel Wasser.

Welches der Diagramme beschreibt die Höhe des Wasserstandes am besten?



nach: LEIß 3. Juni o.J.

Was der Vortrag(ende) nicht will

- Eine (Allgemein-)Bildungstheoretische Begründung dafür liefern, warum Füllgraphen unterrichtet werden sollen
- Eine fachmathematische Analyse unterbreiten
- Ein Plädoyer für Füllgraphen halten

Was der Vortrag(ende) will

- Höhere Standpunkte neben dem der höheren Mathematik zur Diskussion stellen, die zur Sicht auf Stoff geeignet sind
- Diese werden (meist) am Beispiel Füllgraph erläutern
- Ein Plädoyer für zeitgemäße Stoffdidaktik halten

Höhere Standpunkte – gestern und heute

Schulmathematik

Elementar-mathematik
von
höheren
Standpunkten

Höhere Mathematik

Mathematik im Beruf:
Ingenieure,
Wirtschaftler,
Handwerker,
…

Intersubjektives:
Epistemologie, Semiotik

Subjektives:
Kognitionstheorie

Mathematik im Alltag

Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen.

KLEIN 1909

Ziel: Mathematisch denken (lernen)

Theorie(n) für die Praxis – (nicht notwendig disjunkte) **Kategorien**

- *Demonstrative Funktion* *(lösen kognitive Konflikte bei Lehrpersonen aus)*

  z. B. Kognitive Präferenzen (prädikativ vs. funktional) nach SCHWANK

- *Ordnende Funktion* *(schaffen Klarheit und Struktur für den Unterrichtsalltag)*

  z. B. Modellbildungskreislauf nach BLUM & TÖRNER bzw. SCHUPP
  Wissensumgang nach SJUTS: Exploration, Organisation, Reflexion
  Zugänge zur Mathematik (epistemologisch bzw. kognitiv unterschieden)
  Variablenaspekte nach MALLE, VOLLRATH bzw. FÜHRER

Theoretisch begründete Praxisempfehlungen *(helfen konkret)*

z. B. Enaktiv-ikonisch-symbolische Unterrichtsbeispiele nach BRUNER (?)
– aus einer (unterrichtspragmatisch reduzierten) Theorie ableiten

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Höhere Standpunkte (heute hier)

- I Darstellungen und Vorstellungen: Intermodaler Transfer, enaktive, ikonische bzw. symbolische Darstellungsebenen

- II Zugänge zur Mathematik
  - epistemologisch unterschiedene Ausprägungen:

ikonisch	*symbolisch (zusätzlich)*
Wort	verbal-begriffliche Regeln (VB)
Bild	konstruktiv-geometrische Regeln (KG)
Formelzeichen	formal-algebraische Regeln (FA)

  - weiter: kognitiv unterschieden: prädikativ vs. funktional

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

I Darstellungen und Vorstellungen

Darstellungsebenen zwischen Vorstellungen und Vorstellungen

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol (als Zeichen mit Spielregeln) und Operation</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes“</td><td>„Gesagtes“</td><td>„Gehörtes“</td><td>„Aufgefasstes“</td></tr>
</table>

Handlungen, Zeichen und Symbole sind auch didaktische Medien zur Vernetzung von Lernenden mit dem Stoff. L. 2012

Aus der Mathematikdidaktikgeschichte: E-I-S

Bruner unterscheidet drei Repräsentationen von Wissen in der kognitiven Struktur [...]:

- eine enaktive oder handelnde („enactive“),
- eine ikonische oder bildhafte („iconic“)
- und eine symbolische Repräsentation („symbolic“).

[...] Im Verlauf der intellektuellen Entwicklung des Menschen verschiebt sich der Schwerpunkt der Wissensrepräsentation immer mehr [...]. Allerdings bleiben [...] die verschiedenen Darstellungssysteme [...] wirksam, besonders dann, wenn etwas noch relativ neu ist.

STRAKA & MACKE 2002

5. Nimm einen Draht von 24 cm Länge und biege ihn zu einem Rechteck zuſammen! Wie vielerlei Rechtecke laſſen ſich bilden, wenn die Maßzahlen für Länge und Breite nur ganze Zahlen werden ſollen? Gib die Flächen der verſchiedenen Recht=ecke an! Iſt auch eine Berechnung der Umfänge nötig? Wann iſt die Fläche am größten?

6. Wiederhole die Aufgabe 5, bediene dich dabei aber nicht des Drahtes, ſondern bloß einer Zeichnung!

7. Schneide aus den Quadratzentimetertafeln Rechtecke von 36 cm^2 Flächeninhalt aus, aber wieder ſo, daß die Maßzahlen für Länge und Breite ganze Zahlen werden! Wie vielerlei Rechtecke kannſt du da machen? Gib immer die Umfänge an! Wann iſt der Umfang am kleinſten?

8. Auch die Aufgabe 7 kann man durch bloßes Zeichnen löſen.

9. Bilde ähnliche Aufgaben wie in Nr. 5 und 7! Geübte können die Aufgaben ſogar ohne Zeichnung machen, ſie müſſen ſich alles nur ſehr gut vorſtellen.

10. Eine ſchwere Aufgabe: Aus 64 Zentimeterwürfeln ſollſt du dir Quader aufgebaut denken, wobei jedesmal alle 64 Stück zu verwenden ſind! Nenne verſchiedene Möglichkeiten! Wird man auch einen Würfel erhalten können? Vergleiche die Ober=flächen der verſchiedenen Körper!

FALK ET AL. 1926

Zeichen und Symbole – mal etwas genauer!

(M-)ein Vorschlag zur Unterscheidung

Symbole sind Zeichen mit Kontexten, die sie mit (Spiel-)Regeln aufladen.

Zeichen haben symbolische Kapazitäten, die bei individuellen Lernenden unterschiedlich aufgeladen sind.

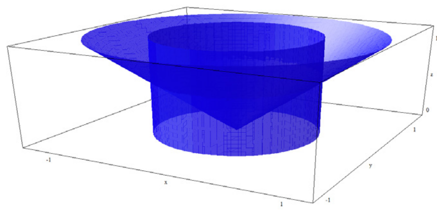
Für Darstellung auf **ikonischer Ebene**
kann man den Bezeichner „Zeichen“ (ggf. „Ikon“) verwendet,
für eine Darstellung auf **symbolischer Ebene** den „Symbol“.

L. 2012

Darstellungsebenen E-I-S bei Füllgraphen

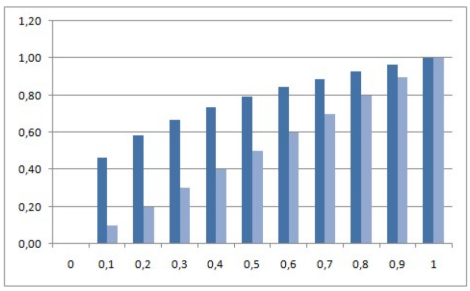
*z.B. **Klassenstufe 5/6***

enaktiv



portionsweises Füllen von konkreten Körpern (Kegel, Zylinder – gleiches Volumen, unterschiedliche Höhe), messen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Füllvolumen

ikonisch



a) fotographieren der Füllstände

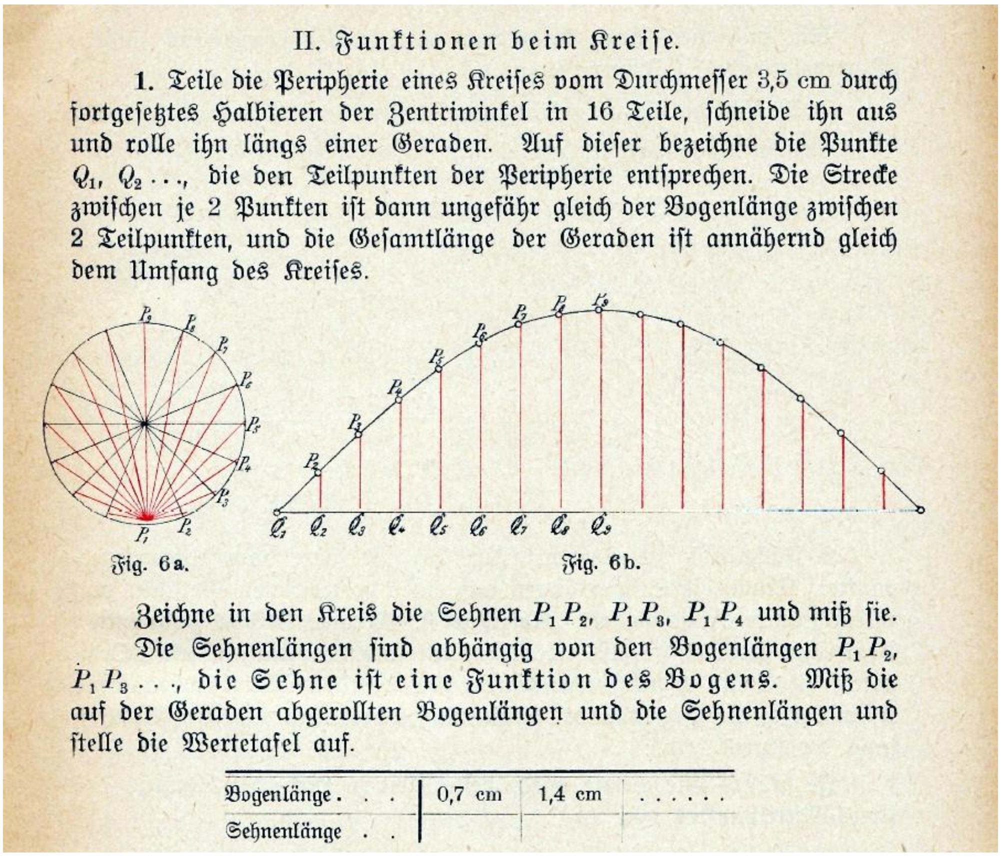
b) tabellieren der Werte,
graphische Darstellung als Säulen

symbolisch

Vergleich der Füllvorgänge anhand der graphischen Darstellung (aber was passiert bei der 0?)

Und: Quader mit quadratischer Grundfläche, Grundkantenlänge verdoppeln

Noch ein ein Klassiker: Funktion in geometrischem Gewand



II. Funktionen beim Kreise.

1. Teile die Peripherie eines Kreises vom Durchmesser 3,5 cm durch fortgesetztes Halbieren der Zentriwinkel in 16 Teile, schneide ihn aus und rolle ihn längs einer Geraden. Auf dieser bezeichne die Punkte $Q_1, Q_2 \dots$, die den Teilpunkten der Peripherie entsprechen. Die Strecke zwischen je 2 Punkten ist dann ungefähr gleich der Bogenlänge zwischen 2 Teilpunkten, und die Gesamtlänge der Geraden ist annähernd gleich dem Umfang des Kreises.

Fig. 6a. Fig. 6b.

Zeichne in den Kreis die Sehnen P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 und miß sie. Die Sehnenlängen sind abhängig von den Bogenlängen P_1P_2, $P_1P_3 \dots$, die Sehne ist eine Funktion des Bogens. Miß die auf der Geraden abgerollten Bogenlängen und die Sehnenlängen und stelle die Wertetafel auf.

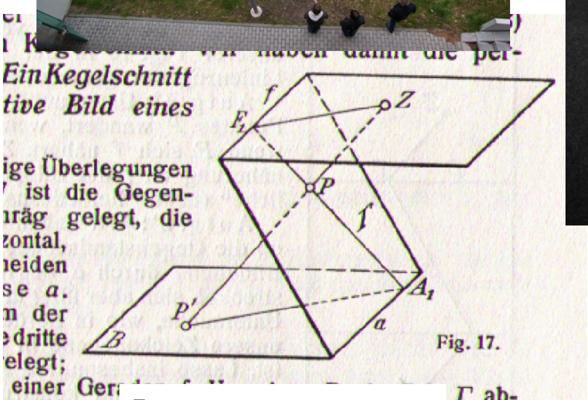
Bogenlänge . . .	0,7 cm	1,4 cm	. . . . . .
Sehnenlänge . .			

REINHARDT & ZEISBERG 1922, 5

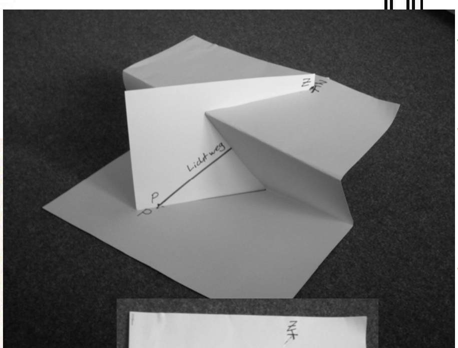
Füllgraphen sind eine aktuelle 3D-Version dieser Idee

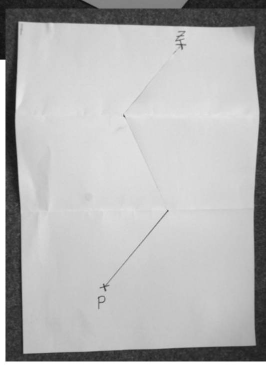
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

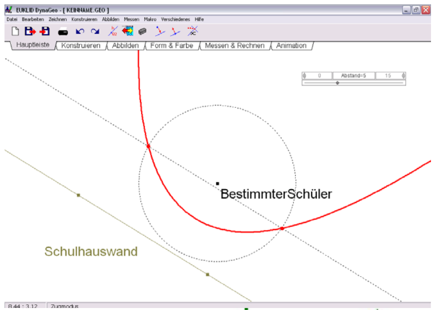
Parabel von Handlung, Zeichen und Symbol

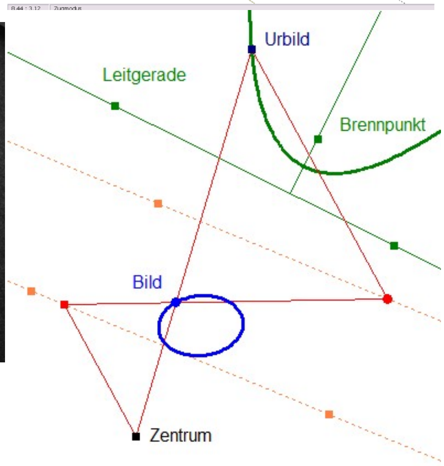


LIETZMANN 1933









Auf Parabelfotos sind meist keine Parabeln!

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

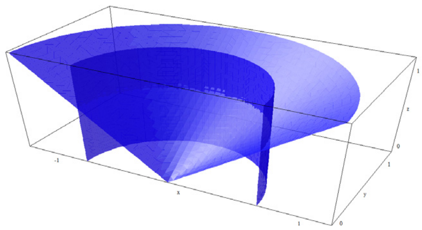
<u>II</u> Unterschiedliche Menschen denken (Mathematik) unterschiedlich

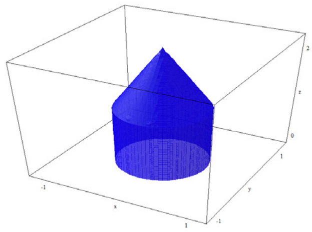
Epistemologische Unterscheidung von Symbolen

formal-algebraisch bzw. konstruktiv-geometrisch bzw. verbal-begrifflich

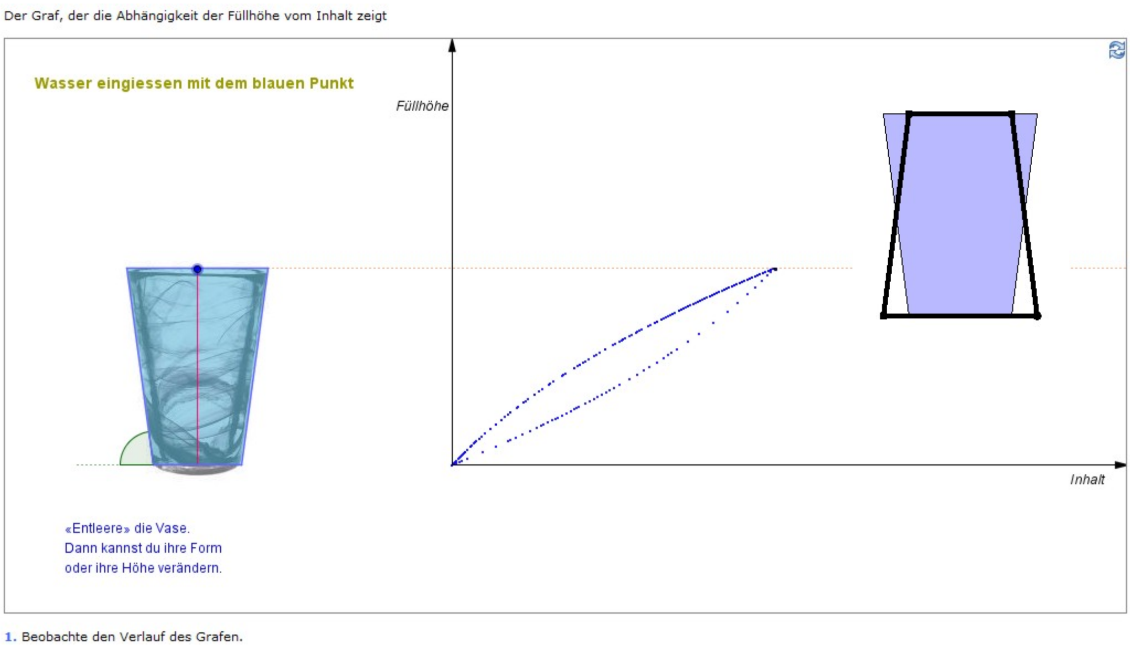
z.B. Klassenstufe 7/8 (spiralcurr. Fortsetzung des Vergleichs)

- Interpolation (KG) der Messwerte zu einem kontinuierlichen Funktionsgraph dieser *empirischen Funktion* (vgl. LIETZMANN 1925)
- Fortsetzung des Graphen zur 0 hin (VB)
- Proportionalität:
  Wie sieht der Graph zu einem „halben Zylinder“ bzw. „halben Kegel“ aus? (VB)
  – Vorbereitung Cavalierisches Prinzip
- Diskussion der Steigung des Graphen: Wann hat eine Flasche aus Zylinder und Kegel keinen Knick im Graphen? (KG & VB)
- Übergang vom Füllvolumen zur Füllzeit (VB)





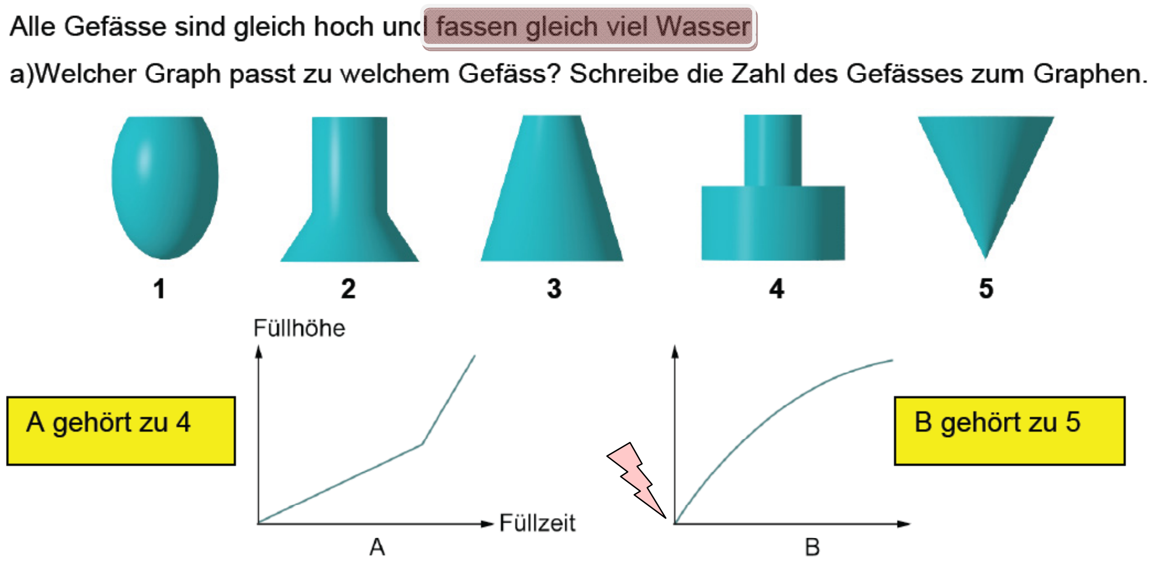
Neue Medien und Werkzeuge zeigen mehr



z.B. Trapez auf dem Kopf: Wasser verdrängt Luft (VB)

Geogebradatei:
www.phzh.ch/lehre/christian.rohrbach/mathematik2/fuellgraf.html (25.02.13)

Fehler bei Füllgraphen reflektieren



Steigungsverhältnis?

www.osrema.ch (download 25.02.13)

Konsequenz (empirisch evident): Der MU braucht Stoffdidaktiker als Komponisten – und Lehrpersonen als Interpreten

Fortsetzung Spiralcurriculum (9-12)

Klassenstufe 9/10

Terme zu Füllfunktionen von Körpern (Kreiskegel, Pyramide, Halbkugel) bestimmen (FA) und Graphen zeichnen

Übergang vom Füllvolumen zur Füllzeit (FA)

Funktionale Zusammenhänge diskutieren (VB): Was passiert beim Verdoppeln der Grundkantenlänge der Pyramide? usw.

Klassenstufe 11/12

Beschreibung der Situation durch Integrale
– insbesondere bei Rotationskörpern (FA)

Analytisch-geometrische Beschreibung von Gefäßen (FA)

(Differentialgleichungen)

Frage zum Schluß – oder zum (Neu-)Start?

Stand der Forschung *als Maß aller Dinge?*
– wie dicht ist die noch am alltäglichen Unterricht?

vs. integrativ-vernetzende
mathematikdidaktische Grundwortschätze
für den Mathe-Unterricht

Anselm Lambert **Zeitgemäße Stoffdidaktik** am Beispiel Füllgraph Münster 5. März 2013

Ich danke Ihnen herzlich für Ihr Interesse an Zeitgemäßer Stoffdidaktik