
Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?

Dr. Emese Vargyas
Prof. Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach
Johannes Gutenberg - Universität Mainz

- **Sehnensatz**
- **Sekantensatz**
- **Sekanten-Tangenten-Satz**

- **Satz des Thales**
- **Satz vom Umfangswinkel**
- **Sehnen-Tangenten-Satz**

- **Winkelsumme im Dreieck**
- **Basiswinkelsatz**

- **Umkreis von Drei- und Vierecken**
- **verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken**

- **Satz des Pythagoras**
- **Kathetensatz**
- **Höhensatz**

- **Quadrieren von Flächen**
 - **Kongruenzabbildungen**
 - **flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)**
-

Vorlesung

- Sehnensatz
- Sekantensatz
- Sekanten-Tangenten-Satz



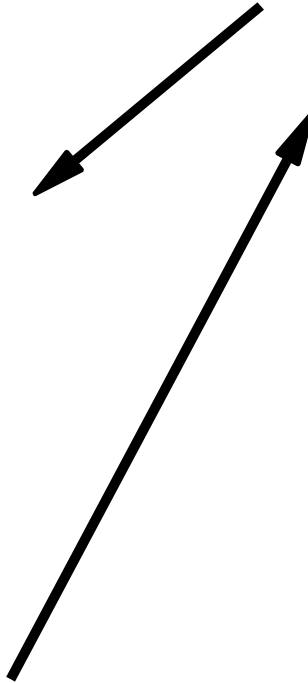
- Satz des Thales
- Satz vom Umfangswinkel
- Sehnen-Tangenten-Satz

- Winkelsumme im Dreieck
- Basiswinkelsatz

- Umkreis von Drei- und Vierecken
- verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken

- Satz des Pythagoras
- Kathetensatz
- Höhensatz

- Quadrieren von Flächen
- Kongruenzabbildungen
- flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)



Vorlesung

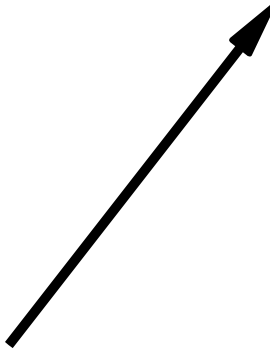
- Sehnensatz
- Sekantensatz
- Sekanten-Tangenten-Satz



- Satz des Thales
- Satz vom Umfangswinkel
- Sehnen-Tangenten-Satz



- Winkelsumme im Dreieck
- Basiswinkelsatz



- Umkreis von Drei- und Vierecken
- verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken

- Satz des Pythagoras
- Kathetensatz
- Höhensatz

- Quadrieren von Flächen
 - Kongruenzabbildungen
 - flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)
-

Vorlesung

- Sehnensatz
- Sekantensatz
- Sekanten-Tangenten-Satz

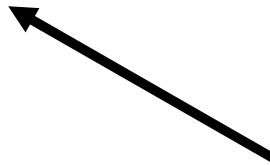
- Satz des Thales
- Satz vom Umfangswinkel
- Sehnen-Tangenten-Satz

- Winkelsumme im Dreieck
- Basiswinkelsatz

- Umkreis von Drei- und Vierecken
- verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken

- Satz des Pythagoras
- Kathetensatz
- Höhensatz

- Quadrieren von Flächen
- Kongruenzabbildungen
- flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)



Übung

Verschiedene Darstellungsebenen
Anwendungsbeispiele
Illustration Problemlösestrategien

- Sehnensatz
- Sekantensatz
- Sekanten-Tangenten-Satz

- Satz des Thales
- Satz vom Umfangswinkel
- Sehnen-Tangenten-Satz

- Winkelsumme im Dreieck
- Basiswinkelsatz

- Umkreis von Drei- und Vierecken
- verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken

- Satz des Pythagoras
- Kathetensatz
- Höhensatz

- Quadrieren von Flächen
 - Kongruenzabbildungen
 - flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)
-

Heuristiken

Zurückführung auf eine bekannte Aufgabe

Analogie

Fallunterscheidung

Spezialisierung/Verallgemeinerung

Symmetrie

Invariante

Vorwärts/Rückwärtsarbeiten

Variation

G.Polya, *Schule des Denkens 1945*

Abschließende Aufgabe

Skizzieren einer Lernumgebung

Variationen zum Sehnensatz

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen

**Variation
der
Fragestellung**

**Variation
des
Beweises**

Sehnensatz

**Variation
der Bedingungen**

**Werkzeug
vs
Untersuchungsgegenstand**

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen

Problemlösen

...setzt voraus, dass jemand ein (mathematisches) Problem hat

Ausprobieren verschiedener
Strategien



Variationen

Forscherfrage?

**Um welche Flächen geht es
beim Sehnensatz?**

Übung

- **Sehnensatz**
- **Sekantensatz**
- **Sekanten-Tangenten-Satz**

- **Satz des Thales**
- **Satz vom Umfangswinkel**
- **Sehnen-Tangenten-Satz**

- **Winkelsumme im Dreieck**
- **Basiswinkelsatz**

- **Umkreis von Drei- und Vierecken**
- **verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken**

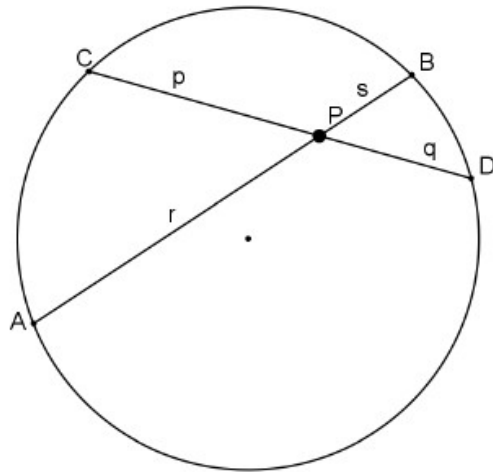
- **Satz des Pythagoras**
- **Kathetensatz**
- **Höhensatz**

- **Quadrieren von Flächen**
 - **Kongruenzabbildungen**
 - **flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)**
-



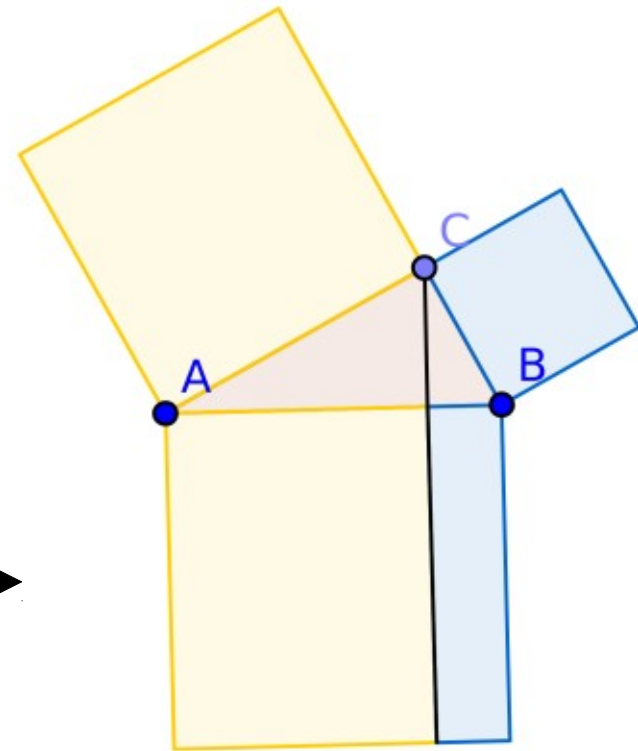
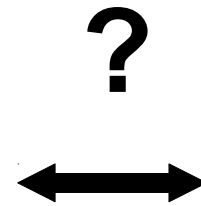
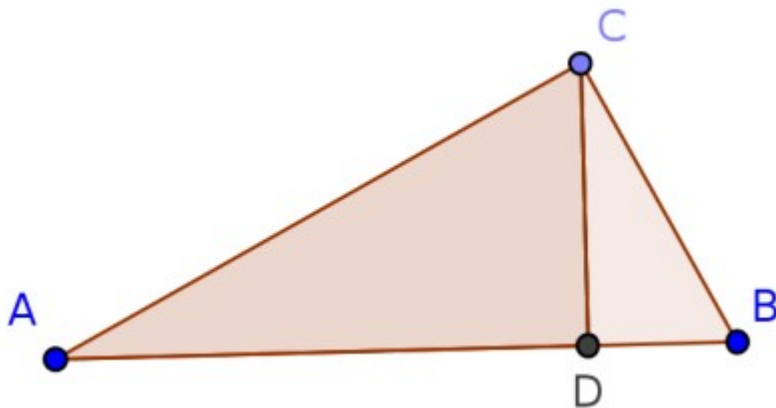
$$pq = rs$$

$$\frac{p}{r} = \frac{s}{q}$$



Flächenbeweise

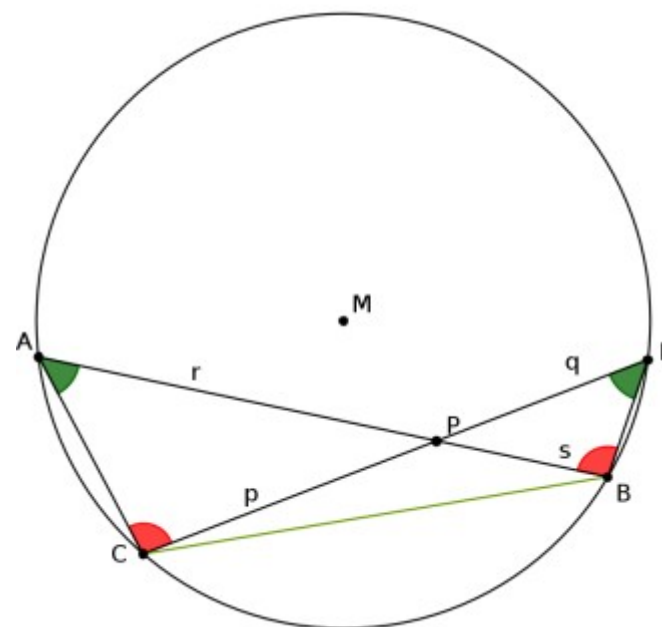
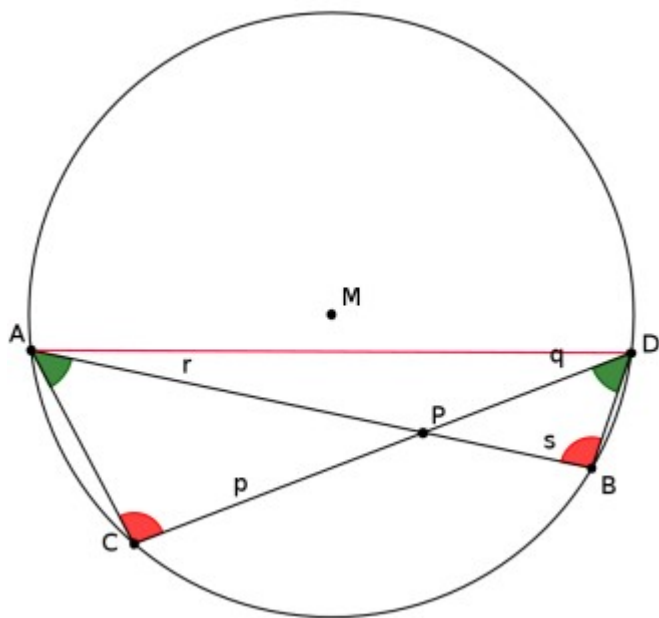
Ähnlichkeitsbeweise



Ähnlichkeit Beweis1

Variationen
Anwendungen

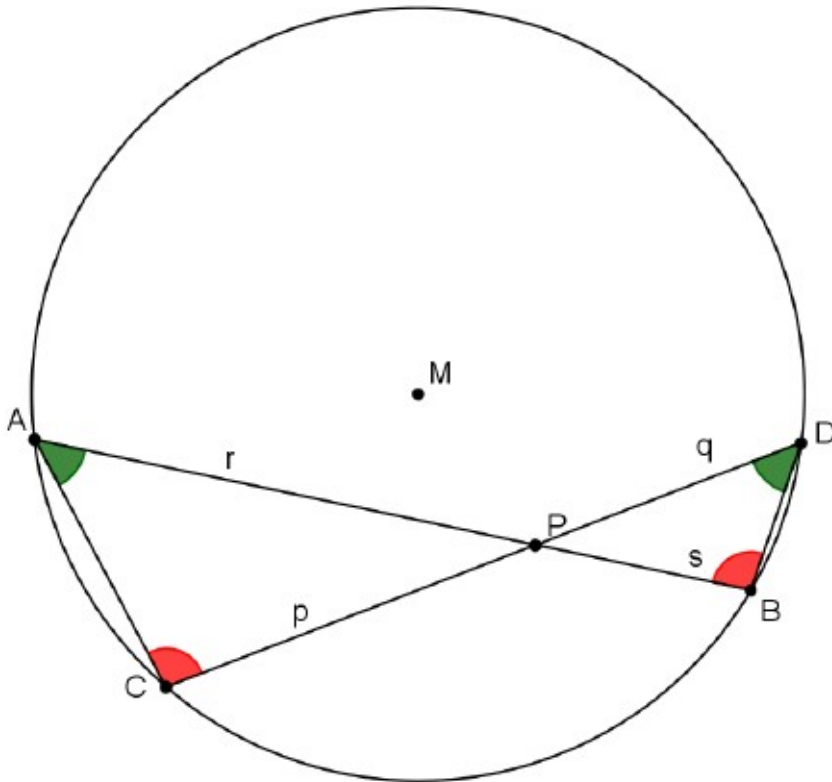
Formulierungen
Beweise
Bedingungen



Ähnlichkeit Beweis1

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen



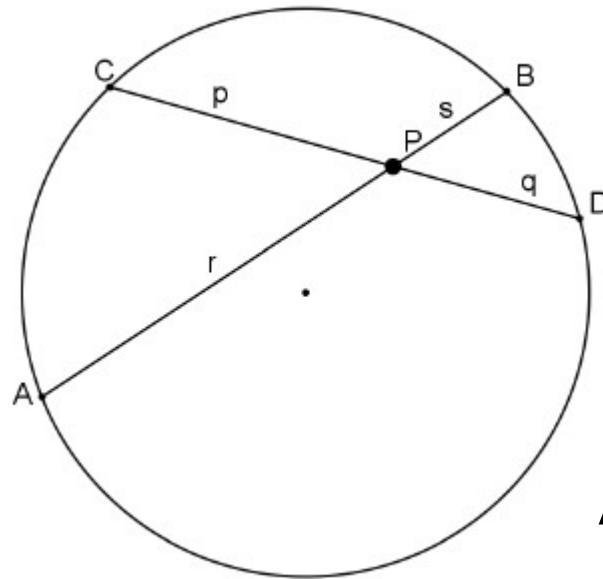
$$\begin{aligned} \angle CAP &\equiv \angle PDB \\ \angle PCA &\equiv \angle DBP \end{aligned} \Rightarrow \Delta ACP \sim \Delta DBP \Rightarrow \frac{r}{p} = \frac{q}{s}$$

Also

$$r \cdot s = p \cdot q$$

Historische Begriffsentwicklung

$$pq = rs$$



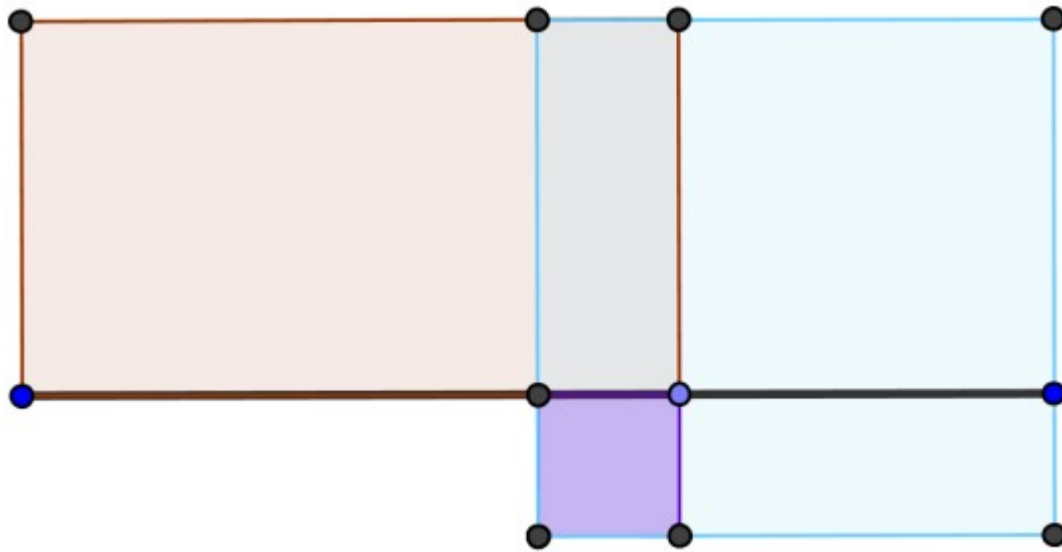
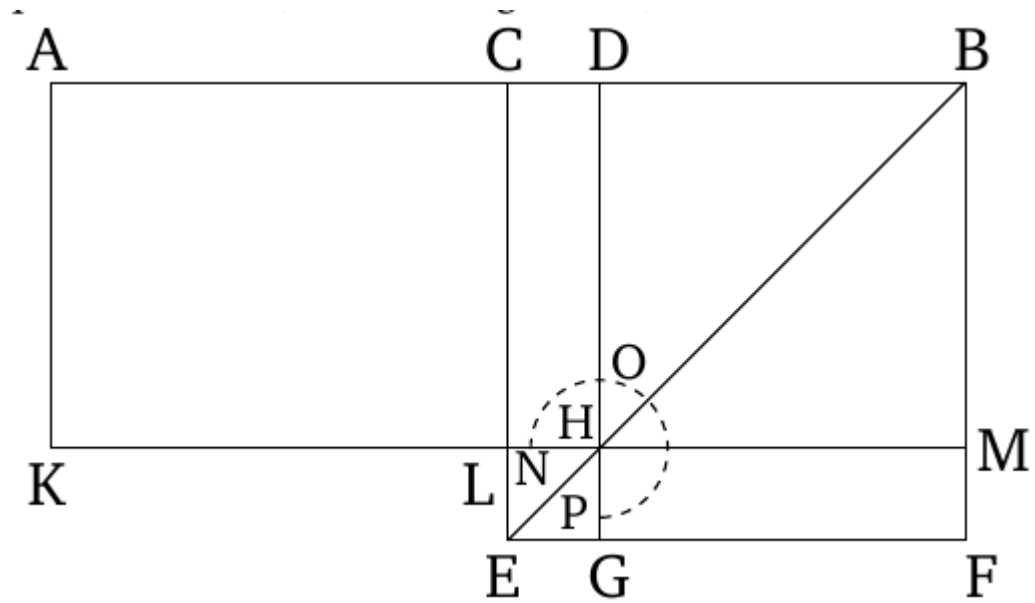
Flächenbeweise

Ähnlichkeitsbeweise

$$\frac{p}{r} = \frac{s}{q}$$

- Wiedergabe des Euklidischen Beweises
 - Verwendung DGS zum Verständnis und Illustration des Beweises
-

Buch 2 Satz 4



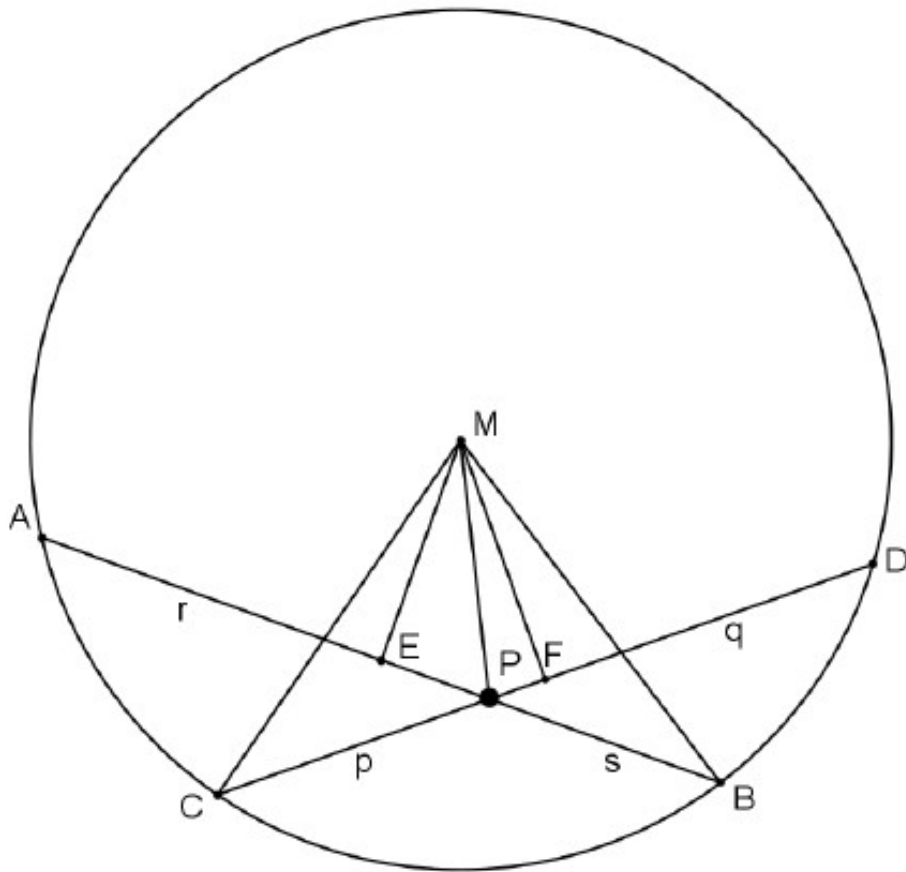
Heiberg (1883–1885)
Richard Fitzpatrick, 2007

Sehnensatz (Euklid) Beweis 2

Buch 3 Satz 35

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen



$$r \cdot s + Fl_{PE} = Fl_{EB} \quad / + Fl_{ME}$$

$$r \cdot s + \underbrace{Fl_{PE} + Fl_{ME}} = \underbrace{Fl_{EB} + Fl_{ME}}$$

$$r \cdot s + Fl_{MP} = Fl_{MB} \quad (1)$$

Analog gilt:

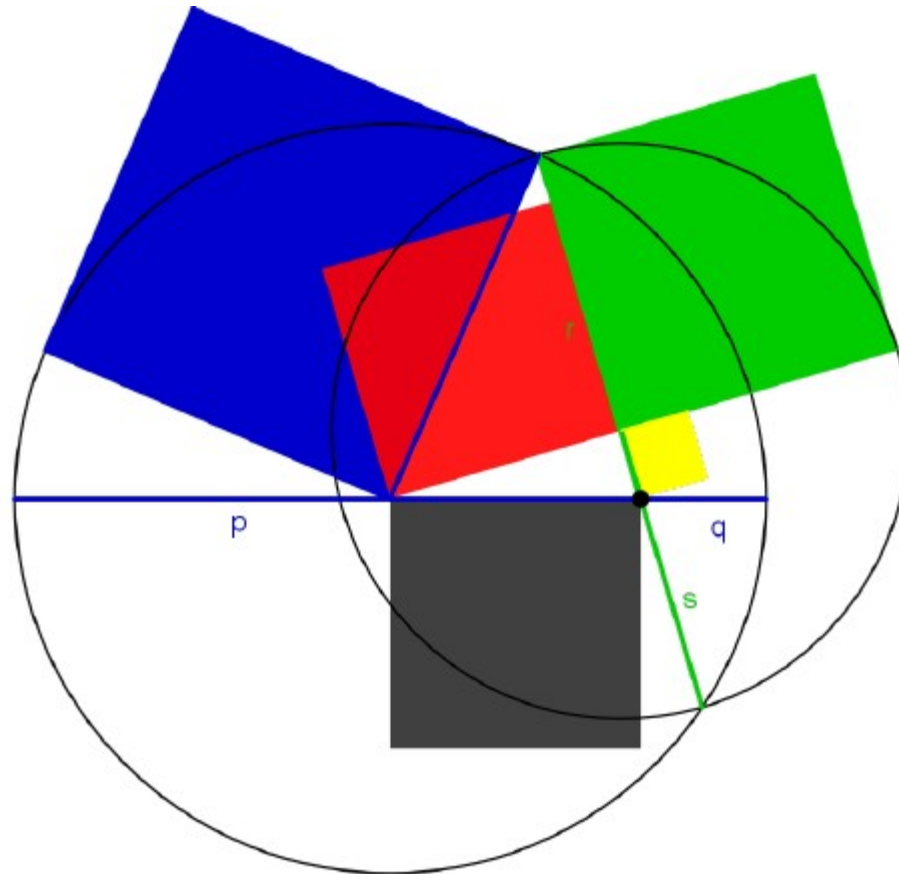
$$p \cdot q + Fl_{MP} = Fl_{MC} \quad (2)$$

$$Fl_{MB} = Fl_{MC} \wedge (1) \wedge (2) \Rightarrow r \cdot s = p \cdot q$$

Sehnensatz (Euklid)

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen

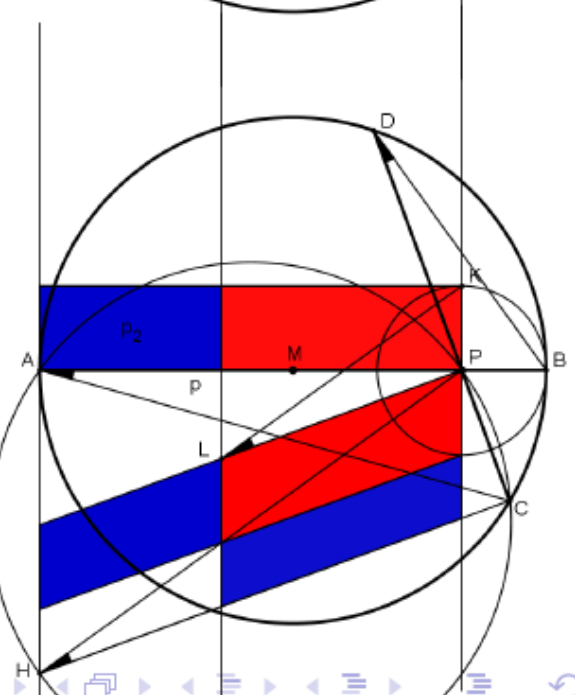
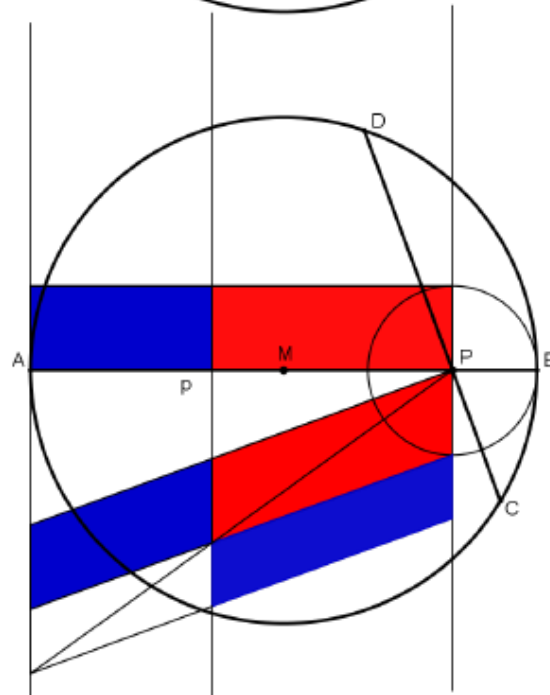
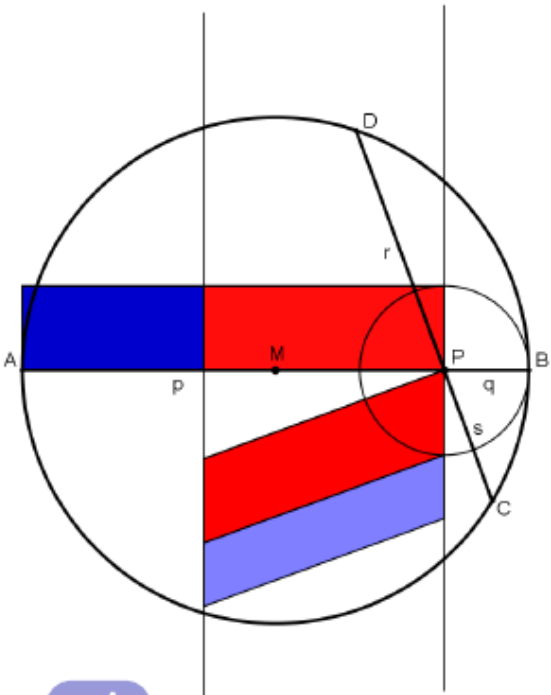
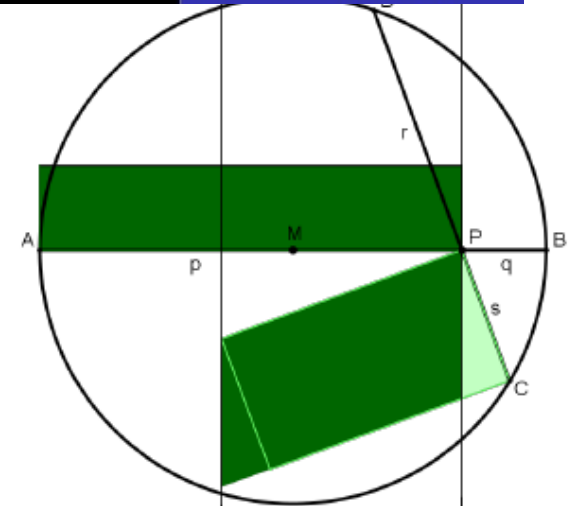
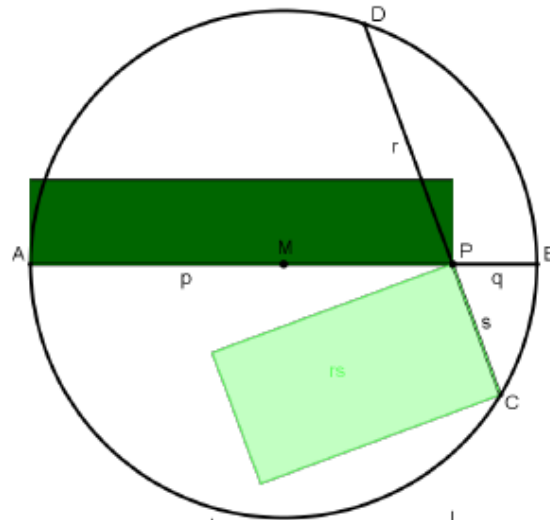
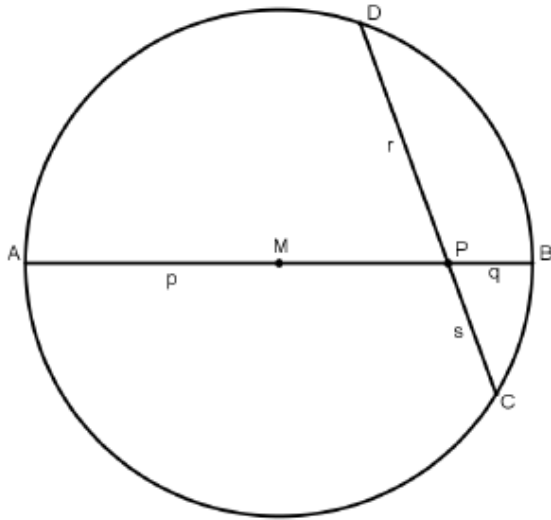


$$p \cdot q = FI - FI = (FI + FI) - FI = FI + (FI - FI) - FI = FI - FI = r \cdot s$$

Scherung Beweis 3

Variationen
Anwendungen

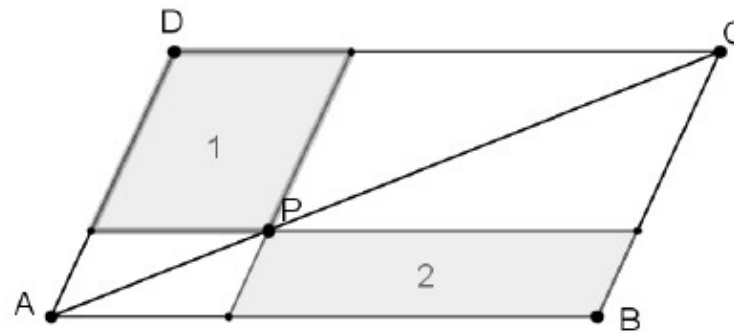
Formulierungen
Beweise
Bedingungen



Forschungsfrage zum Beweis 3

Variationen
Anwendungen

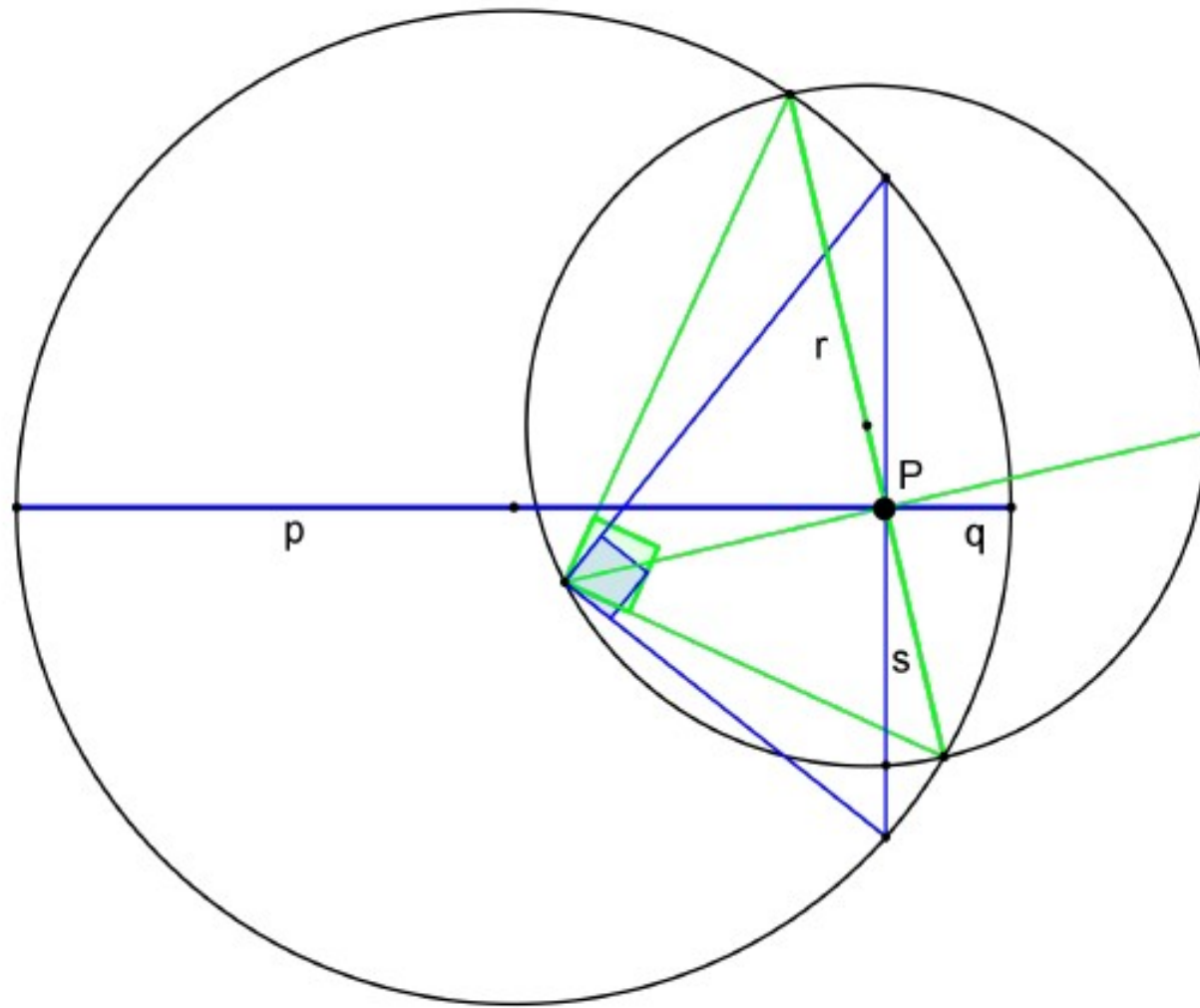
Der innere Punkt P des Parallelogramms $ABCD$ liegt auf der Diagonale AC genau dann, wenn $F_1 = F_2$.



Drehung? Beweis 4

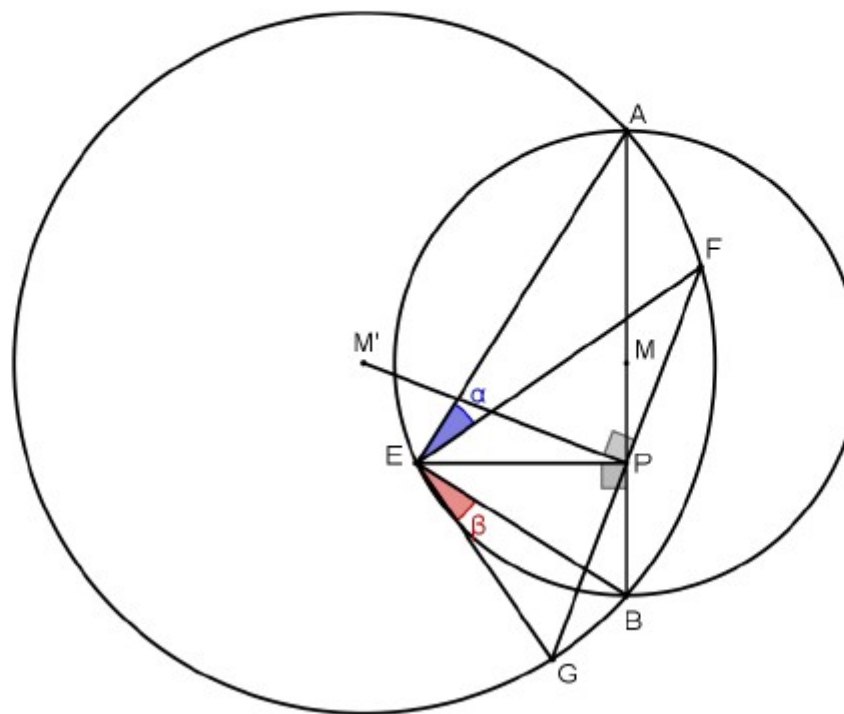
Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen



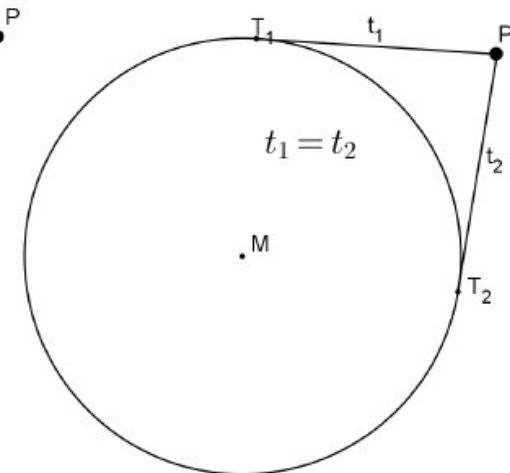
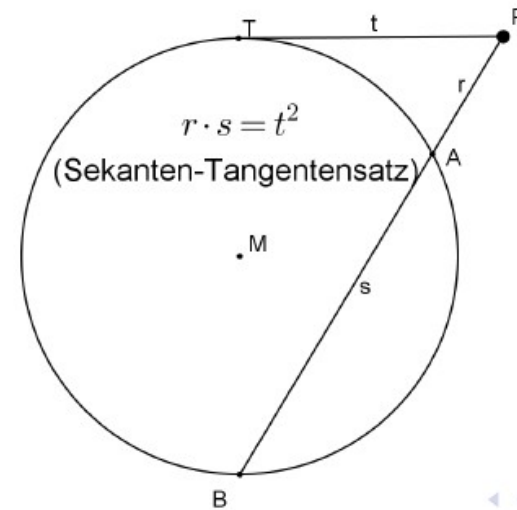
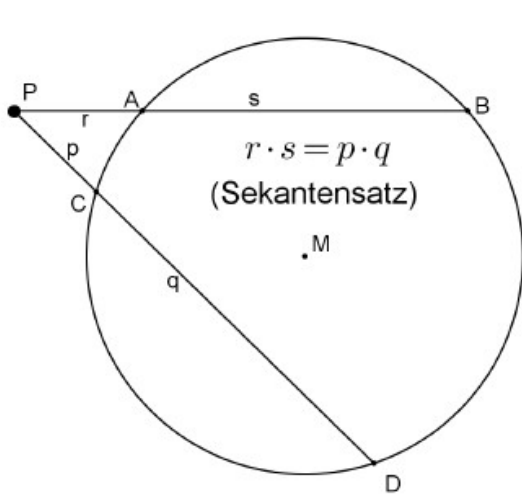
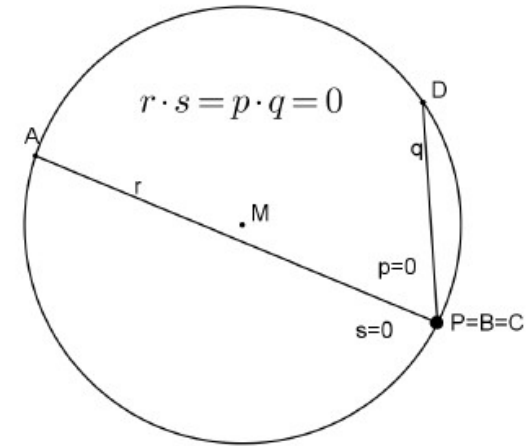
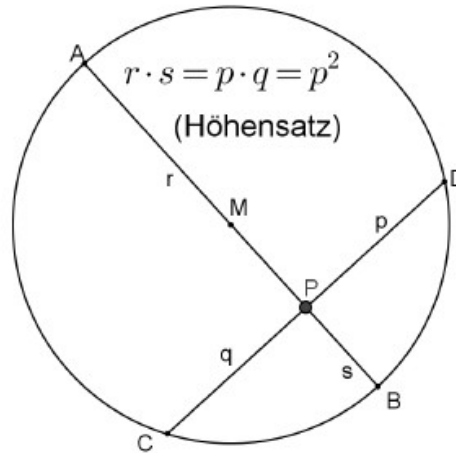
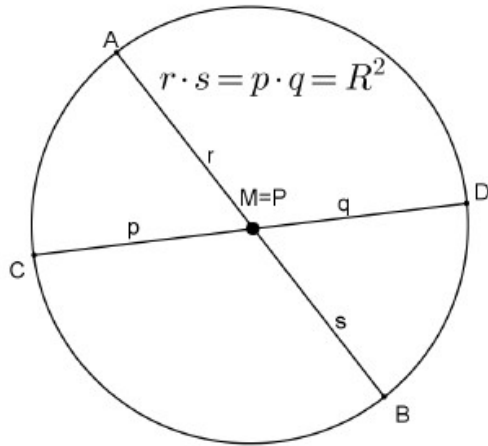
Forschungsfrage zu Beweis 4 (Sehnensatz als Werkzeug)

Gegeben: $k(M, r)$, $K(M', r')$, $EP \perp AB$, $M'P \perp GF$
 Zu zeigen: $\alpha = \beta$



Variation der Lage des Punktes P

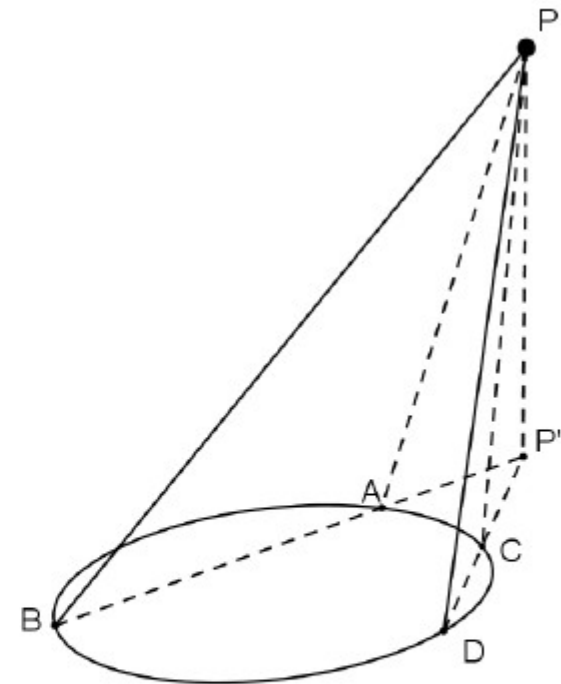
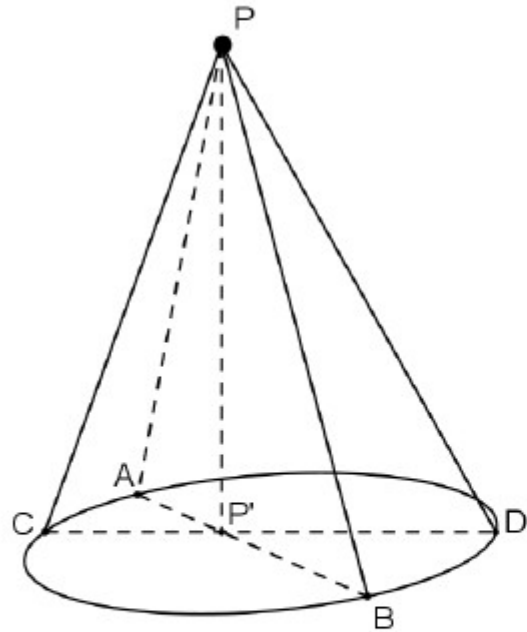
Variationen Anwendungen	Formulierungen Beweise Bedingungen
----------------------------	--



Variation der Lage des Punktes P

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen

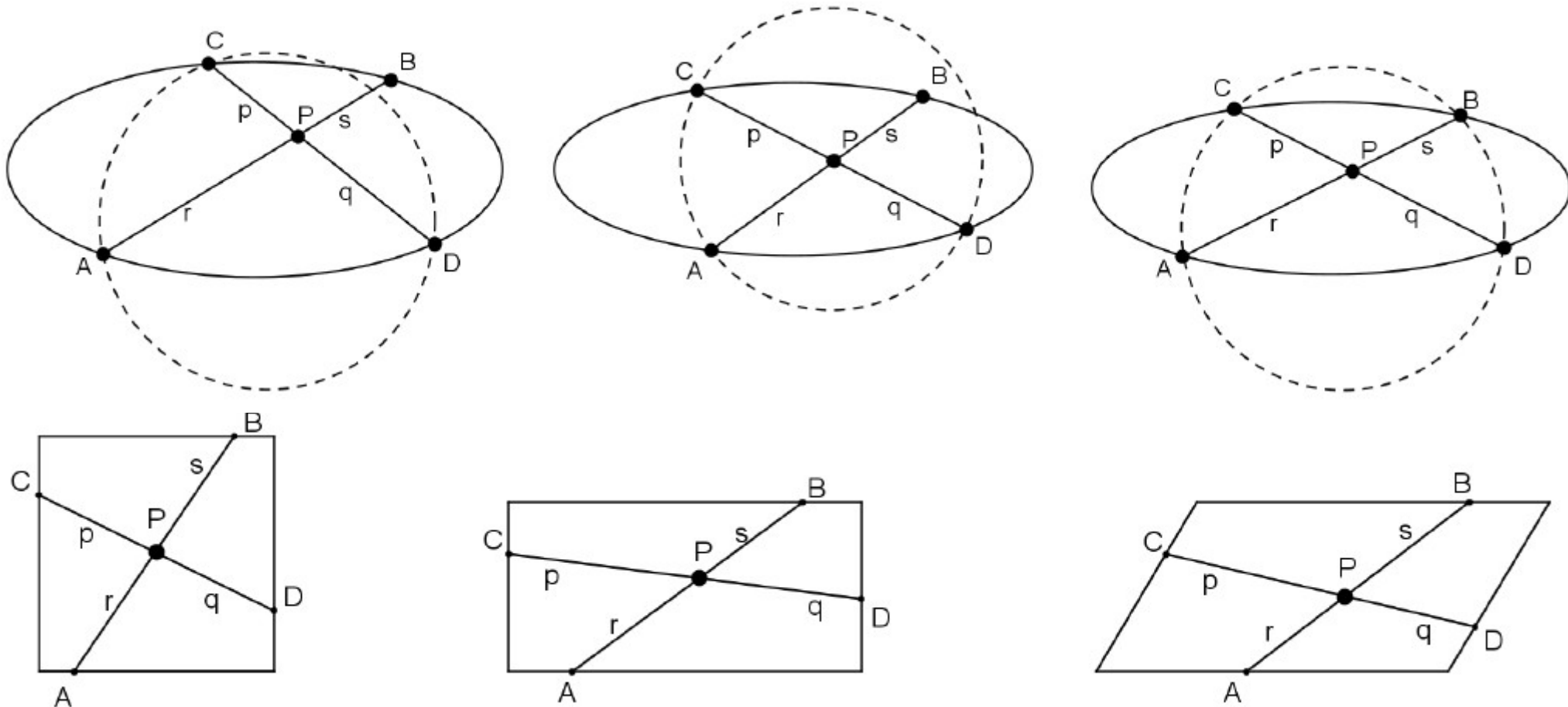


$$\text{z.B. } |AB|^2 + |CP|^2 + |DP|^2 = |DC|^2 + |AP|^2 + |BP|^2$$

Variation der „Grundfigur“ Bedingungen

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen



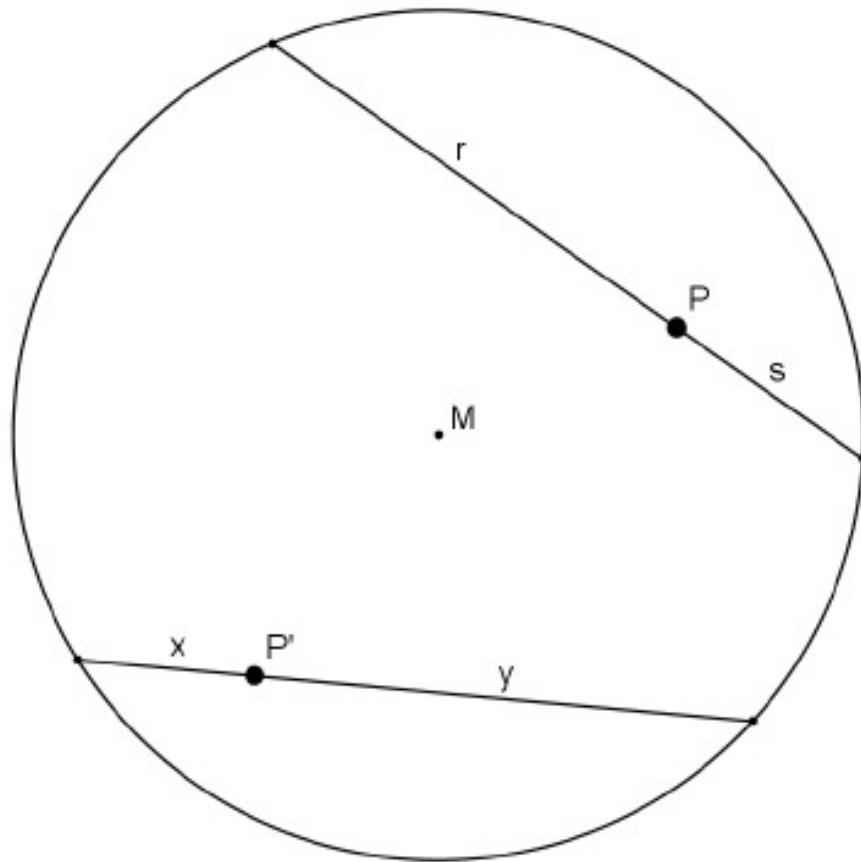
Unter welchen Bedingungen gilt

$$r \cdot s = p \cdot q!$$

Variation der Anzahl der Punkte

Variationen
Anwendungen

Formulierungen
Beweise
Bedingungen



Gegeben:

$$\mathcal{C}(M, R), P \text{ und } s \cdot r$$

Gesucht:

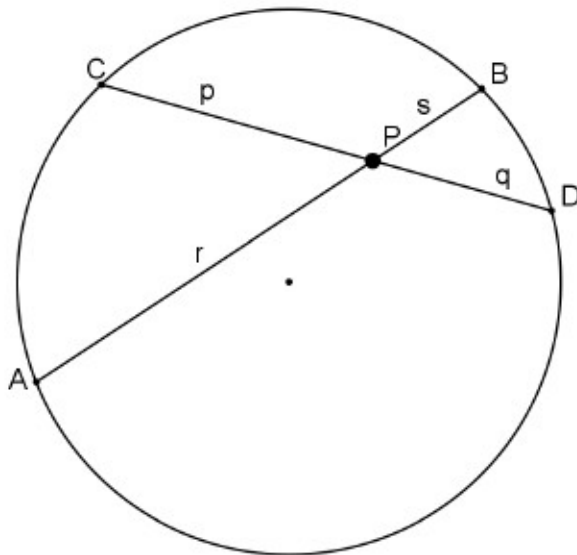
Menge aller Punkte P' s.d.

$$x \cdot y = s \cdot r$$

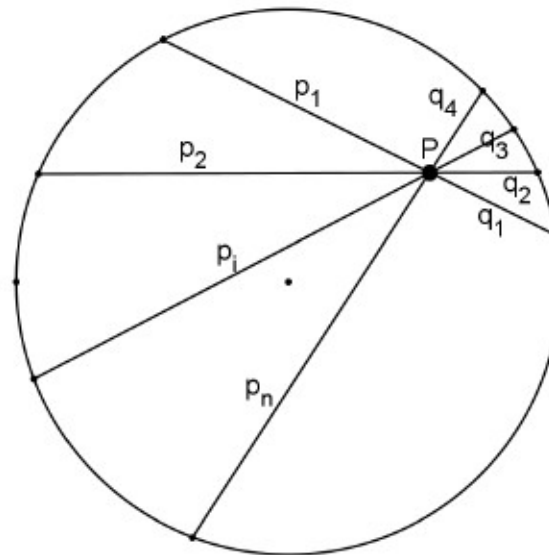
Verschiedene Fragestellungen

Variationen
Anwendungen

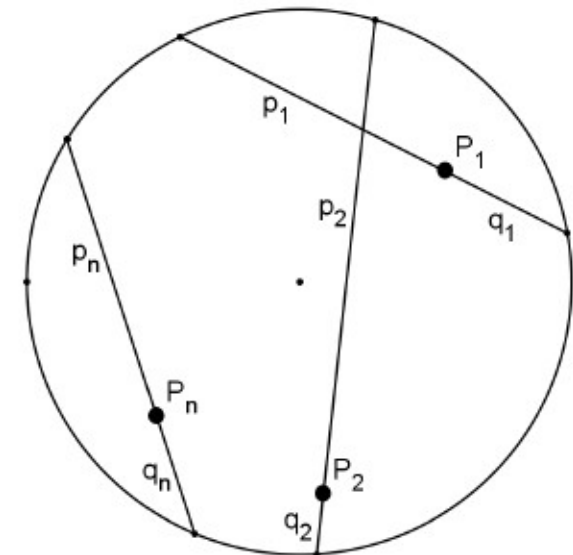
Formulierungen
Beweise
Bedingungen



$$\frac{r}{p} = \frac{q}{s}; \frac{r}{q} = \frac{p}{s}$$
$$r \cdot s = p \cdot q$$



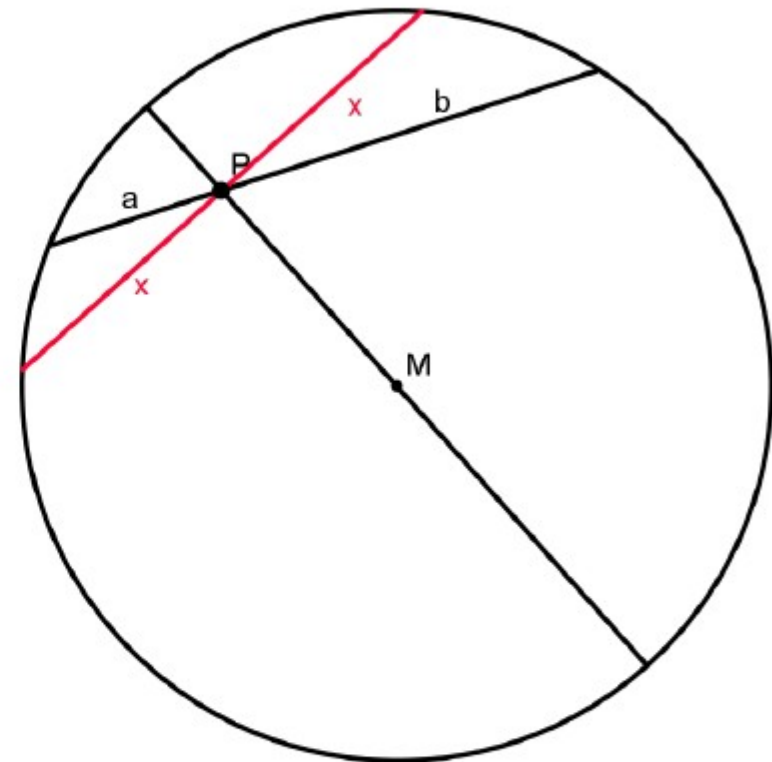
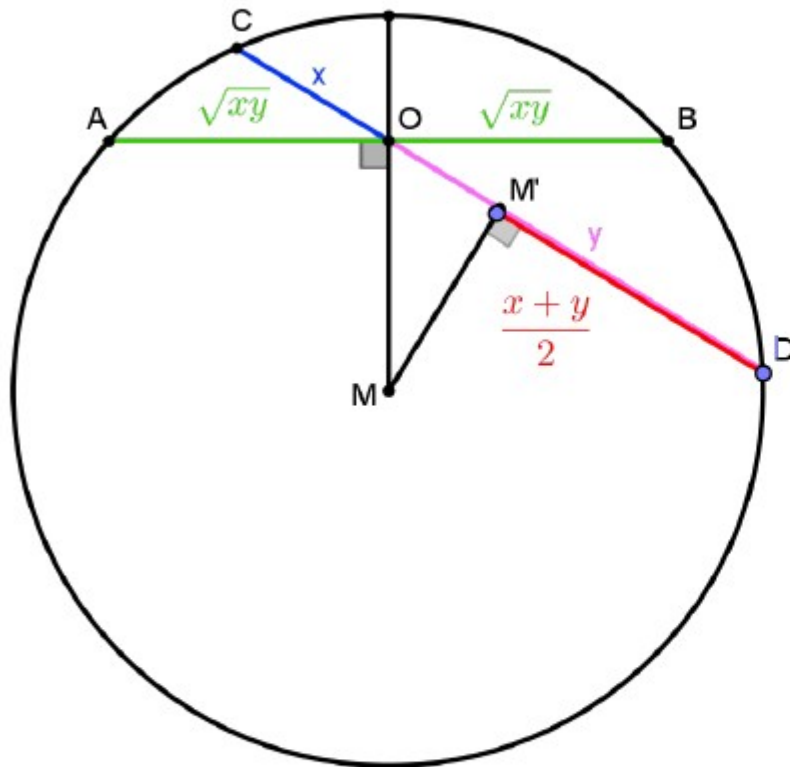
P festgelegter Punkt, z.z.
 $p_i \cdot q_i = konst.$



$P_i = ?$ s.d. $p_i \cdot q_i = max.$
(bzw. min)

Sehnensatz als Werkzeug

Variationen
Anwendungen



$$\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x + y}{2}$$

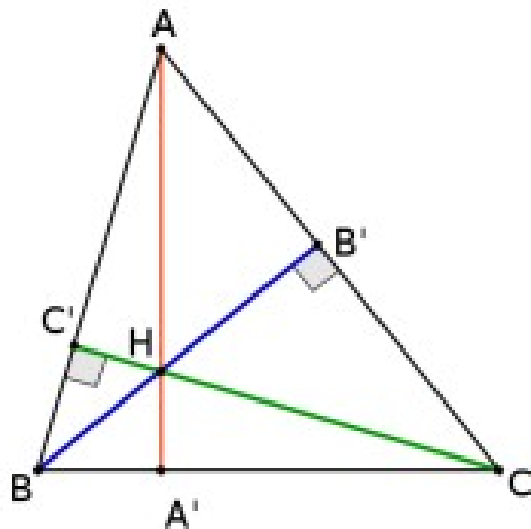
$(x, y \geq 0)$

Gegeben: $a, b \geq 0$

Gesucht: $x \geq 0$ s.d. $x^2 = a \cdot b$

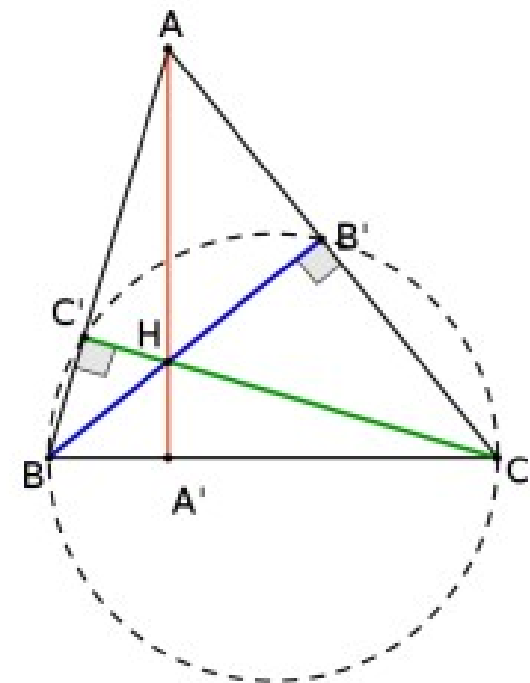
Sehnensatz als Werkzeug

Variationen
Anwendungen



z.z.

$$|HA| \cdot |HA'| = |HB| \cdot |HB'| = |HC| \cdot |HC'|$$

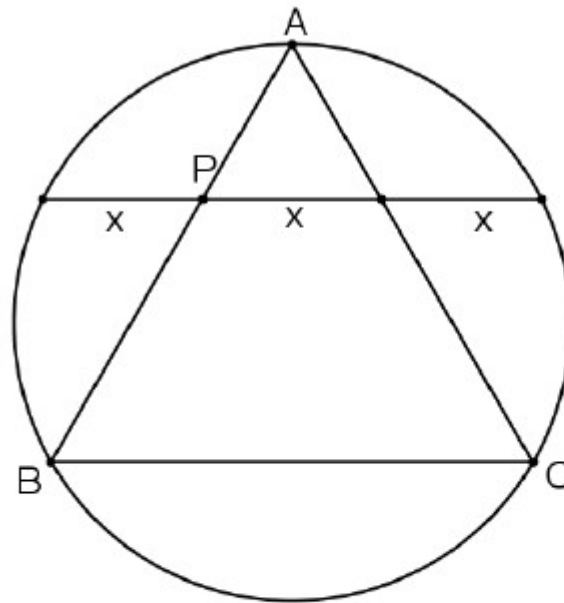


z.z.

$$|HB| \cdot |HB'| = |HC| \cdot |HC'|$$

Sehnensatz als Werkzeug

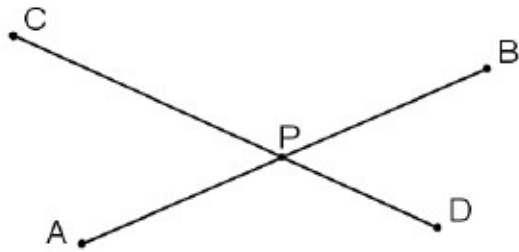
Variationen
Anwendungen



$P = ?$ (Konstruktion vs. Rechnung)

Umkehrung des Sehnensatzes

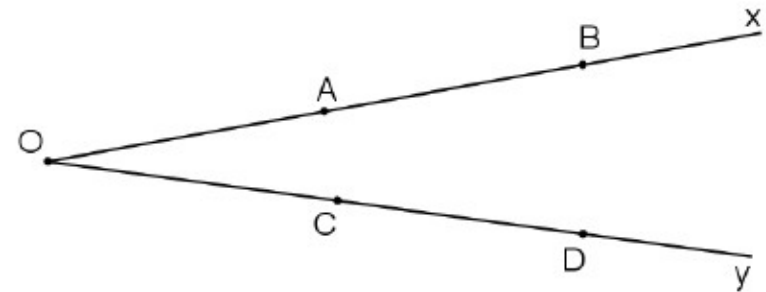
Variationen
Anwendungen



$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$

⇓

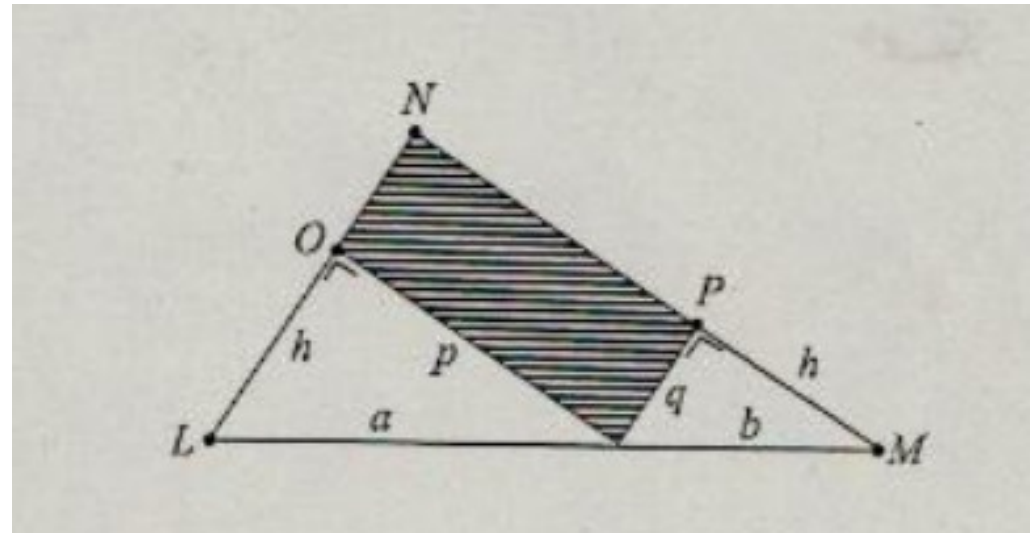
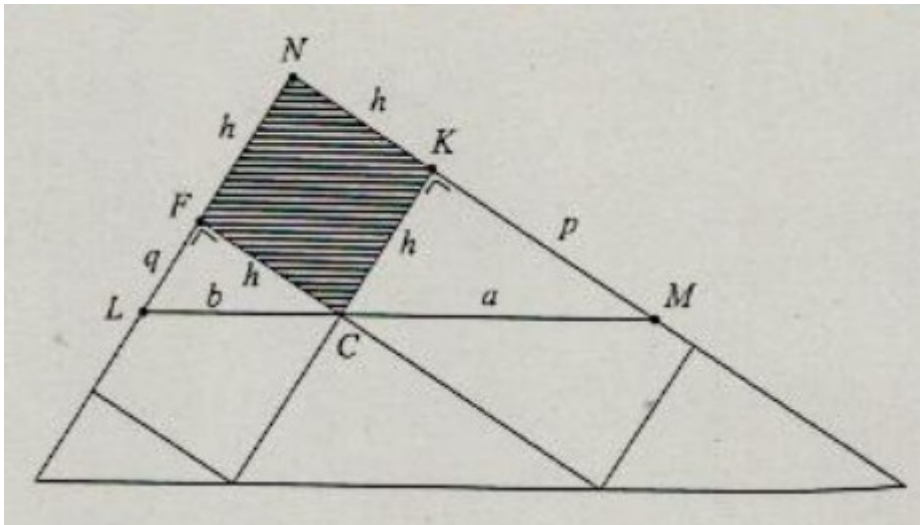
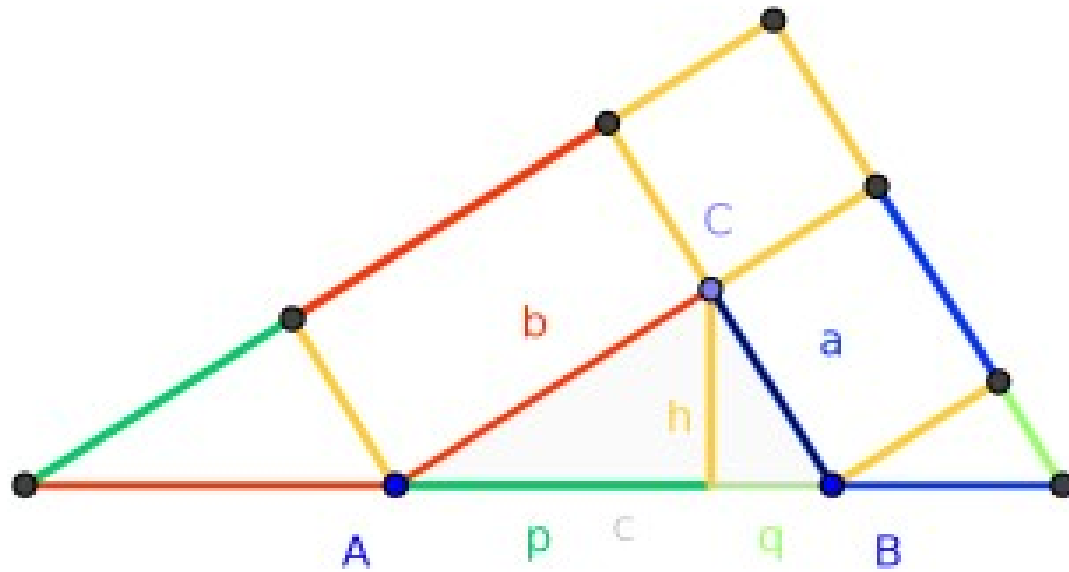
A, B, C, D sind konzyklisch



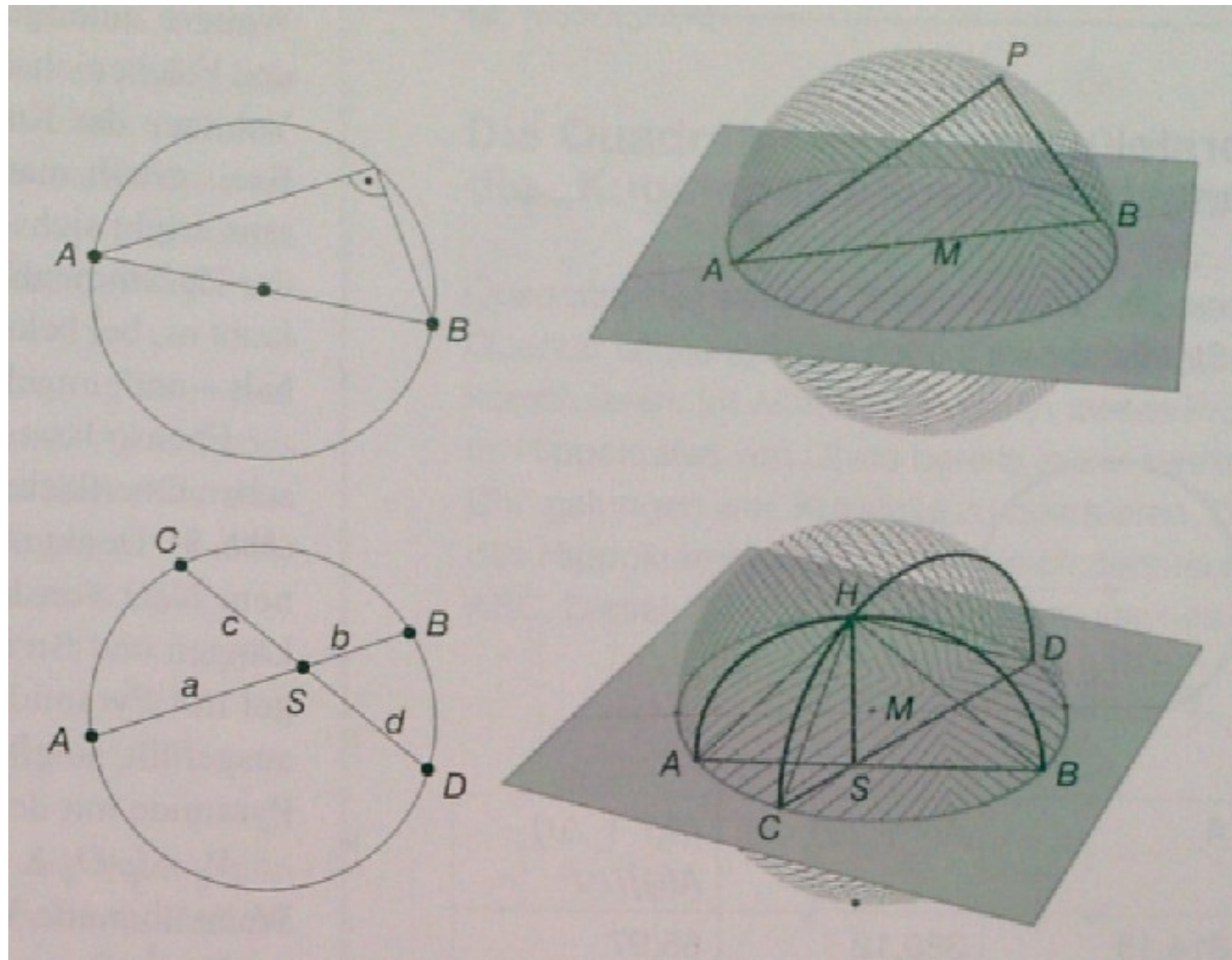
$$|OA| \cdot |OB| = |OC| \cdot |OD|$$

⇓

A, B, C, D sind konzyklisch



H. Schupp, Pythagoräische Satzgruppe und Strahlensätze, PM 5/37 1995



u.a.
 Bubeck, H. 1994
 Neubrandt, M, 1994
 Dirnböck, H. 1995
 Pickert, G. 1995
 Artmann, B.
 Schuhmann, H 2005
 Weigand, H.G. 2011

Wir danken für Ihre Aufmerksamkeit!
