

---

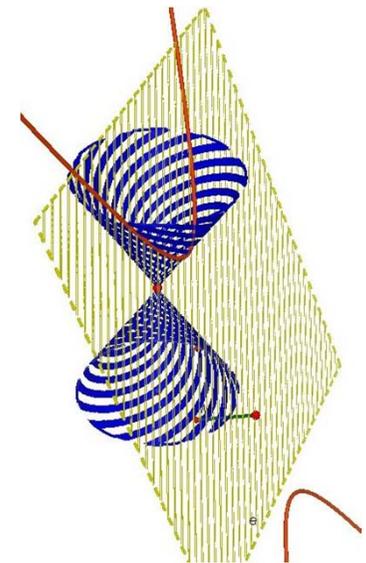
---

# Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie

---

Vortrag auf der Tagung des Arbeitskreises  
*Geometrie* der Gesellschaft für Didaktik der  
Mathematik (GDM)

vom 13.09. - 15.09.2013 in Marktbreit



# Inhalt

---

1. Zur Verortung des Vortrags
2. Empirische (Neben)Befunde und Erklärungsversuche
  - Mangel an Werkzeugkompetenzen oder fehlende Grundvorstellungen?
3. 3D-DGS: Ein kompliziertes Feld! Wie kann Theorie helfen?
  - Rabardel, vom Hofe
4. Analyse aus theoretischer Sicht
5. Mögliche Aspekte normativer Grundvorstellungen in der Geometrie
  - .... zunächst von Kreis und Orthogonale
6. Ausblick
  - ... die deskriptive Seite ist spannender, die konstruktive ein weiterer Schritt

## Verortung des Vortrags

---

- Grounded Theory: Beschreibung des Phänomens
- Phänomen: Verwendung des Zugmodus in 3D-Systemen, theoretische Zusammenhänge zu 2D, praktischer Nutzen für Raumvorstellung, Schuleinsatz,..
- Leitende Fragen:
  - Wie verhalten sich Probanden, wenn sie zum ersten Mal in 3D arbeiten?
  - Verwenden die Probanden den Zugmodus spontan?
  - Können verschiedene Zugmodi beobachtet und theoretisch beschrieben werden?
  - Unterschiede der Softwareumgebungen?
  - Sind Entwicklungen im Gebrauch des Zugmodus festzustellen?
  - Wie kann man die Verwendung des Zugmodus erlernen?

# Überblick Forschungsverlauf

---

- Design: Fallanalyse
- Qualitativer Ansatz auf Basis der Grounded Theory
- 3 Studien mit jeweils unterschiedlichen Probanden
- Studie 1: Einmalige Datenerhebung ohne Vorbereitung
- Studie 2: Vorbereitungssitzung und einmalige Datenerhebung
- Studie 3: Dreimalige Datenerhebung im Verlauf eines Semesters
  - Untersuchung 3(1)
  - Untersuchung 3(2)
  - Untersuchung 3(3)

Probanden: Lehramtsstudierende des L2/L5-Studiengangs (ca. 5.Semester)

12-15 Probanden pro Studie, ca. 6 Gruppen pro Studie

# Konkrete Untersuchungsverfahren

---

## 1. Erhebungstechniken:

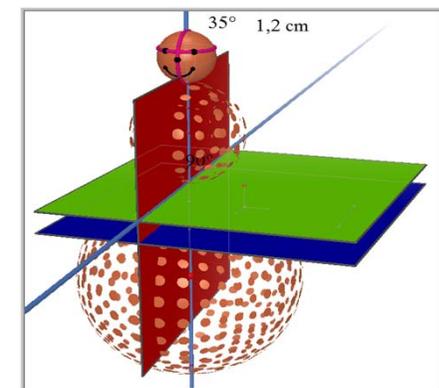
- Webcam und Screen-recording-Software Camtasia ▶

## 2. Aufbereitungstechnik:

- Zusammenfassendes/Selektives Protokoll ▶
- Teilweise kommentierte Transkription

## 3. Auswertungstechnik

- Grounded Theory... in Kombination mit quantitativen Betrachtungen
- Software Videograph ▶
- Typisierung von Nutzern (Kelle & Kluge)



## Studie 3: Aufgaben

---

### 1. Untersuchung 1 (Beginn des Semesters)

- Schwarze Boxen, Tetraederkonstruktion



### 2. Untersuchung 2 (Mitte des Semesters)

- Oktaederkonstruktion, Erkundung von Kegelschnitten

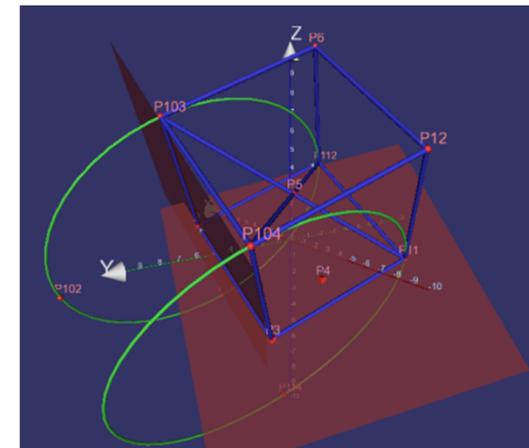


### 3. Untersuchung 3 (Ende des Semesters)

- Würfelkonstruktion, Erkundung von Würfelschnitten

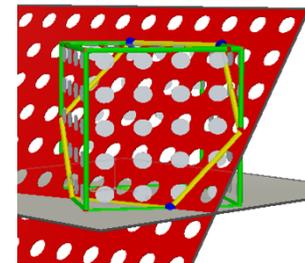
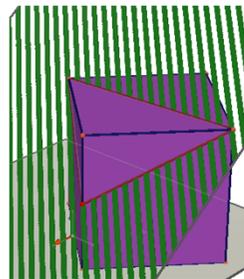
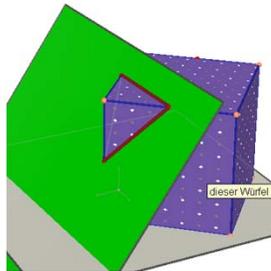
Probanden nehmen während des Semesters am Seminar

„Raumgeometrie mit 3D-DGS“ teil.

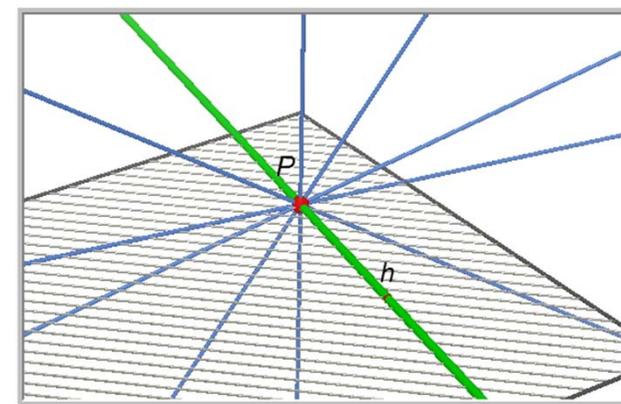
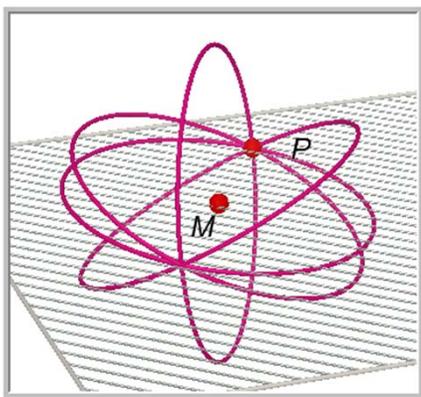


# Aufgaben und Hindernisse

- Untersuchung 3 (Ende des Semesters)
  - Würfelkonstruktion in Cabri 3D 
  - Analyse möglicher Schnittfiguren von Ebene und Würfel 



- Hindernisse: Kreise und Orthogonale in 3D



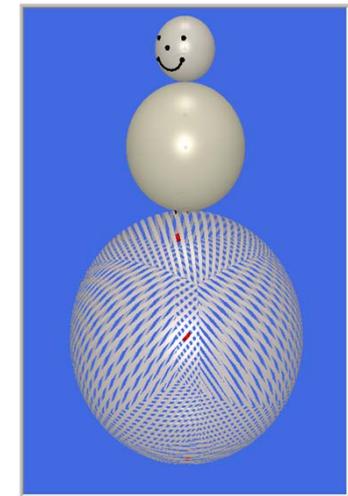
# Empirische Befunde

---

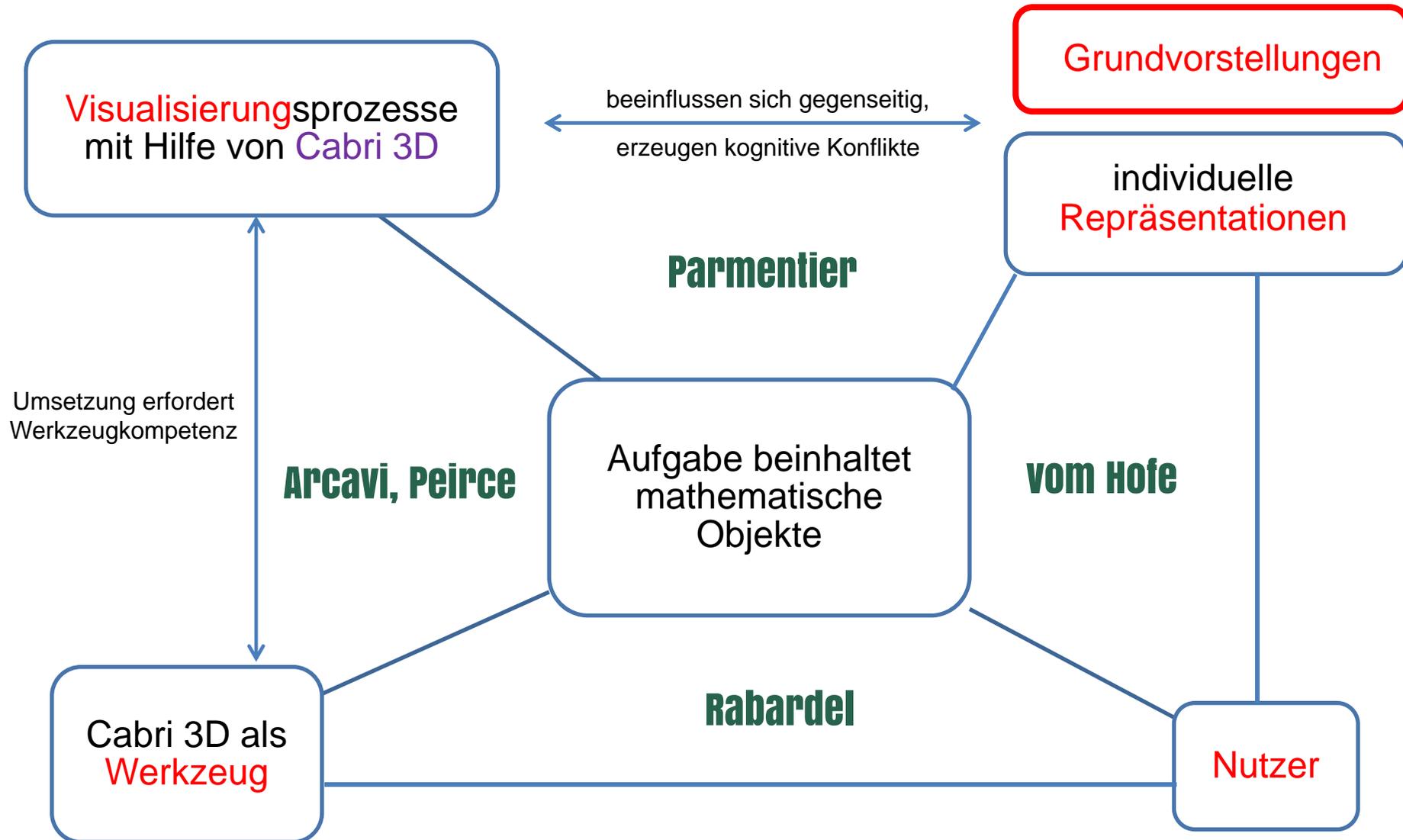
- Mehrfach identifizierte Probleme:
  - Kreiskonstruktion in 3D  
  - Konstruktion einer Senkrechten  $h$  zu einer gegebenen Geraden  $g$  durch  $P$  von  $g$  
  - Studierende benutzen zunächst Kreise anstelle von Kugeln zur Herstellung äquidistanter Abstände
- Analyse von Schnittfiguren
  - Existiert ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck als Schnittfigur von Ebene und Würfel? 

# Erklärungsversuche

- Lösungen bzw. Konstruktionen scheitern, weil...
  - mentale Repräsentationen von **2D**-Objekten dominieren.
  - mentale Schemata zur Softwarebedienung nicht entwickelt sind.
- Probanden suchen Fehler im Umgang mit Software (usage scheme), anstatt Übergänge von 2D zu 3D zu überdenken.
- Komplexes System
  - Mathematisches Problem
  - Paar von Studierenden
  - Software (als Instrument)
  - Individuelle Repräsentationen
  - Grundvorstellungen



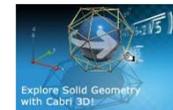
# 3D-DGS: Ein kompliziertes Feld



# Theoretische Hintergründe

---

- *Les hommes et les technologies* (Rabardel 1995)
  - ...ein instrumenteller Ansatz zur Erklärung der Einbindung von Werkzeugen
  
- Semiotik (Peirce)
  - ...Zeichentriade (Zeichen, Objekt, Interpretant, Ground)
  - ...erfordert das Nachdenken über Repräsentationen
  - ...und Visualisierungsprozesse (Arcavi)
  
- *Grundvorstellungen* (vom Hofe 1995) als Erklärung empirischer Befunde
  - ...tragfähige mentale Modelle mathematischer Inhalte



# Visualisierung

---

- „Visualization is the ability, the process and the product of creation, *interpretation*, use of and reflection upon *pictures*, images, diagrams, in our minds, on paper or with *technological tools*, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings.“

Arcavi (2003, S. 217)

- Im Kontext zur
  - Lösungsfindung mit Hilfe von Cabri 3D (Nutzer: Studierende)
  - Analyse von Konzepten, Fehlvorstellungen (Nutzer: Forscher)



# People and Technology (Rabardel)

---

- ‘An **instrument** cannot be confounded with an **artefact**. An **artefact** only becomes an **instrument** through the subject’s activity. In this light, while an **instrument** is clearly a mediator between the subject and the object, it is also made up of the subject and the **artefact**.’ (Béguin and Rabardel)

- **Instrument = Artefakt + mentales Schema**  
„**Instrumentelle Genese**“

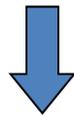


- Lehrender und Maßnahmen zum Erlernen des Umgangs mit dem Werkzeug (**instrumental orchestration**) bewusst ausgeblendet
  - **Instrumentation**: Artefakt formt das Denken des Nutzers
  - **Instrumentalization**: Artefakt wird vom Nutzer gestaltet
  - Verschiedene **Schemata** zum gleichen Artefakt
- ...somit resultieren verschiedene **Instrumente ausgehend** vom gleichen Artefakt

## Grundvorstellungen (vom Hofe 1995)

---

- Mathematischer Begriff wird nicht nur durch eine, sondern meist mehrere Grundvorstellungen erfasst.
- Im Laufe der Entwicklung:
  - **Primäre GV** werden zunehmend durch **Sekundäre GV** ergänzt.



konkrete  
Handlungsvorstellungen

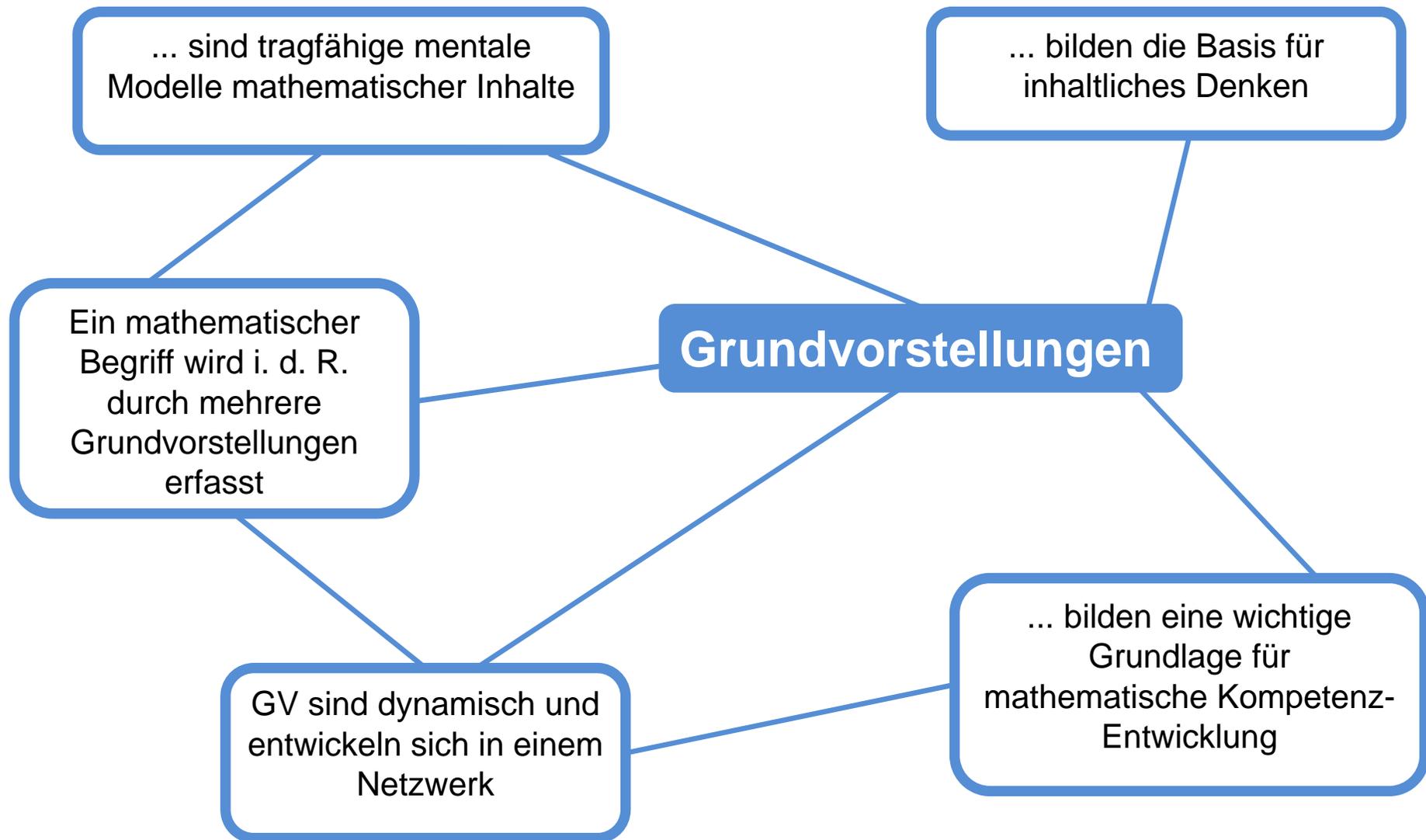


mit Hilfe mathematischer  
Darstellungsmöglichkeiten

- GV sind keine stabilen und für immer gültigen Werkzeuge!
- Ausbildung eines Netzwerks:
  - Erweiterung von alten und  
Zugewinn von neuen Vorstellungen  System mathematischer Modelle

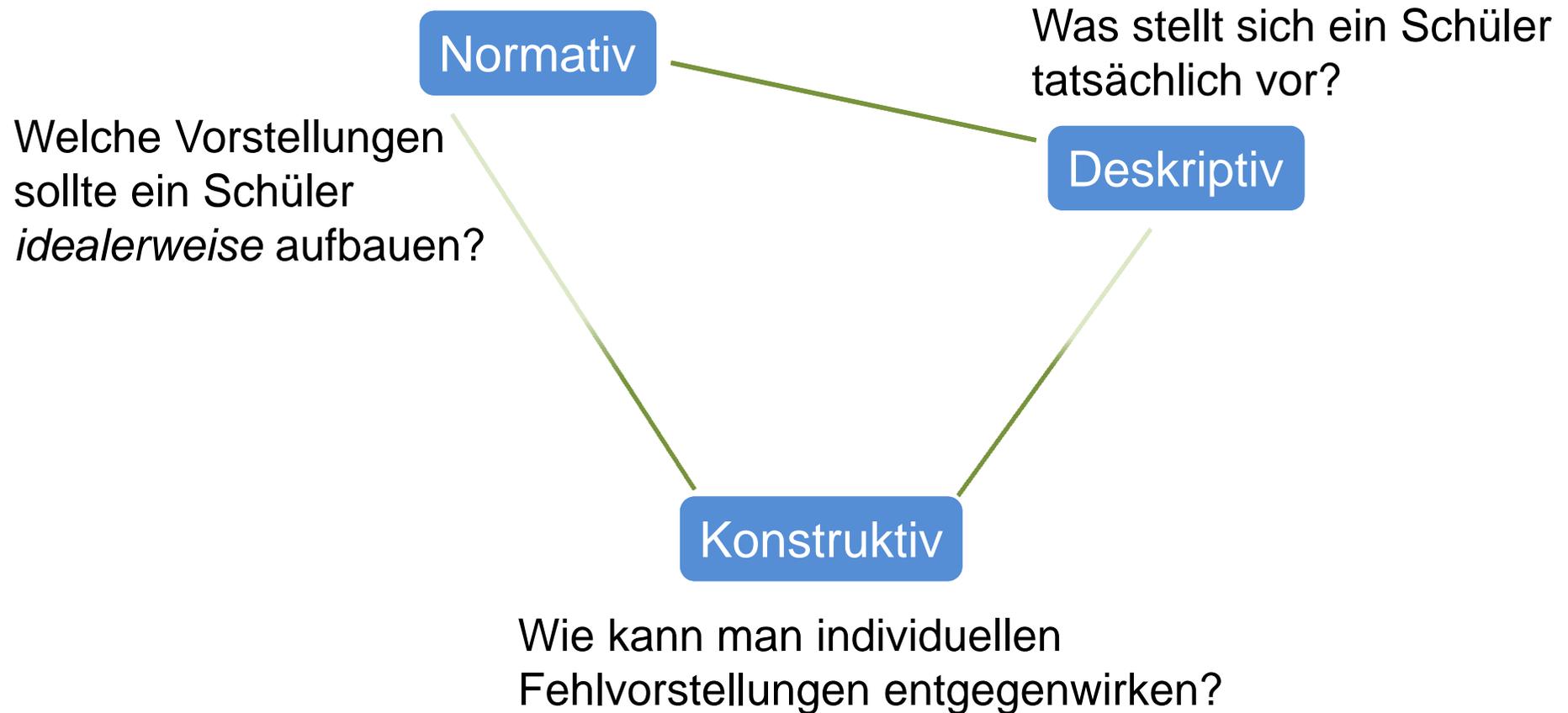
# Kernpunkte des GV-Konzepts

---

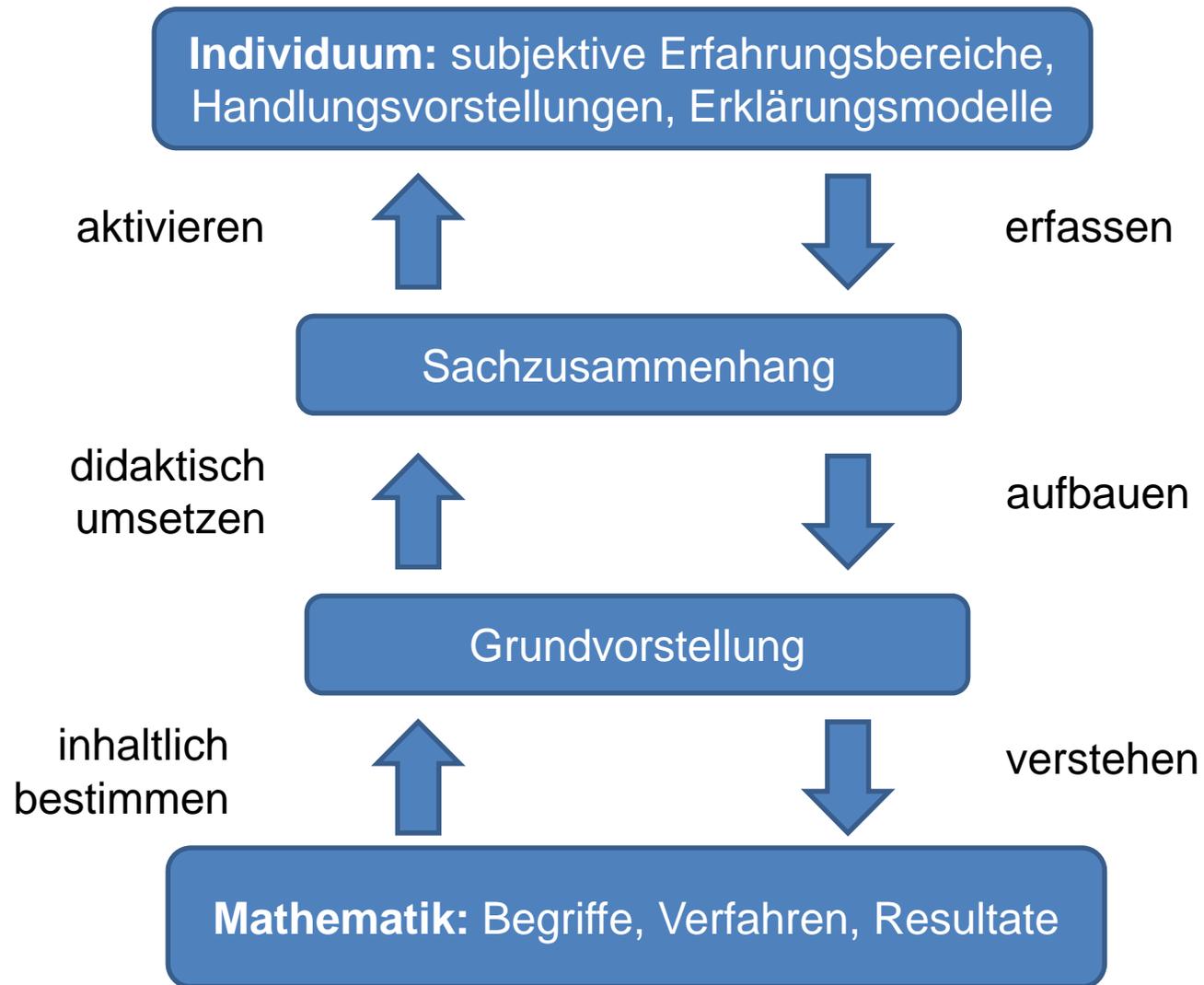


# Aspekte von Grundvorstellungen

---



# Umsetzung des GV-Konzepts



# Theoretische Analyse empirischer Befunde

---

- Mehrfach identifizierte Probleme:

- Kreiskonstruktion in 3D **GV + fehlendes Schema**



- Konstruktion einer Senkrechten  $h$  zu einer gegebenen Geraden  $g$  durch  $P$  von  $g$  **GV**



- Studierende benutzen Kreise anstelle von Kugeln zur Herstellung äquidistanter Abstände **GV**

- Analyse von Schnittfiguren

- Existiert ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck als Schnittfigur von Ebene und Würfel? **fehlendes Schema**



## Verschiedene theoretische Situationen

---

1. Nicht vorhandene Schemata aber existierende **GV**

➡ Aufbau von Werkzeugkompetenz

2. Entwickelte Werkzeugkompetenz aber keine **GV**

➡ Fragen den Übergang 2D / 3D betreffend

3. Weder Schemata noch entwickelte **GV**

➡ Experimenteller Ansatz (Zugmodus)

➡ Reflexion bzgl. **GV** ➡ Werkzeugkompetenz

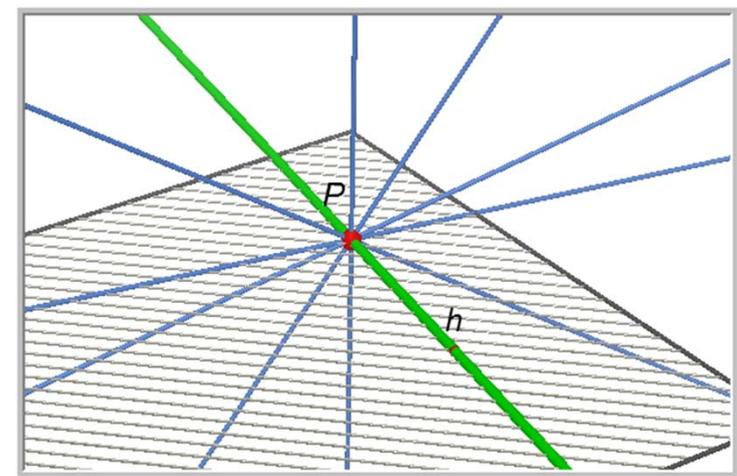
# Experimenteller Ansatz

## 3. Weder Schemata noch entwickelte GV

➔ Experimenteller Ansatz (Zugmodus)

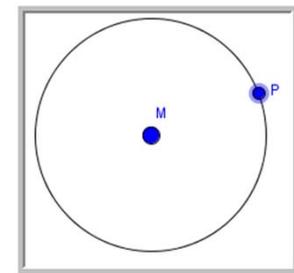
➔ Reflexion in Bezug auf GV ➔ Werkzeugkompetenz

- Experimenteller Ansatz und damit einhergehende Reflexion des 2D /3D-Übergangs ist tatsächlich beobachtbar!



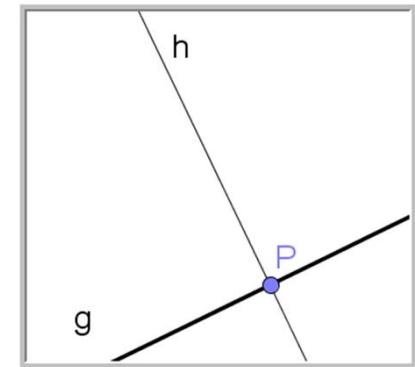
# Grundvorstellungen in 2D: Beispiel Kreis

- Mögliche Aspekte einer GV zum Kreis mit Mittelpunkt  $M = (a,b)$  und Radius  $r$ .
- Formel:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
- Definition: Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die zu einem vorgegebenen Mittelpunkt den gleichen Abstand besitzt.
- Eigenschaften bzw. weitere wichtige Begriffe:
  - Ein Kreis wird eindeutig beschrieben durch Angabe seines Mittelpunktes und eines Punktes auf der Kreislinie.
  - Ein Kreis wird benutzt, um äquidistante Abstände abzutragen.
  - Jeder Punkt  $P$  auf der Kreislinie besitzt den gleichen Abstand zum Mittelpunkt  $M$  des Kreises  $\text{dist}(M, P) = r$ .
  - Ein Durchmesser  $d$  des Kreises ist jede Strecke, die durch den Mittelpunkt  $M$  des Kreises verläuft und zwei Punkte der Kreislinie miteinander verbindet.  
 $d = 2r$ .
  - rund, besitzt konstante Krümmung, ...
- **Konstruktionswerkzeuge: Zirkel, gespannter Faden, dynamische Geometriesoftware**



# Grundvorstellungen in 2D: Beispiel Orthogonale

- Mögliche Aspekte einer GV zur Orthogonalen  $h$  zu  $g$  durch  $P = (p_x, p_y) \in g$
- Definition: Die Gerade  $h$  steht in  $P$  auf  $g$  senkrecht
- Formel:  $h: y = -\frac{1}{m_1}(x - p_x) + p_y$ , mit  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , wobei  $m_{i,i=1,2}$  die Steigungen von  $g$  bzw.  $h$
- Eigenschaften:
  - Eindeutigkeit von  $h$
  - $90^\circ$ -Winkel zwischen  $g$  und  $h$ , vier rechte Winkel
  - wird benötigt, um Abstände zu finden
  - $P$  liegt sowohl auf  $g$  als auch auf  $h$
- Konstruktionswerkzeuge:
  - Zirkel und Lineal
  - Geodreieck
  - DGS
  - Anschlagwinkel



## Fragen und weitere Ideen

---

- Arbeit an **GV** in geometrischen Kontexten (2D und 3D)
  - Ausbau von normativen Überlegungen zu geom. Objekten
  - Welche Vorstellungen haben Schülerinnen und Schüler von geometrischen Objekten? (deskriptive Ebene)
  - Welche Auswirkungen haben diese Vorstellungen auf das Lernen von Geometrie?
  - Was sollte wie geändert werden?
- ...Übergang 2D / 3D zu erleichtern
- ...Konzeption von Lernumgebungen mit und ohne DGS
- ...

**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**

---

# Literatur

---

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Hattermann, M. (2011). *Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS): Analyse von Nutzerverhalten und Typenbildung* (1st ed.). Dissertation. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Hofe, R. v. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.
- Kelle, U., & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2., überarb. Aufl.). *Qualitative Sozialforschung: Vol. 15*. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwiss.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand-Collin.