Geometrie, (Grund-) Begriffe, Vorstellungen
Fragen und Anregungen

Lothar Profke
Institut für Didaktik der Mathematik
Justus-Liebig-Universität Gießen

Warnung vorweg:

- Viele Fragen,
- einige Hinweise auf Vorhandenes,
- aber *konkrete und umfassende Vorschläge für eine Neustrukturierung des Geometrieunterrichts* werden nicht mitgeliefert;
- erst recht nicht *das Spannungsfeld zwischen Grundvorstellungen und Grundbegriffen ausgelotet*.

„Botschaften"

- Geometrieunterricht fängt in der Grundschule an.
  - Daher wäre nötig:
    ein durchgängiges gemeinsames Geometrie-Curriculum für die Primarstufe und die Sekundarstufe I
- Geometrie in der Schule entwickeln vom Raum aus
  - und „naiv" betreiben ohne eine explizite oder implizite Hintergrundstheorie
- Grundbegriffe und Grundvorstellungen dazu passend wählen
  - Grundvorstellungen können individuell geprägt (auch verschieden) sein.
  - Verschiedene Grundvorstellungen zu einem mathematischen Konzepts miteinander verknüpfen

1 Anmerkungen zum Tagungsthema

Folie 16

Tagung des GDM-Arbeitskreises Geometrie 2013

Marktbreit 2013 13.09.-15.09.

GDM

Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen

Ziele und Visionen 2020

Die Herbsttagung vom 13.-15.09.2013 wird die vierte Tagung in unserer Reihe „Ziele und Visionen 2020“ sein, die konkrete und umfassende Vorschläge für eine Neustrukturierung des Geometrieunterrichts liefern soll. Begonnen haben wir diese Reihe mit Werkzeugen für den Geometrieunterricht (2010), gefolgt von Vernetzungen und Anwendungen (2011), 2012 machten wir uns auf den Weg zur Begriffsbildung, und dieses Jahr wollen wir das Spannungsfeld zwischen Grundvorstellungen und Grundbegriffen ausloten.

Dabei sollen insbesondere die folgenden Aspekte diskutiert werden:

- Bezüge der Geometriedidaktik zu den Bezugswissenschaften,
- Externe und interne Repräsentationen von Schülerinnen und Schülern bei der Entwicklung geometrischer Grundvorstellungen,
- Kreativität im Geometrieunterricht,
- Genese der Geometrie.

Zurück zum Mathematikunterricht der 1960er Jahre?

- ***Grundbegriffe der Geometrie*** hat man bei Axiomensystemen.
- Das erinnert an den Zeitraum ≈ 1960 - 1975:
  - Systematischer Aufbau der Geometrie aus Grundbegriffen und Grundannahmen im gymnasialen Mathematikunterricht der Mittelstufe
    - » nach einer geometrischen Propädeutik in Sexta und Quinta.
    - » Speziell: Entwicklung der ebenen Geometrie anhand zugelassener Zeichengeräte

      (H. Prade 1966, L. Profke 1976)
  - Gleichzeitig und auch noch darnach:
    - » Entwickeln geeigneter Hintergrundstheorien für den Unterricht an Schulen und Hochschulen:
      - ∗ H.-G. Steiner 1966, H. Starke - W. Türke 1971/74, A. Kirsch 1972, G. Holland 1974/77 und manch anderer

- Ziele (damals)

  (wenigstens für gymnasialen Unterricht, aber nicht nur)
  - Geometrische Propädeutik in Sexta und Quinta (Klassen 5, 6) überführen zu strengerem geometrischen Denken darnach
  - Mathematikunterricht angleichen an angeblich „moderne Mathematik“

- Diese Programme haben sich nicht „nachhaltig“ durchsetzen können.

Folie 15

Nürnberger Lehrpläne des **Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts**.
MNU **XVIII**(1965/66), Heft 1/2, S. 1 - 8

I. Präambel

... Wenn das Gymnasium die Aufgabe hat, zur Hochschulreife zu erziehen, dann muss der Abiturient mit den Grundzügen des Begriffsnetzes seiner Fächer vertraut sein, wenn er die Hochschule bezieht. Auf der anderen Seite sollte der junge Lehrer , der von der Hochschule kommt, seine dort erworbenen Kenntnisse auch auf der Schule verwerten können und nicht gezwungen sein, um Jahrzehnte in der Entwicklung seiner Wissenschaft zurückstecken zu müssen.

Vgl. auch
Athen, H.: *Die Modernisierungstendenzen im Nürnberger Rahmenplan für Mathematik*.
MU **12**(1966); Heft 3, S. 87 - 106

II. Rahmenplan für Mathematik

0. Vorbemerkungen

0.1 Wesen und Aufgabe des Mathematikunterrichts

...

Die Schüler auf elementarer Stufe die verschiedenen Aspekte der Mathematik erfahren zu lassen, ihnen dabei Fertigkeiten, Kenntnisse sowie fundamentale Einsichten zu vermitteln und ihre schöpferische Kraft zu wecken, ist die erste Aufgabe des Mathematikunterrichts.

Die Mathematik ist die konsequente Ausprägung kontrollierbaren Denkens, ...

Die der Mathematik eigene Sprache, ihre exakten analytische Verfahren und die von ihre geschaffenen begrifflichen Schemata ...

Mathematik ist die geistige Grundlage der exakten Naturwissenschaften und der auf sie gegründeten Zivilisation und Technik. ...

0.2 Inhalt des Mathematikunterrichts

...

Die Mathematik beschäftigt sich mit strukturierten Gebilden ...

Diese Auffassung der wissenschaftlichen Mathematik gibt auch dem mathematischen Schulunterricht ein neues Verhältnis zu seinem Inhalt. Auch in ihm kommt es wesentlich darauf an, die jeweils zugrunde liegenden Objektbereiche als Mengen zu erfassen, auf ihnen gegebene Strukturen herauszuarbeiten, den Aufbau der Mathematik als gedankliche Konstruktion von Gebilden aus vorgegebenen einfacheren zu verstehen und die nötigen logischen Hilfsmittel zu entwickeln.

...

0.23 Strukturen. Strukturen werden schon frühzeitig erkannt (und später durch Axiomensysteme klassifiziert) ...

2. Stoffplan der Mittelstufe

...

2.1 Arithmetik und Algebra

...

2.1.1 Zusammenfassende Erarbeitung des Mengenbegriffs und einfacher Mengenoperationen und -relationen ... – Aufbau der Grundbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ (Leitgedanke: Axiome für den angeordneten Körper) ... – Äquivalenz algebraischer Terme im Sinne der Einsetzungsgleichheit und der Umformbarkeit nach den Körperaxiomen ...

2.2 Geometrie

2.2.1 Entwicklung der ebenen euklidischen Geometrie aus dem Abbildungsbegriff, später auch aus dem Kongruenzbegriff. Übergang zu einem angemessenen deduktiven System ...

OECD (Hrsg.): *Synopsis für moderne Schulmathematik*. Frankfurt a.M.: Diesterweg ²1974 (aus dem Vorwort)

Die Schule wird sich mehr und mehr der schnellen Entwicklung anpassen müssen, die von der Hochschulmathematik in den letzten Jahrzehnten vorgezeichnet worden ist. Nur wenn es gelingt, den Phasenunterschied zwischen der Schul- und Hochschulmathematik wieder auf ein erträgliches Maß zurückzuführen, wird es des studierwilligen Abiturienten auch wieder möglich sein, den Zugang zu einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium leichter zu finden als es heute noch der Fall ist.

enthält auf S. 172 - 183 einen unveränderten Nachdruck von →

KMK: *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen*. Beschluss vom 03.10.1968

I. Gründe für die Modernisierung des Mathematikunterrichts

1. Der Fortschritt in der Mathematik und das Eindringen moderner mathematischer Betrachtungsweisen in Wissenschaften, die für Wirtschaft, Gesellschaft und Staat von Bedeutung sind, machen eine Modernisierung des Mathematikunterrichts an allen Schulen notwendig.

...

3. Der Lehrermangel in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen muss beseitigt werden. Das wird gelingen, ...

...

4. Unser wirtschaftliches Wachstum hängt davon ab, daß hinreichend viele mathematisch, naturwissenschaftlich und technisch gut ausgebildete Menschen zur Verfügung stehen. ...

II. Die Modernisierung des Mathematikunterrichts

1. Der moderne mathematische Unterricht wird in neue Betrachtungs- und Denkformen sowie deren Schreib- und Sprechweisen - möglichst auch in traditionellen Stoffgebieten - einführen. An dem zu lehrenden Stoff muss stärker als bisher die Fähigkeit entwickelt werden, mathematisch zu denken und mathematische Wege selbständig zu beschreiten.

...

2. ... Tragende Grundbegriffe wie Menge, Abbildung und Struktur (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum) müssen an geeigneter Stelle immer wieder verdeutlicht werden. ...

3. ... Die Schule muss an die axiomatisierende Methode heranführen. ...

Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht

...

Folie 7

Aufgaben der Geometriedidaktik

- Antworten und Lösungen suchen zu:
  - Was soll und was kann Geometrieunterricht bewirken
    - » unter Berücksichtigung von Schulstufe und Schulart?
  - Staatliche Vorgaben kritisch hinterfragen und gegebenenfalls Verbesserungs- und Änderungsvorschläge entwickeln
  - Aber auch: Lehrer ausrüsten und unterstützen zum Erfüllen derzeitiger stattlicher Vorgaben.

  Zum Beispiel:
    - » Wie sollen Schüler Geometrie treiben?
    - » Braucht man hierfür Grundbegriffe, welche?
    - » Welche Grundvorstellungen eignen sich für welche geometrischen Konzepte?
- *Ziele und Visionen 2020*
  - Welche Fortschritte erbrachten die Herbsttagungen ab 2010?

2 Grundbegriffe und Grundvorstellungen: Fragen

Welche Grundbegriffe sollen es sein?

- Diese liegen ja nicht eindeutig fest,
  - weder in der mathematischen Disziplin Geometrie
  - noch im Geometrieunterricht.
- Welche Hintergrundstheorien eignen sich besonders für die Schule
  - und davon abhängend (die) Grundbegriffe?
  - Muss man dabei Schulstufe und Schulart berücksichtigen?
    - » Geometrieunterricht beginnt schon in der Primarstufe.
    - » Unterschiedliche Ziele und Anforderungen in Gymnasien, „Real-" und „Hauptschulen"
  - Einfluss zu behandelnder Inhalte?
  - Auswirkung angestrebter (Bildungs-) Ziele?

- Braucht man für den Geometrieunterricht ausgewiesene (explizite) Grundbegriffe?
  - Grundbegriffe
    - » nicht im Sinne einer axiomatischen Theorie,
    - » aber doch im Unterricht nicht „weiter hinterfragt",
    - » grundlegende Begriffe für das Lehren und Lernen von Geometrie in der Schule
  - Fragen zur Methodik
    - » Wann führt man solche grundlegenden Begriffe ein?
    - » Worauf kann oder soll man diese Begriffe stützen?

- Durch einen stoffmethodischen Zugang wählt der Lehrer (bewusst oder unbewusst) Grundbegriffe und Grundvorstellungen aus:
  - Geometrie des Zeichenblattes oder von räumlichen Körpern,
  - mehr „euklidisch" oder etwas „abbildungsgeometrisch",
  - „traditionell" oder gemäß „operativer Genese"

    (vgl. P. Bender 1978, K. Krainer 1982, D. Volk 1984, P. Bender & A. Schreiber 1985),
  - Gebrauch von Werkzeugen
    - » zugelassenen realen und idealen Konstruktionsoperationen,
    - » Zeichengeräte, DGS, Papierfalten, geometrische Modelle, ...
  - nur im Klassenzimmer oder auch in „freier Natur"

Grundvorstellungen

- Wie „erzeugt" der Lehrer im Schüler Vorstellungen zu geometrischen Sachverhalten?
  - Vgl. etwa G. Holland 2007 zum Begriffserwerb
- Welche Vorerfahrungen von Kindern lassen sich nutzen?
  - Freizeitbeschäftigungen von Kindern
  - Geometrieunterricht in der Grundschule
    - » Fortsetzen im Geometrieunterricht weiterführender Schulen?
  - Geometrische Inhalte anderer Schulfächer
    - » Wie bezieht sich der Geometrieunterricht darauf?
  - Geometrische Inhalte außerhalb der Schule:
    - » Spielzeug, Verpackungen, Computerspiele, Sport, …

3 Geometrie in der Schule

Ziele von Geometrieunterricht
Sichtweisen von Geometrie

(Bildungs-) Ziele von Geometrieunterricht

- Antworten zu Fragen wie in **2** und dementsprechende Entscheidungen hängen davon ab,
  - was Geometrieunterricht bewirken soll und
  - was tatsächlich erreicht wird.
- Allgemeine Ziele in Bildungsstandards, Kerncurricula, … als Forderungen für Geometrieunterricht?
  - *Überfachliche Kompetenzbereiche:* personale Kompetenz, Sozialkompetenz, Lernkompetenz, Sprachkompetenz
  - *Kompetenzbereiche des Faches:* Darstellen, Kommunizieren, Argumentieren, Umgehen mit symbolischen, formalen und technischen Elementen, Problemlösen, Modellieren

Hessisches Kultusministerium: *Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Sekundarstufe I – Realschule. Mathematik*. Wiesbaden. 2011, S. 9 f., 13 f.

Alles nicht spezifisch für Geometrieunterricht.

- Welche dieser Ziele (*Kompetenzen*) lassen sich auch bei anderen Fächern anstreben, und dort vielleicht sogar besser erreichen?

- Andererseits
  - Wenn schon Geometrieunterricht verpflichtend ist, welche der allgemeineren Ziele passen zu ihm?
  - Bildungsstandards, Kerncurricula, … bieten keine neuen Ideen und Zugänge
    - » Inhaltsfelder zu *Raum und Form*, *Größen und Messen*

Hessisches Kultusministerium 2011, S. 19 f.

- Auslegung von Zielvorgaben:
  - Inhaltlich durch Schulbücher (materiale Bildung)
  - Methodisch oft durch Traditionen (formale Bildung)

Anforderungen des „praktischen Lebens“

- Ein rudimentäres Raumvorstellungsvermögen und das Berechnen geometrischer Größen in einfachen Situationen genügen wohl !?
  - Vgl. Stiftung Rechnen: *Studie Bürgerkompetenz Rechnen. Ergebnisbericht*. 2013 (U. Kortenkamp, A. Lambert)
    - » 30 Aufgaben insgesamt,
    - » davon nur 3 zur Geometrie (Einschätzung der Autoren),
    - » noch 6 weitere haben Beziehungen zur Geometrie.

Rückblick auf 1974 ff.

Vollrath, H.-J.: *Geometrie im Mathematikunterricht – Eine Analyse neuerer Entwicklungen*. Schriftenreihe IDM Bielefeld Heft 3/1974, 1 - 22

These 1: Für die Entwicklung eines differenzierten Curriculums sollten die Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler Vorrang haben gegenüber den Interessen und dem Geschmack der Lehrer.

These 2: Ein differenziertes Curriculum, das die verschiedenen Bedürfnisse und Fähigkeiten der Schüler befriedigt, kann nicht dadurch entwickelt werden, daß man die geometrischen Hintergrundstheorien als Organisationsprinzip variiert.

These 3: Differenzierte Curricula können dadurch gefunden werden, daß man die Leitlinien entsprechend den verschiedenen Sichtweisen von Geometrie ändert.

These 4: Nur wenn es gelingt, für den Geometrieunterricht differenzierte Curricula zu entwickeln, wird man es rechtfertigen können, allen Schülern Geometrieunterricht im Rahmen eines allgemeinen mathematischen Unterrichts zu erteilen.

• Sichtweisen (*Aspekte*) von Geometrie (Mathematik)

Becker, G.: *Geometrieunterricht*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt 1980, Kap. 1 *Zum Unterrichtsgegenstand Geometrie*

1. *Mathematik als streng apriorische Wissenschaft*
2. *Geometrie als Theorie des Raums*
3. *Mathematik als allgemeine und abstrakte Disziplin*
4. *Geometrie als Vorrat für Modelle*
5. *Mathematik als maximal objektivierter Wissensbereich*
6. *Geometrie als Betätigungsfeld für heuristische Aktivitäten*
7. *Mathematik als begrifflicher Wissensbestand*
8. *Mathematik als Vorrat für Handlungsanweisungen*
9. *Mathematik als Bereich autonomen Verhaltens*
10. *Mathematik als Bereich streng reglementierten Verhaltens*

≈

Holland, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren. Hildesheim/Berlin: Franzbecker ³2007*, Abschnitt **1.2**

Entscheidungen (Profke)

- Geometrie „naiv“ betreiben ohne eine explizite oder implizite Hintergrundstheorie
  - wie Geometrieunterricht in mathematisch-naturwissenschaftlichem Gymnasium 1950 - 1960
    - » Vgl. A. I. Wittenberg 1963
    - » L. Profke 1996, 1999, 2012
- Kein Trennen zwischen *propädeutischer Vorstufe* und strengem *systematischem Lehrgang*
- Von der Geometrie des Raumes zur ebenen Geometrie
  - *Formenkunde* vor *Formenlehre*
    - » Vgl. W. Lietzmann 1912 / 1985; P. Treutlein 1912 / 1985;

Folie 29

Wittenberg, A. I.: *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach*. Stuttgart: Klett 1963, S. 72

Worum handelt es sich in der Geometrie? Um die Untersuchung der Figuren, die wir mit Zirkel und Lineal in unser Heft oder auf die Tafel zeichnen können und die wir in der Welt um uns, an unseren Feldern und Häusern und Gebrauchsgegenständen, entdecken.

Man beachte: Es ist weder von Axiomen und Beweisen die Rede, noch von idealen Figuren, von Punkten ohne Dicke und Linien ohne Ausdehnung. Beides wäre hier unmotiviert, ohne innere Notwendigkeit dem Schüler aufgezwungen, und daher fehl am Platz. Insbesondere braucht auch nicht vorweggenommen zu werden, auf welche Weise jene Untersuchung vor sich gehen soll. Sie wird zunächst einfach unternommen – die passenden Methoden werden sich im Zuge derselben ergeben.

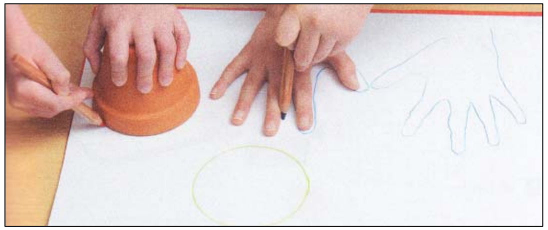
- Rechtfertigungen
  - Geometrieunterricht beginnt in der Primarstufe.
  - Vor und außerhalb von Schule können Kinder geometrische Erfahrungen sammeln.
  - *Theorie „des“ idealen Anschauungsraums* im Alltag?
    - » Zum Beschreiben und Berechnen geometrischer Sachverhalte braucht man keine solche Theorie.
      - ∗ Man benutzt geometrische Konzepte „ganz naiv“, also ohne bewusstes Abstrahieren von allem Materiellen und Idealisieren (Hineinsehen vollkommener Eigenschaften).
      - ∗ Vgl. H. Freudenthal 1983; L. Profke 2012
    - » Ebenso meistens beim „geometrischen“ Zeichnen und beim Herstellen nach Konstruktionsplänen.
      - ∗ Sollte es Passungsprobleme beim Herstellen materieller Gegenstände geben, *kann* dies Anlass sein, über ideale geometrische Konzepte nachzudenken.
  - Die Nachhaltigkeit strengen Geometrieunterrichts ist gering.

4 (Grund-) Begriffe und Grundvorstellungen heute

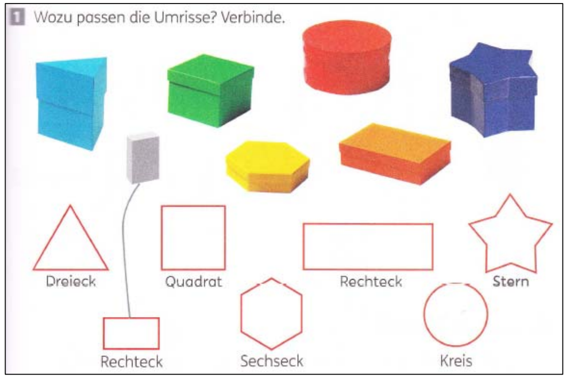
Geometrie in der Grundschule

Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N. (Hrsg.): *Das Zahlenbuch 1 -4*. Stuttgart: Klett 2012 - 2013

- Körperformen als „Grundbegriffe“
  - Ebene Figuren von Körpern abgelöst
  - Bereits hier unbewusst abstrahieren vom Materiellen und Idealisieren zu geometrischen Formen (?)



Das Zahlenbuch 1, S. 33



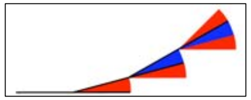
– (Primäre) Grundvorstellung zu Kreisen in der Zeichenebene

» Hier nicht so:

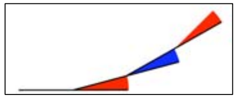
Kreis(M;r) := { P | abst(M;P) = r }

» Sondern so (vgl. H. Walser 2011/2012):

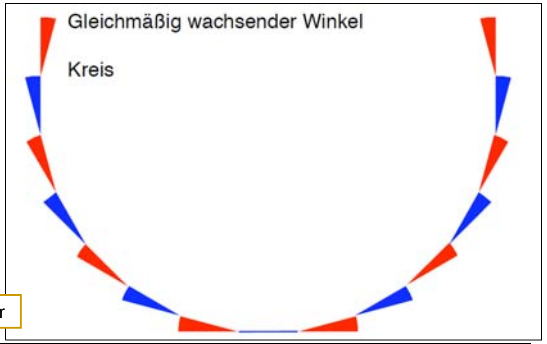
Kreise sind überall gleich gekrümmt.



Kreise gehen oder fahren



… und wie im Anschauungsraum?



© H. Walser


1 Finde Kugeln in der Umwelt.
2 Welche Eigenschaften hat die Kugel, welche der Würfel? Vergleicht.
3 Stellt selbst Kugeln her und baut eine Pyramide. Wie viele Kugeln braucht ihr?

Das Zahlenbuch 2, S. 64

– (Primäre) Grundvorstellung zu Kugeln

» Also nicht so:

Kugel(M;r) := { P | abst(M;P) $\leq$ r }

Kugelmittelpunkt nicht erkennbar und materiell nicht immer vorhanden.

» Sondern (?)

Kugeln rollen in jede Richtung gleich gut.

– Welche Vorstellungen gehören dazu?

» Kugeln haben beliebig viele Drehsymmetrien.

» Alle ebenen Schnitte von Kugeln sind Kreisscheiben.

» „Schönes" Aufwickeln eines Wollfadens zu einer Wollkugel

– Problem:
Verknüpfe möglichst zwanglos alle Vorstellungen miteinander.

Folie 37

Industrielles Herstellen von Kugeln

- Metallkugeln
  1. Drehzylinder von einem Draht abschneiden
  2. Presse aus zwei Halbkugeln verdichtet und formt roh zur Kugel
  3. Entgraten der Rohkugeln
  4. Feinschliff zwischen horizontalen Platten mit Schmirgelsand
  5. Sortieren der fertigen Kugeln nach Größe
- Steinkugeln
  – Rohlinge rollen auf Sand, angetrieben durch fließenden Wasser, und schleifen sich allmählich selbst zur Kugel

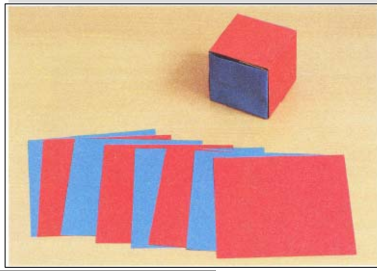
– Quader

Das Zahlenbuch 2, S. 49

5 Körper, die so aussehen wie diese Ziegelsteine, nennt man Quader.

Finde Quader in der Umwelt.

- Vorstellungen ausformen beim Herstellen
  - Würfel
    - » Quadrate durch Falten hergestellt



Zum Falten des Würfels brauchst du 8 Quadrate.

Das Zahlenbuch 1, S. 108 f.

1 Falte in der Mitte zum **Buch**.

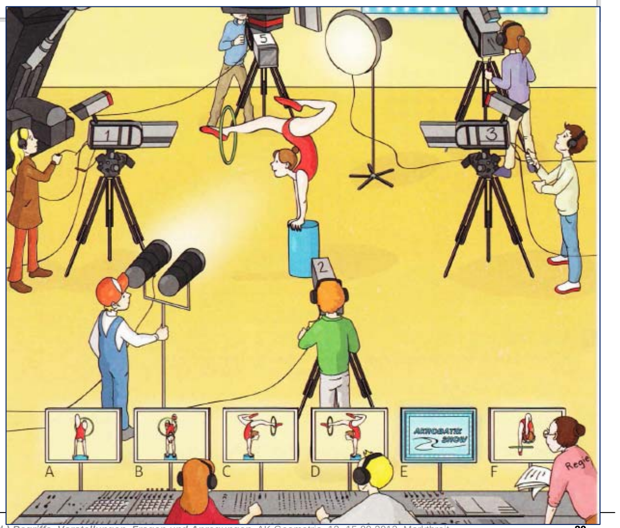
4 Falte auf zu einem **Winkel**.

9 Schiebe zwei breite und zwei schmale Winkel zu einem **Ring** zusammen.

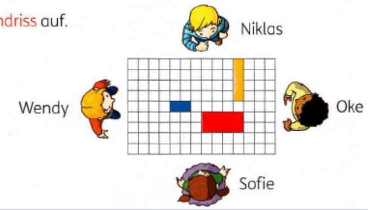
11 Schiebe zwei Ringe zu einem **Würfel** zusammen.

- Geometrische Ähnlichkeit
  - Unterstützende Vorstellung: Fotografien, Videos

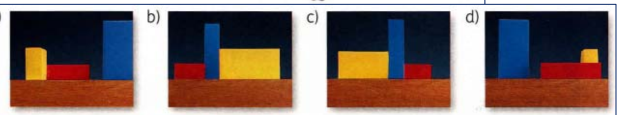
Das Zahlenbuch 2, S. 88 f.



2 Stellt die Quader nach dem Grundriss auf.
Vergleicht mit den Bildern.
Welche Seitenansicht gehört zu welchem Kind?

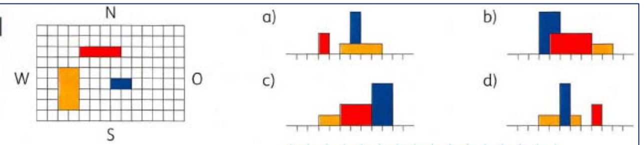


a) b) c) d)



2a) Seitenansicht von Niklas, b)

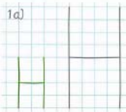
3



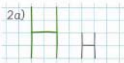
3a) Seitenansicht von Wendy, b)

Mit einer **Lupe** und einem **Mikroskop** lassen sich kleine Dinge vergrößert betrachten.

1 a) Zeichne den Buchstaben H und vergrößere ihn. Zeichne bei dem großen H jeweils doppelt so lange Striche.
Dann hast du im Maßstab 2 : 1 (gesprochen 2 zu 1) vergrößert.
b) Vergrößere Buchstaben aus deinem Vornamen im Maßstab 2 : 1.



2 a) Zeichne den Buchstaben H und verkleinere ihn. Zeichne bei dem kleinen H jeweils halb so lange Striche.
Dann hast du im Maßstab 1 : 2 (gesprochen 1 zu 2) verkleinert.
b) Verkleinere Buchstaben aus deinem Vornamen im Maßstab 1 : 2.



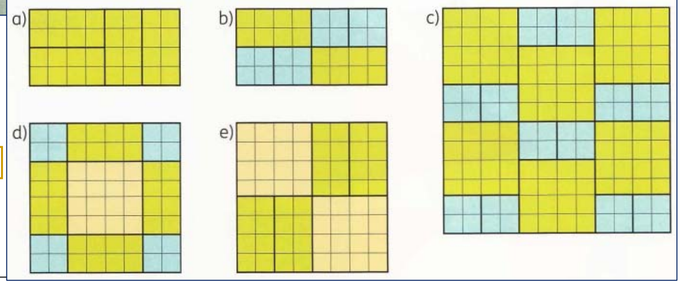
! Der Maßstab gibt an, wie viele Male Längen vergrößert oder verkleinert wurden.

Spielzeuge gibt es in verschiedenen Größen. Bei der Modelleisenbahn gibt es die Baugröße H0. Diese Modelle sind im Maßstab 1 : 87 verkleinert. 1 cm im Modell entsprechen 87 cm in der Wirklichkeit.

Das Zahlenbuch 4, S. 82 f.

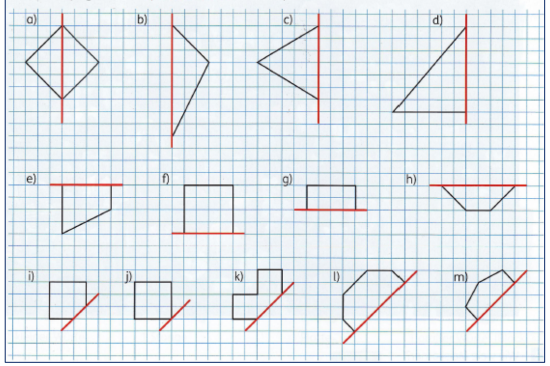
– Quadratraster als „Grundbegriff“

Lege die Fliesenmuster.
Zeichne die Muster ins Heft und setze sie fort.



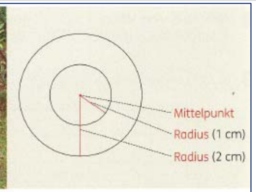
Das Zahlenbuch 2, S. 29

Zeichne die Figuren mit dem Lineal in dein Heft. Ergänze das Spiegelbild.
Setze den Spiegel auf die Symmetrieachse und überprüfe.



Das Zahlenbuch 3, S. 27

• „Elementare“ Grundbegriffe



1 Wo findest du in deiner Umgebung Kreise?

2 a) Zeichne mit einem Zirkel um einen Mittelpunkt verschieden große Kreise.
b) Stelle den Zirkel auf einen Radius von 1 cm (2 cm, 3 cm, 4 cm) ein und zeichne einen Kreis.

Das Zahlenbuch 4, S. 50 f.

5 1. Nimm ein beliebiges Stück Papier und falte es.
Du erhältst eine gerade Faltkante.
Du kannst die Faltkante als Lineal benutzen.

2. Falte die beiden Enden der Faltkante aufeinander.
Du erhältst eine neue Faltkante.
Die beiden Faltkanten bilden einen rechten Winkel.

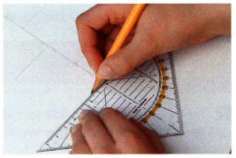
3. Öffne das Stück Papier.
Du erhältst vier rechte Winkel. Zeige sie.
Zeichne mit dem Zirkel einen Kreis um das Faltkreuz.

4. Verbinde die vier Schnittpunkte. Du erhältst ein Quadrat.
Schneide es aus. Wo entdeckst du beim Quadrat rechte Winkel?

! **Gerade Linien, die sich in einem rechten Winkel schneiden, heißen senkrecht zueinander.**

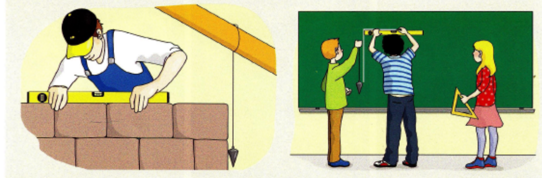
Das Geodreieck ist ein halbes Quadrat. Mit ihm kannst du gerade Linien und rechte Winkel zeichnen.

6 Zeichne mit dem Geodreieck
a) eine gerade Linie,
b) eine dazu senkrechte gerade Linie,
c) ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm,
d) ein Rechteck mit den Seitenlängen 7 cm und 3 cm.
Zeige immer die rechten Winkel.



9 Der Schreiner benutzt zum Kürzen von Brettern den **Schreinerwinkel**.
Erkläre dieses Werkzeug und seine Anwendung.

Waagerecht und lotrecht – senkrecht und parallel



Der Maurer prüft mit der Wasserwaage und dem Lot, ob eine Mauer genau waagerecht und lotrecht ist.

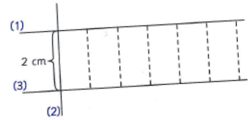
Die Kinder zeichnen an die Tafel einen lotrechten und einen waagerechten Strich.

Das Zahlenbuch 4, S. 110 f.

1 Warum ist es wichtig, dass eine Mauer lotrecht und waagerecht gebaut ist?

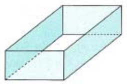
2 Überprüft an der Tafel, dass lotrechte und waagerechte Geraden aufeinander senkrecht stehen.

3 a) Zeichne mit dem Geodreieck zuerst eine gerade Linie **(1)** und senkrecht dazu eine zweite gerade Linie **(2)**.
Miss darauf 2 cm ab und zeichne senkrecht dazu eine dritte Gerade **(3)**. Die erste und die dritte Linie sind zueinander parallel.
b) Zeichne mit dem Geodreieck weitere senkrechte Strecken zwischen den Geraden **(1)** und **(3)**.
Überzeuge dich, dass sie alle gleichlang sind (Abstand von parallelen Geraden).



5 Eisenbahnschienen bilden auf gerader Strecke parallele Linien.
Wo findet ihr in eurer Umgebung parallele Linien?

6 Überlege im Kopf.
a) Wie viele Kanten hat ein Quader? Welche sind parallel?
b) Welche Vierecke haben parallele Seiten?
c) Welche Kanten stehen senkrecht aufeinander.



! **Eine gerade Linie mit Anfangs- und Endpunkt heißt Strecke.**

Zwei Punkte kann man durch eine Strecke verbinden.
Ordne 3 (4, 5, ...) Punkte ungefähr kreisförmig an.
Verbinde jeden Punkt mit jedem.
Wie viele Strecken erhältst du?
Schreibe eine Tabelle.

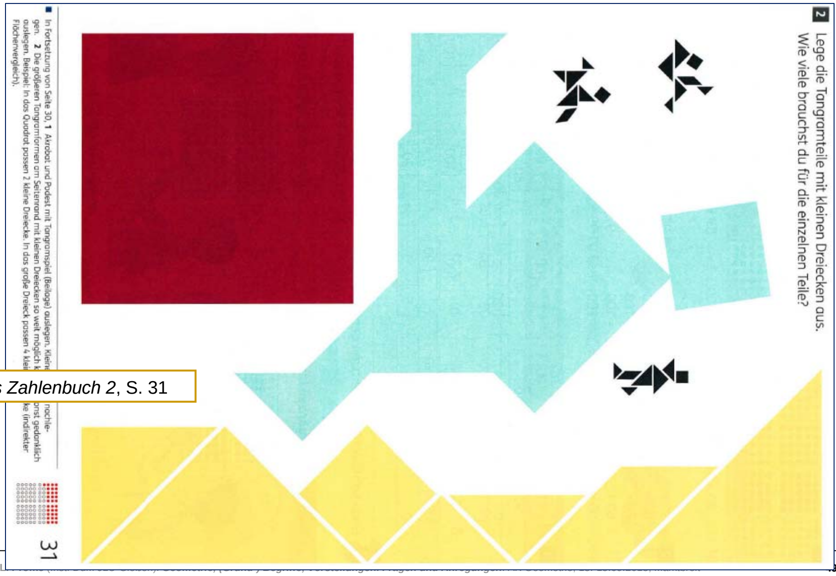
Anzahl der Punkte	2	3	4	...
Anzahl der Strecken	1	3	6	

! **Eine gerade Linie ohne Begrenzung heißt Gerade. Sie kann beliebig verlängert werden.**

- Ebenfalls Grundbegriffe (?)
  - Geometrische Größen
    - » Länge

Das Zahlenbuch 1, S. 45

» Flächeninhalt



Das Zahlenbuch 2, S. 31

» Rauminhalt

Das Zahlenbuch 4, S. 61, 128

Zwischenbemerkung zu „Grundbegriffen“

- Bedeutung
  - unmittelbar zugänglich und klar
- Erfassung „ganzheitlich“
  - (Gegen-) Beispiel „ ... sieht (nicht) so aus wie ... “
    - » Urteil kann manchmal genauer begründet werden durch Hinweis auf (einige) kennzeichnende Eigenschaften.
  - „Steckbriefe“ werden im nachfolgenden Geometrieunterricht erarbeitet.
    - » Auch ohne solche „Steckbriefe“ kann man die „Grundbegriffe“ verwenden.

- Weitere Vorerfahrungen von außerhalb der Schule
  - Kongruenz in der Ebene und im Raum
    - » Vorstellungen: dieselbe Größe und Form, Reproduzieren
  - Geometrische Ähnlichkeit in der Ebene und im Raum
    - » Vorstellungen: dieselbe Form, maßstäbliches Verändern
  - „Winkel“
    - » Vorstellungen: Richtungsunterschied, Neigung gegeneinander, Drehen von Anfangs- in Endlage
  - „Symmetrie“
    - » Vorstellung: regelmäßiges Wiederholen eines Musters
  - Abbildungen
    - » Vorstellungen: Bewegungsvorgänge, Projektionen, Bilder herstellen
- Sind dies ebenfalls „Grundbegriffe“ für den Geometrieunterricht?

Zwischenbemerkung zu Grundvorstellungen

- Vorerfahrungen zu einem mathematischen Konzept können individuell unterschiedlich sein,
  - also auch die *Grundvorstellungen* bei Schülern.
    - » Muss der Unterricht solche miteinander verknüpfen?
    - » Alle Schüler sollen schließlich dasselbe mathematische Konzept erwerben, also ein einheitliches ...
- *Grundverständnis* zu jenem mathematischen Konzept
  - kombiniert mit *Grundvorstellungen* bei P. Bender 1991
    - » *Grund* — allgemeine Verbindlichkeit
verankert in der Lebenswelt
fundamental für das jeweilige Gebiet
    - » *Vorstellungen* — innere anschauliche Repräsentationen
    - » *Verständnis* — unmöglich ohne *Vorstellungen*
und umgekehrt

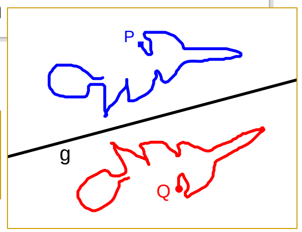
Zwischenbemerkung zum Verknüpfen von Grundvorstellungen

- Beispiel: „Spiegelsymmetrie“
  - Aktivitäten:
    - » Symmetrische Objekte (Zangen, Scheren, ...) sammeln und auf Symmetrien untersuchen
    - » Spiegelbilder an ebenen Spiegeln betrachten und analysieren
    - » Mit Formenplättchen achsensymmetrische Figuren legen
    - » (Geeignete) Figuren achsensymmetrisch ausmalen, nachzeichnen, fortsetzen
    - » Symmetrische Figuren durch Ausschneiden aus gefaltetem Papier herstellen
    - » Achsensymmetrische Figuren als Klecksbilder herstellen
    - » Mit Hilfe von Kohlepapier achsensymmetrische Figuren zeichnen
    - » In Bildern achsensymmetrischer (?) Objekte die Symmetrie-achsen suchen

- » Auf kariertem Papier achsensymmetrische Figuren konstruieren
- » Spiegelschrift lesen, herstellen, untersuchen; vergleichen mit Schrift, die „auf dem Kopf steht“
- » Mit Stempeln arbeiten, Stempel herstellen
- » Texte und Bilder auf transparenten Folien „von hinten“ betrachten
- » Symmetrische Figuren mit Hilfe einer dynamischen Geometrie-Software herstellen oder zeichnen:
  - ∗ Makro zum Spiegeln an einer Geraden
  - ∗ zusammen mit der Ortslinienfunktion

Gegeben: Q = g(P)

P freihand geführt. Bahnkurven von P und Q mittels Ortslinienfunktion erzeugt.

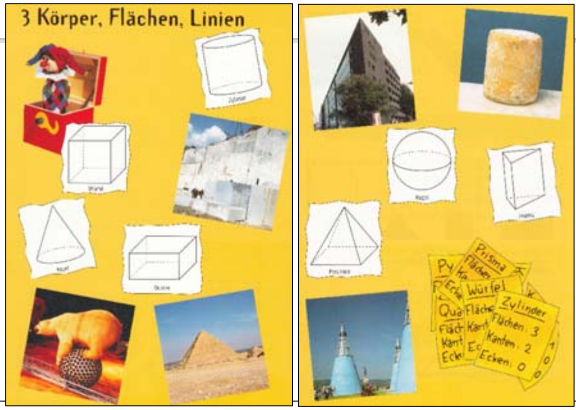


- Aufgabe für den Lehrer
  - » Was leisten diese Aktivitäten für das Lernen der Konzepte
achsensymmetrische ebene Figur,
Spiegelung der Zeichenebene an einer Geraden,
Spiegelung des Raumes an einer Ebene?
- Aufgaben für Lehrer und Schüler
  - » Wie hängen die Aktivitäten miteinander zusammen?
  - » Wo hat man sich jeweils einen Spiegel mit derselben Wirkung zu denken?
    - ∗ falls überhaupt möglich
  - » Wie gewinnt man aus den Aktivitäten die Vorschrift zur Konstruktion von Bildpunkten der *Spiegelung an einer Geraden* bzw. *an einer Ebene*?

Geometrie in der Hauptschule

Schröder, M.; Wurl, B.; Wynands, A. (Hrsg.): *Maßstab 5 – 9 Mathematik*. Hannover: Schroedel 2001-2003

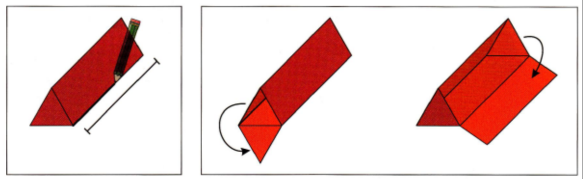
- Körperformen als Grundbegriffe
  - Abstrahieren vom Materiellen und Idealisieren zu geometrischen Formen



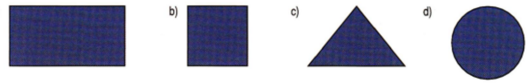
Maßstab 5, S. 48 f.

Folie 70

– Ebene Figuren von Körpern ablösen


Flächen und Kanten

Gerade Kanten eines Körpers heißen **Strecken.**
Ebene Flächen eines Körpers sind häufig Dreiecke, Vierecke oder Kreise.


2. Zu welchen Körpern können die abgebildeten Flächen gehören?

a) b) c) d)

3. a) Welche Körper haben nur ebene Flächen?
b) Welche Körper haben außer ebenen Flächen auch andere (gewölbte) Flächen?
c) Welche Körper haben keine einzige ebene Fläche?

Maßstab 5, S. 50

Quadrat: Fläche eines Würfels
Alle Seiten sind gleich lang.

Rechteck: Fläche eines Quaders
Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.

Im Quadrat und Rechteck sind gegenüberliegende Seiten parallel zueinander.
Benachbarte Seiten sind senkrecht zueinander; sie bilden einen **rechten Winkel** (⊾).

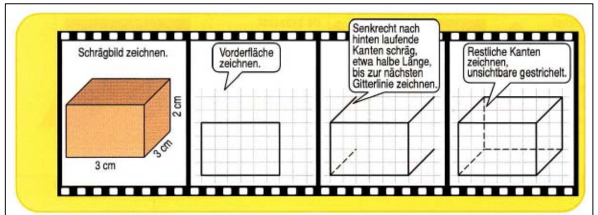
– Vorstellungen ausformen beim Herstellen

6. Kannst du auf Karopapier ein Quadrat zeichnen, sodass keine seiner Seiten parallel zu Karolinien verläuft?

7.

Maßstab 5, S. 57

– Quadratraster als Grundbegriff



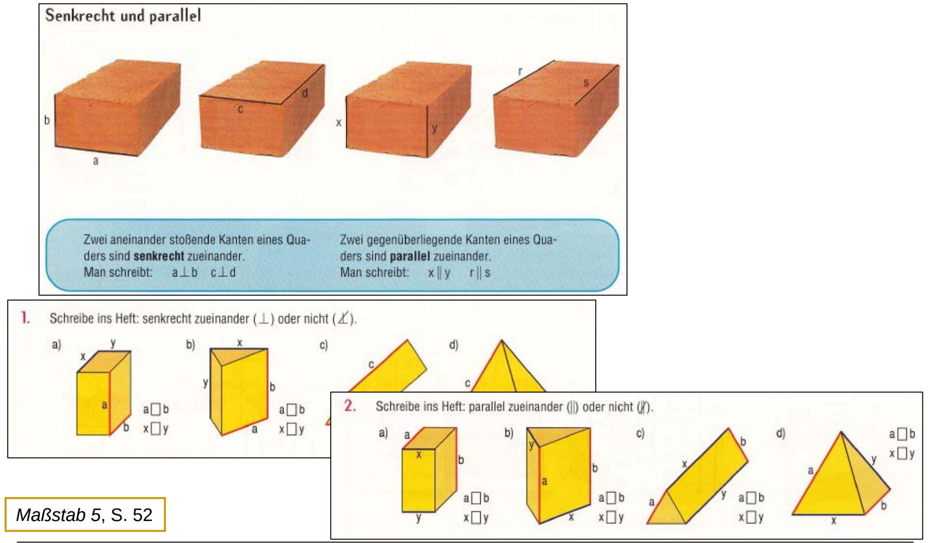
Aufgaben

1. Zeichne das Schrägbild des Quaders mit doppelten Längen, die unsichtbaren Kanten gestrichelt.
a) b) c) d)

Maßstab 5, S. 52

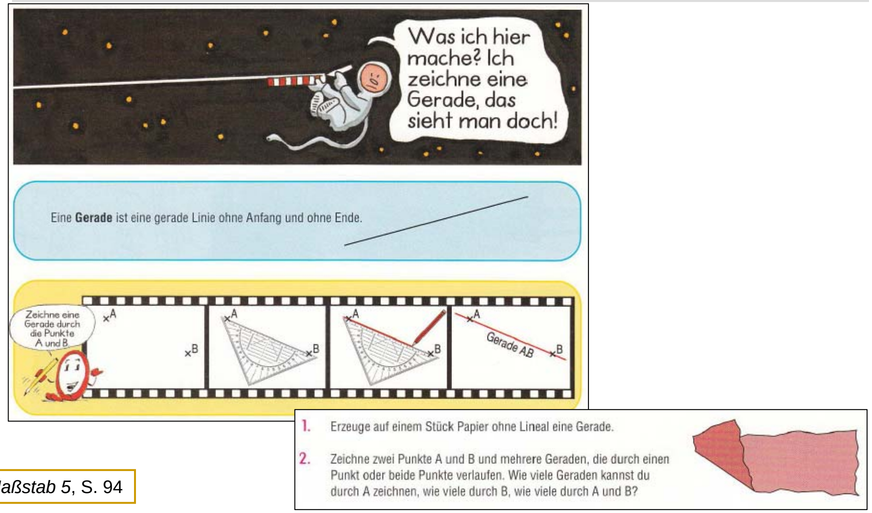
Folie 70

– „Elementare“ Grundbegriffe

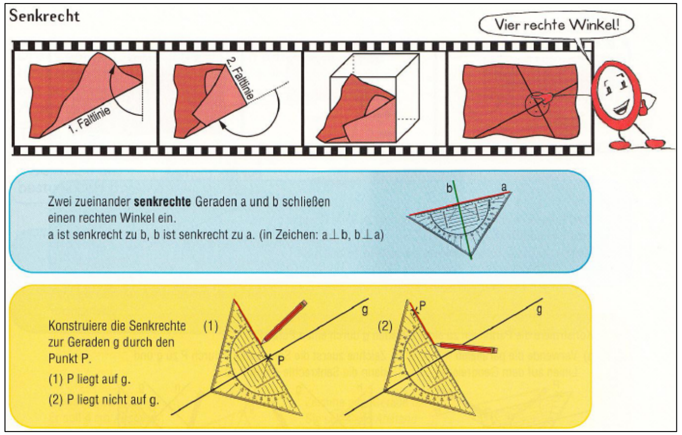


Maßstab 5, S. 52

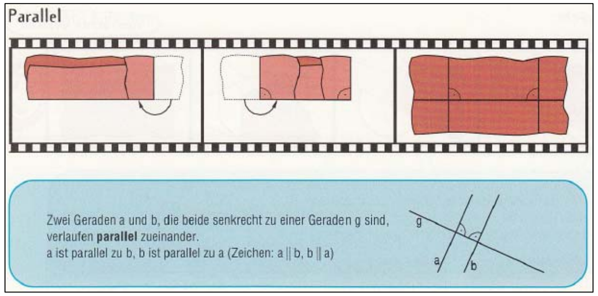
– Vorstellungen ausformen beim Herstellen
– Vernetzen mehrerer Vorstellungen

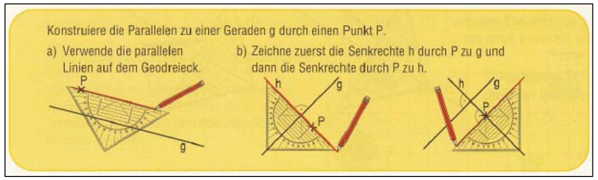


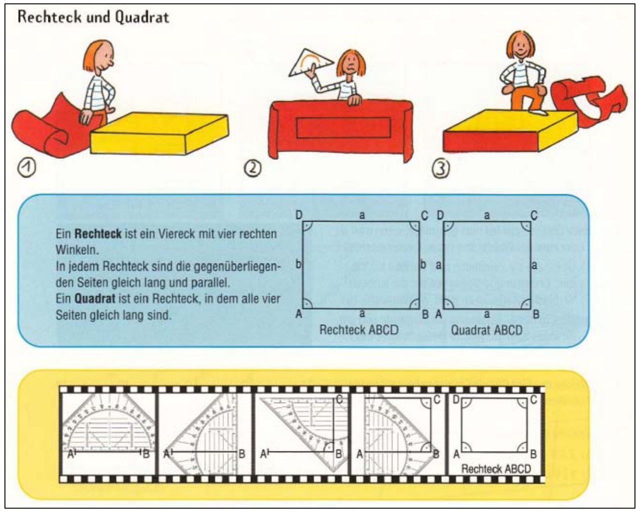
Maßstab 5, S. 94



Maßstab 5, S. 97-98

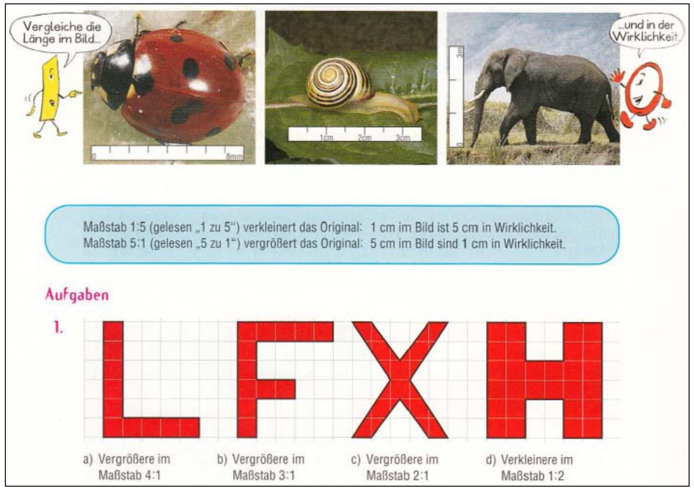






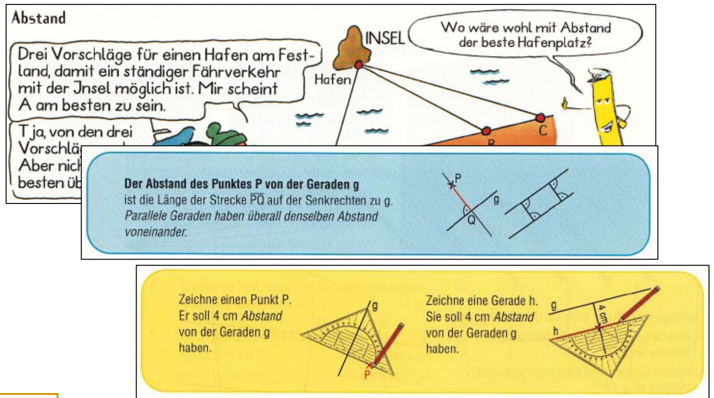
Maßstab 5, S. 102

- Geometrische Ähnlichkeit
  - Maßstäbliches Verkleinern und Vergrößern



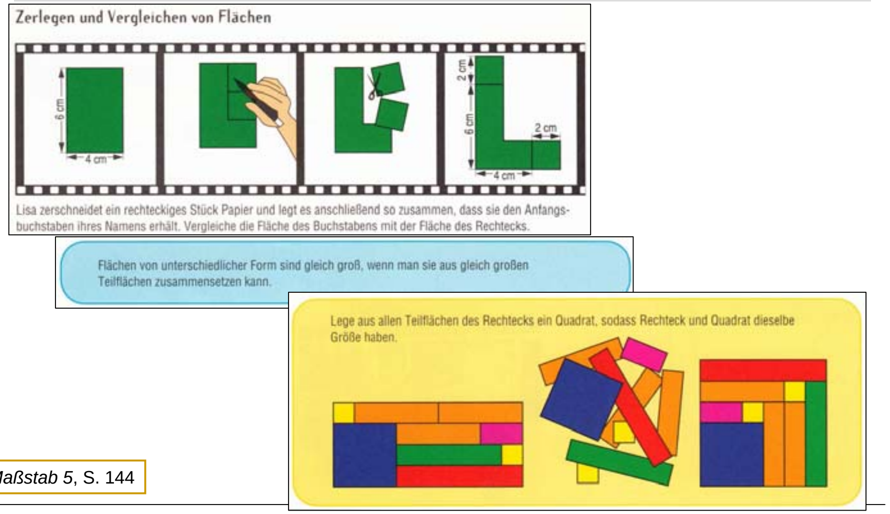
Maßstab 5, S. 128

- Geometrische Größen als Grundbegriffe (?)
  - Länge

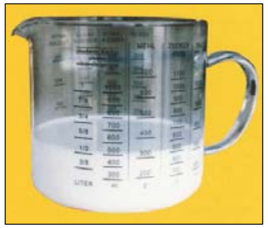


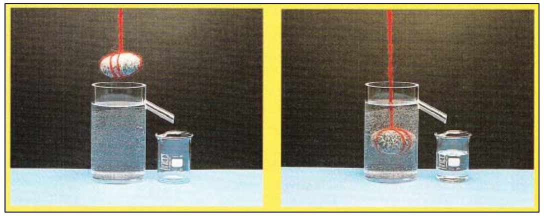
Maßstab 5, S. 99

- Flächeninhalt, Rauminhalt
  - » Platzbedarf und Platzangebot als Grundvorstellungen



Maßstab 5, S. 144



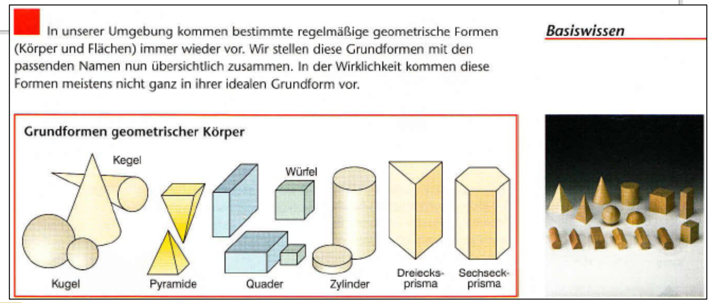


Maßstab 6, S. 122 f., 130

Geometrieunterricht im Gymnasium

Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (Hrsg.): *Mathematik Neue Wege 5 - 10. Arbeitsbuch für Gymnasien*. Hannover/Braunschweig: Schroedel 2000-2004

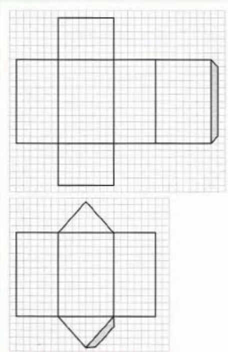
- Körperformen als Grundbegriffe
  - Ebene Figuren von Körpern abgelöst
  - Abstrahieren vom Materiellen und Idealisieren zu geometrischen Formen

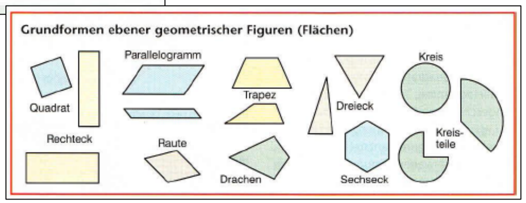


Neue Wege 5, S. 130-133

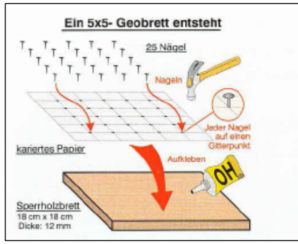
Folie 84

4 Am besten versteht man geometrische Formen, wenn man sie selbst bastelt oder nachbaut. Architekten stellen deshalb immer wieder Modelle ihrer geplanten Bauwerke her.
Aus den beiden aufgezeichneten Bastelbögen kannst du einen Quader und ein dreieckiges Prisma bauen und daraus das Modell eines Hauses mit Satteldach zusammensetzen. Das Haus ist 12 m lang, 8 m breit und (ohne Dach) 6 m hoch, der Bastelbogen ist maßstabsgetreu verkleinert.
a) Übertrage die Bastelbögen auf Karopapier und klebe sie auf Karton.
b) Zum Zusammenbauen der Modelle brauchst du noch extra Klebelaschen. Eine ist jeweils in jedem Bastelbogen eingezeichnet. Zeichne alle notwendigen Klebelaschen in die Bastelbögen ein.
c) Ritze alle Faltkanten (auch die an den Klebelaschen) im Bastelbogen mit Lineal und Messer sorgfältig an. Nun wird der Zusammenbau des Hauses gelingen.





- Vorstellungen ausformen und präzisieren:
  - » Herstellen von Kantenmodellen
  - » Vielecke am Geobrett spannen
  - » Gelenk-Vielecke basteln
- Verschiedene Vorstellungen vernetzen (?)



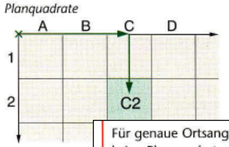
Bauanleitung für ein 5×5-Geobrett:
Besorge dir ein quadratisches Brett (18 cm×18 cm) aus 12 mm starkem Sperrholz. Zeichne das Gitternetz auf kariertes Papier (Abstand der Gitterlinien 3 cm) und klebe dies auf das Brett. Schlage an den 25 Gitterpunkten kleine Nägel ein. Nun musst du nur noch kleine Gummiringe in verschiedenen Farben besorgen.

Neue Wege 5, S. 140

- Elementare (Grund-) Begriffe
  - „naiv“ und nicht thematisiert
    - » quadratisches Gitter, Punkt, Strecke
  - unbewusstes Abstrahieren von Materiellem
    - » durch Anwendungen

Für grobe Lagebeschreibungen benutzt man große Gittermaschen, die **Planquadrate.** Man legt einen Startpunkt fest. Von dort aus gibt man jedem Planquadrat einen Namen oder „Adresse“. Zum Planquadrat C2 kommt man, indem man vom Startpunkt aus drei Quadrate nach rechts und zwei nach unten zählt.

Planquadrate



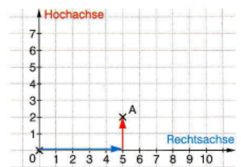
Für genaue Ortsangaben benutzt man keine Planquadrate, sondern die Knotenpunkte eines Gitters, sogenannte **Gitterpunkte.** Zum Gitterpunkt A kommt man, indem man vom Startpunkt (Ursprung) aus 5 Knoten nach rechts und 2 Knoten nach oben zählt

Wir schreiben auf: A(5|2) und merken uns

Rechtswert Hochwert

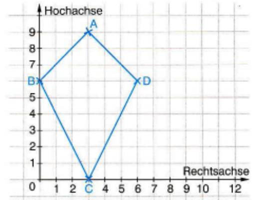
Wir nennen Rechtswert und Hochwert die **Koordinaten** des Punktes.

Koordinaten

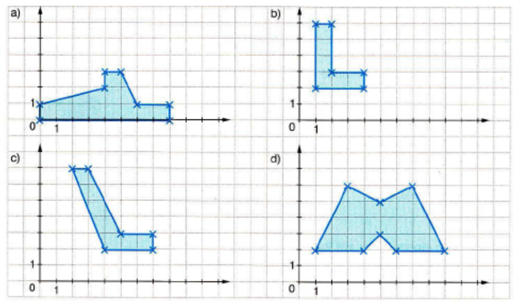


Neue Wege 5, S. 120 f.

B Alle Schüler der Klasse 5a sollen dasselbe Viereck in ihr Heft zeichnen. Die Lehrerin gibt die 4 Eckpunkte mit Koordinaten an: A(3|9), B(0|6), C(3|0), D(6|6). Zunächst legen wir einen Startpunkt (Ursprung) fest und zeichnen von da aus eine Rechts- und eine Hochachse. Dann tragen wir die Punkte ein. Nun verbinden wir die Punkte in alphabetischer Reihenfolge. Zum Zeichnen verwenden wir ein Lineal. Welche Figur entsteht? Ein Drachen.



6 Will man den Roboter Blech zuschneiden lassen, so zeichnet man die Umrisse der Figur in ein Koordinatensystem und liest dann die Koordinaten der Eckpunkte ab. Dann gibt man die Punkte in den Computer ein und schon kann der Roboter das Werkstück ausschneiden. Bestimme jeweils die Koordinaten der Eckpunkte.



- Vorstellungen ausformen beim Herstellen und Vernetzen

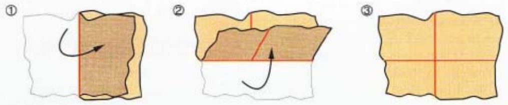
8.1 Parallele und senkrechte Geraden – Abstände

Bei vielen Dingen, die der Mensch baut, haben Linien, Kanten und Flächen eine besondere Lage zueinander: Eisenbahnschienen sind parallel, Türen und Fenster haben meist die Form von Rechtecken, Fußgängerüberwege führen senkrecht über die Straße. In diesem Kapitel lernst du z. B., wie du parallele und senkrechte gerade Linien exakt konstruieren kannst und welche Werkzeuge und Hilfsmittel die Architekten beim Planen und die Handwerker beim Arbeiten dafür benutzen.

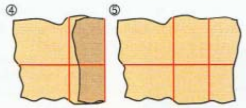
Neue Wege 5, S. 146-151

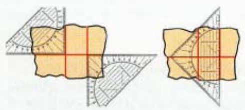
3 *Senkrecht und parallel beim Papierfalten und am Geodreieck:*

a) Nimm einen „Fetzen“ Papier und falte einmal (Bild 1).
Wenn du aufklappst, siehst du die gerade Linie der Faltkante. Falte nun so, dass die Teile dieser ersten Faltlinie genau übereinander liegen (Bild 2).
Die so entstandenen beiden Faltlinien liegen dann senkrecht zueinander (Bild 3).



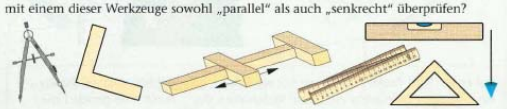
b) Falte das Papier nun nochmals so, dass die Teile in der 2. Faltlinie genau übereinanderliegen (Bild 4).
Es entsteht eine neue Faltlinie, diese ist zur ersten Faltlinie parallel (Bild 5).



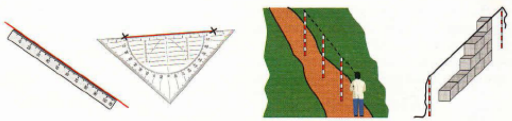


c) Suche auf deinem Geodreieck gerade Linien, die senkrecht oder parallel zueinander sind. Du kannst die Lage der Faltgeraden auf dem Papier überprüfen. Hast du genau nach der Vorschrift gefaltet?

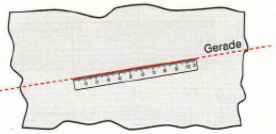
4 Tabea macht eine Schreinerlehre. Mit großer Sorgfalt hat sie eine quaderförmige Spielzeugkiste gebaut. Der Meister prüft nach, ob Kanten und Flächen wirklich exakt parallel bzw. senkrecht zueinander sind. Welche der abgebildeten Werkzeuge kann er dazu benutzen? Beschreibe, wie er die Kiste mit jedem Werkzeug überprüft. Kann er mit einem dieser Werkzeuge sowohl „parallel“ als auch „senkrecht“ überprüfen?



Geometrische Konstruktionen auf unliniertem Papier werden mit geometrischen Werkzeugen ausgeführt. Mit Lineal und Geodreieck können wir gerade Linien zeichnen und Punkte durch Strecken verbinden. Im Gelände werden gerade Linien z. B. durch Peilen an Stäben oder durch das Spannen von Seilen gewonnen.

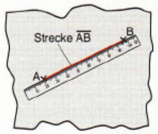


Auf einem Blatt Papier können wir nur ein Stück einer geraden Linie zeichnen. Durch Verschieben des Lineals bis zu den Rändern des Blattes lässt sich die Linie verlängern, in Gedanken auch beliebig weiter. Eine solche nach beiden Seiten unbegrenzt gedachte Linie nennen wir **Gerade**.



Eine Gerade hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.

Wir können zwei Punkte durch eine gerade Linie verbinden. Die gerade Linie zwischen zwei Punkten nennen wir **Strecke**.



Eine Strecke ist von zwei Punkten begrenzt. Die Länge einer Strecke können wir mit dem Lineal messen.

- Kreis, Kugel
  - Vernetzen verschiedener Vorstellungen (?)

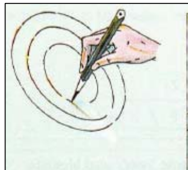
Neue Wege 6, S. 24-29

Was dich erwartet

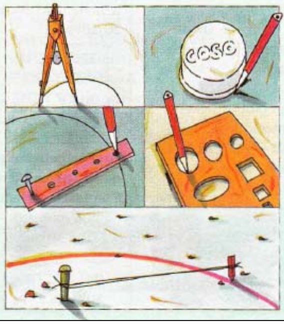
Kugeln und Kreise sind besonders regelmäßige geometrische Formen, sie haben keinerlei Ecken und Kanten. Dies ist ein Grund für ihre vielseitige Verwendbarkeit bei Gegenständen im Alltag und in der Technik, so z. B. bei Rädern, Kugellagern, Tischtennisbällen und Billardkugeln oder auch bei Brückenbögen. Wie kann man Kreise und Kugeln exakt beschreiben und messen, wie kann man Kreise konstruieren und welche Zusammenhänge bestehen zwischen Kugeln und Kreisen?

Aufgaben

1 Wo findest du in deiner alltäglichen Umgebung Beispiele für Kreise und Kugeln. Erstelle eine eigene Beispiel-Liste. Bei welchen Gegenständen hätte die Abweichung von der idealen Kreis- oder Kugelform schwerwiegende Nachteile? Beschreibe diese Nachteile. Schreibe auch einige Beispiele auf, die ein wenig von der Kreis- oder Kugelform abweichen.



Findest du noch andere Hilfsmittel, mit denen du Kreise zeichnen kannst?



2 *Zeichnen von Kreisen*

a) Das Zeichnen von Kreisen mit der freien Hand ist eine wahre Kunst. Versuche es selbst. Warum ist es so schwierig? Was unterscheidet deine Zeichnung von der idealen Form eines Kreises?

b) Zeichne Kreise mit den abgebildeten Hilfsmitteln. Warum gelingt damit das exakte Zeichnen? Beschreibe jeweils dein Vorgehen. Mit welchen Hilfsmitteln kannst du unterschiedliche Kreise zeichnen, wie unterscheiden sich diese? Welche Geräte sind besonders gut geeignet? Warum?

3 Würfel, Quader und Pyramiden kannst du selbst mithilfe passender Netze leicht herstellen. Das funktioniert auch noch bei Zylindern und Kegeln, hier sind die Netze etwas komplizierter. Für die Kugel gibt es kein Netz. Dies wird dir schnell klar, wenn du eine Apfelsine schälst und die Schale flach ausbreiten willst. Probiere es aus!

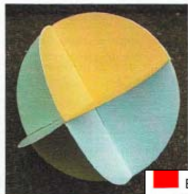
a) Forme eine Kugel aus Knete (oder aus Schnee). Geschicktes Formen mit der Hand und Rollen auf flacher Unterlage führt zu recht guten Ergebnissen.

b) Sehr schöne Kugeln kannst du mit Seifenblasen herstellen. Leider haben sie nur eine ganz kurze Lebensdauer.

4 Hier sind zwei Bastelanleitungen für „Windbälle", die wie Kugeln rollen. Du musst allerdings sehr sorgfältig arbeiten. Es reicht, wenn du einen Typ selbst bastelst, den anderen kannst du dir dann bei deinem Nachbarn anschauen.

Windball aus Kreisringen

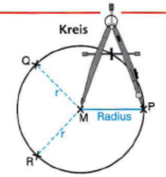
Windball aus Kreisscheiben



Folie 83

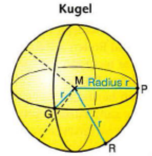
Ein Kreis lässt sich mit dem Zirkel genau zeichnen, du musst nur den Mittelpunkt und die genaue Zirkelweite kennen. Auch die Kugel kann mit nur zwei Angaben genau gekennzeichnet werden. Das Zeichnen ist nicht so einfach, wir brauchen ein „Schrägbild".

Kreis



Alle Punkte des Kreises haben vom **Mittelpunkt des Kreises** die gleiche Entfernung.
Diese Entfernung heißt **Radius des Kreises.**

Kugel



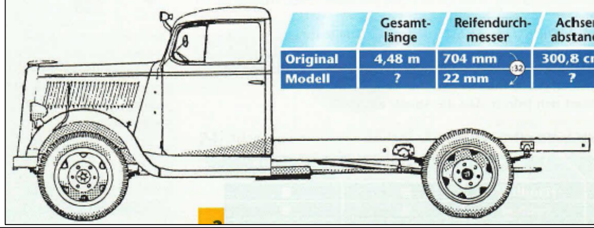
Alle Punkte der Kugeloberfläche haben vom **Mittelpunkt der Kugel** die gleiche Entfernung.
Diese Entfernung heißt **Radius der Kugel.**

- Geometrische Ähnlichkeit
  - Maßstäbliches Vergrößern und Verkleinern

Für maßstabsgetreue Modelle und Landkarten müssen alle Abmessungen im richtigen Maß geschrumpft werden. Der richtige Bruchteil spielt dabei eine große Rolle. Ob beim Mischen von Getränken oder Farben, um immer wieder genau die gleiche Mischung herstellen zu können, muss man wissen, aus welchen Teilen die Mischung zusammengesetzt ist. Verhältnisse helfen dabei. In Nachrichten oder auf Verpackungen ersetzen Prozentangaben an vielen Stellen die Brüche.

Aufgaben

1 Ein alter Lastwagen soll als Modellbausatz im Maßstab 1 : 32 (lies 1 zu 32) hergestellt werden. Das bedeutet, dass alle Abmessungen des Modells $\frac{1}{32}$ (ein zweiunddreißigstel) der Originalabmessungen sind. In einem Museum wurde das Originalfahrzeug vermessen.
Finde die Abmessungen des Modells heraus. Die Zeichnung im Maßstab 1 : 32 zeigt dir, ob du richtig gerechnet hast.



	Gesamtlänge	Reifendurchmesser	Achsenabstand	Breite der Fahrertür
Original	4,48 m	704 mm	300,8 cm	80 cm
Modell	?	22 mm	?	?

Neue Wege 5, S. 58

- Geometrische Größen als Grundbegriffe
  - Flächen- und Rauminhalte
    - » Platzbedarf und Platzangebot als Grundvorstellungen

In einem Leserbrief an die Zeitung entrüstet sich ein Mieter: „In manchen Wohnungen ist die Wohnfläche des Kinderzimmers kleiner als eine Garage. Ein Kinderzimmer sollte mindestens 15 m² haben!" Kannst du mit dieser Angabe etwas anfangen? Welche Fläche hat dein Zimmer, euer Wohnzimmer oder eure Garage?
Wie man Flächen messen und berechnen kann und wie man die Größe so unterschiedlicher Flächen wie die eines Zimmers, eines Fußballfeldes oder einer ganzen Insel angibt, lernst du jetzt.

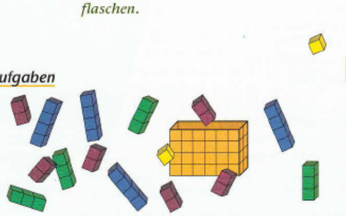
1 *Gemüsegarten:* Christina und Florian dürfen zwei Flächen ihres Gartens selbst nutzen. Florian möchte Gemüse anpflanzen, während Christina Kaninchen halten möchte. Christina muss ihren Teil einzäunen, damit ihre Kaninchen nicht weglaufen und Florians Gemüse nicht anknabbern können.
Soll Christina Fläche A oder Fläche B nehmen? Welche Gründe hast du für deine Entscheidung?

Neue Wege 5, S. 182, 192

Was dich erwartet

Wie viel Kubikmeter Luft braucht jeder Schüler und jede Schülerin an einem anstrengenden Schulmorgen zum Atmen? In diesem Lernabschnitt wirst du erfahren, wie du Rauminhalte messen und berechnen kannst. Du wirst auch genauere Vorstellungen über bestimmte Größenangaben wie „Kubikzentimeter" oder „Liter" bekommen, zum Beispiel bei der Angabe von Regenmengen (Niederschlag) oder beim Messen des Inhalts von Getränkeflaschen.

Aufgaben



1 Bei Leas kleinem Bruder liegen mal wieder jede Menge Bauklötze auf dem Fußboden herum. Lea hilft ihm beim Aufräumen.
Passen alle abgebildeten Bauklötze in den Karton?
Wie viele blaue (rote, grüne, gelbe) Bauklötze passen höchstens in den Karton?

Zusammenfassung

- Vergleich von Zugängen und Inhalten
  - Geometrieunterricht in weiterführenden Schulen zeigt viele Gemeinsamkeiten mit dem in der Grundschule.
    - » Geometrie der Zeichenebene als Teil der Geometrie des Anschauungsraums
    - » Abstrahieren vom Materiellem, Idealisieren zu vollkommenen (eigentlich nur gedachten) geometrischen Objekten eher unbewusst.
    - » Geometrie wird „naiv" betrieben ohne eine explizite oder implizite Hintergrundstheorie, Grundbegriffe nicht thematisiert.
  - Geometrieunterricht in weiterführenden Schulen setzt aber nicht jenen der Grundschule fort, sondern beginnt von Neuem.

Naheliegende (?) Aufgabe der Geometriedidaktik

- Einheitliches durchgehendes stufenübergreifendes Curriculum für den Geometrieunterricht entwickeln
  - Welche Inhalte sind dabei „unverzichtbar“ und weshalb?
    - » Was ist mit *Inhalt* gemeint?
  - Sind solche Inhalte auch für schwächere Schüler zugänglich?
    - » Innere Differenzierung möglich machen
      Vgl. W. Krippner 1992
- Erster (?) Vorschlag
  - Curriculum stützen auf Grundideen der Elementargeometrie
    - » E. Ch. Wittmann 1997 und 1999, Projekt *mathe 2000*

» *Grundideen der Elementargeometrie*
bei E. Ch. Wittmann 1999

1. geometrische Formen und ihre Konstruktion
2. Operationen mit Formen
3. Koordinaten
4. Maße
5. Muster
6. Formen in der Umwelt
7. Geometrisierung

» Beispiel für 6: *Knoten*

für topologische Aktivitäten:
Schüler lernen, 13 verschiedene Knoten zu knüpfen

- ∗ Beabsichtigte und tatsächlich erreichte (Bildungs-) Ziele?

  Überzeugend verwirklicht in *Das Zahlenbuch* 1 – 4 ?

„Botschaften“

- Geometrieunterricht fängt in der Grundschule an.
  - Daher wäre nötig:

    ein durchgängiges gemeinsames Geometrie-Curriculum für die Primarstufe und die Sekundarstufe I
- Geometrie in der Schule entwickeln vom Raum aus
  - und „naiv“ betreiben ohne eine explizite oder implizite Hintergrundstheorie
- Grundbegriffe und Grundvorstellungen dazu passend wählen
  - Grundvorstellungen können individuell geprägt (auch verschieden) sein.
  - Verschiedene Grundvorstellungen zu einem mathematischen Konzepts miteinander verknüpfen

5 *Ziele und Visionen 2020*: offene Fragen

Ziele und Visionen 2020

- Welche Fortschritte erbrachten die Herbsttagungen ab 2010?
  - Werkzeuge für den Geometrieunterricht (2010)
  - Vernetzungen und Anwendungen (2011)
  - Wege zur Begriffsbildung im Geometrieunterricht (2012)

Ausschreibung für die Herbsttagung 2010

Mit dieser Herbsttagung wollen wir eine Serie von Arbeitskreis-Geometrie-Tagungen starten, welche bis 2020 konkrete und umfassende Vorschläge für eine Neustrukturierung des Geometrieunterrichts liefern sollen. Es ist in den letzten Jahren, wenn nicht in den letzten Jahrzehnten zu beobachten, dass der Anteil von Geometrie im Mathematikunterricht stark zurückgefahren wird bzw. sich fast nur noch auf Rechnungen konzentriert.

Wir wollen es uns zum Ziel machen, Geometrie in ihrer historischen wie auch aktuellen Breite wieder als notwendigen unverzichtbaren Bildungsinhalt für den Mathematikunterricht zu etablieren.

Frühere (Schwerpunkt-) Themen im AK Geometrie

1988	Raumgeometrie
1989	Praktischer Geometrieunterricht in Pflichtschulen
1990	Mensch – Computer – Geometrie
1991	Die (neue) Rolle der Geometrie in der (Schul-) Bildung
1992	Geometrie und fächerübergreifender Unterricht
1998	Vertikale Vernetzung im Geometrieunterricht
1999	Grundlagen der Schulgeometrie
2000	Raumgeometrie in der Primar- und Sekundarstufe
2002	Methoden des Geometrieunterrichts – gestern, heute und morgen
2003	Lehrerkompetenzen für einen zukünftigen Geometrieunterricht
2007	Bildung – Standards – Bildungsstandards
2009	Basiskompetenzen in der Geometrie

- Was hiervon war „nachhaltig“?

- Was könnte man im Arbeitskreis Geometrie tun?
  - Randbedingungen von Mathematikunterricht beachten:
    - » Jugend und Lehrer und Eltern „von heute“
    - » Verteilung von Schülern auf Schularten
    - » Einfluss von Politik und Öffentlichkeit auf Schulunterricht
  - Gründliche Erörterung von (Bildungs-) Zielen:
    - » Allgemeine (Bildungs-) Ziele sind in der Regel nicht an bestimmte Schulfächer gebunden.
    - » Welche Ziele des Geometrieunterrichts lassen sich auch in anderen Fächern verfolgen?
      - ∗ Vielleicht genau so gut oder gar besser
    - » Welche Ziele lassen sich wie gut im alltäglichen Unterricht erreichen?

- Einheitliches durchgehendes stufenübergreifendes Curriculum für den Geometrieunterricht entwickeln
- Inhalte des Geometrieunterrichts „unbefangen“ auswählen:
  - » Welche Inhalte sind dabei „unverzichtbar“ und weshalb?
    Was ist mit *Inhalt* gemeint?
  - » Sind solche Inhalte auch für schwächere Schüler zugänglich?
- Gewinne und Verluste abschätzen:
  - » Was verliert man (angeblich) beim Verzicht von Inhalten?
  - » Handelt es sich dabei um echte Verluste?
    Was davon wird derzeit tatsächlich und nachhaltig erreicht?
- Methodik des Geometrieunterrichts „unbefangen“ erörtern:
  - » Methoden im Dienste von Lehrzielen:
    Primat der Didaktik aber *Vetorecht der Methodik*
  - » Innere Differenzierung möglich machen
  - » Einsatz von Medien

- „Alte Meister" befragen
  - » Methodische und didaktische Literatur früherer Zeiten zum Geometrieunterricht
- Ausbildung künftiger Mathematiklehrer auf die *Ziele und Visionen 2020* ausrichten:
  - » Veranstaltungen zur Mathematik, Mathematikdidaktik, Methodik und zur Schulpraxis
- Ideen und Visionen verwirklichen
  - » Strategien zum Umsetzen von „guten" Vorschlägen und „Visionen" in die Schulpraxis entwickeln und verfolgen.

6 Literaturhinweise

Es folgt keine erschöpfende Liste.

Becker, G.: *Geometrieunterricht*. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt 1980

Bender, P.: *Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung*. MU **24**(1978); Heft 5, S. 25 - 87

Bender, P.: *Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen*.

In: Postel, H.; Kirsch, A.; Blum, W. (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel*. Hannover: Schroedel 1991, S. 48 - 60

Bender, P.; Schreiber, A.: *Operative Genese der Geometrie*. Wien/Stuttgart: hpt/Teubner 1985 (Schriftenreihe DdM **12**)

Bigalke, H. G.; Hasemann, K.; Walter, F.-R.: *Zur Didaktik der Mathematik in den Klassen 5 und 6. Band 2*. Frankfurt a.M. : Diesterweg 1978

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts: *Nürnberger Rahmenplan für Mathematik*. MNU **XVIII**(1965/66), Heft 1/2, S. 1 - 8

Vgl. Athen, H.: *Die Modernisierungstendenzen im Nürnberger Rahmenplan für Mathematik*. MU **12**(1966); Heft 3, S. 87 - 106

Franke, M.: *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. München: Elsevier ²2007 (Mathematik Primar- und Sekundarstufe)

Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett 1973

Freudenthal, H.: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht/Boston/Lancaster: Reidel 1983 (Mathematics education library)

Graumann, G.; Hölzl, R.; Krainer, K.; Neubrand, M.; Struve, H.: *Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre*. JMD **17**(1996), S. 163 - 237

Hessisches Kultusministerium: *Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Sekundarstufe I – Realschule*. Mathematik. Wiesbaden. 2011

Holland, G.: *Geometrie für Lehrer und Studenten.* 2 Bände. Hannover: Schroedel 1974/1977

Holland, G.: *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker ³2007

Kirsch, A.: *Ein didaktisch orientiertes Axiomensystem der Elementargeometrie.* MNU **25**(1972), S. 139 - 145

KMK: *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen*. Beschluss vom 03.10.1968

Unveränderter Nachdruck in Schoene, H. (Hrsg.): *Synopse für moderne Schulmathematik*. Frankfurt a.M.: Diesterweg [2]1974, S. 172 - 182

Krainer, K.: *Umwelterschließung im Geometrieunterricht*. Diplomarbeit UBW Klagenfurt 1982

Krainer, K.: *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs*. Frankfurt a.M. u.a.: Lang 1990 (Europ. Hochschulschr. Reihe 11 Bd. 409)

Krippner, W.: *Mathematik differenziert unterrichten*. Hannover: Schroedel 1992

Lietzmann, W.: *Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland*. Mit einer Einführung von Gerhard Becker. Paderborn: Schöningh 1985 (Klassiker der Mathematikdidaktik **1**)

Ursprünglich Leipzig/Berlin: Teubner 1912

Neubrand, M.: *Geometrieunterricht nach „new math“: Die Öffnung der Perspektiven*.

In: Schönbeck, J.; Struve, H.; Volkert, K. (Hrsg.): *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften. Band 1: Mathematik.* Weinheim: Dt. Studienverlag 1994, S. 27 - 49 (Schriftenreihe PH Heidelberg 18)

OECD (Hrsg.): *Synopsis für moderne Schulmathematik*. Frankfurt a.M.: Diesterweg [2]1974

Prade, H.: *Affine Geometrie im Mittelstufenunterricht des Gymnasiums*. MU **12**(1966), Heft 5, S. 5 - 36

Profke, L.: *Von der affinen zur euklidischen Geometrie mit Hilfe einer Orthogonalitätsrelation*. MU **22**(1976), Heft 4, S. 36 - 86

Profke, L.: *Festhalten an alten Gewohnheiten – Stillstand als Trend?(?)*.

In: Parisot, K.J.; Vasarhelyi, E. (Hrsg.): *Trends im Geometrieunterricht*. Salzburg: Abakus 1996, S. 40 - 44

Profke, L.: *Grundlagen der Schulgeometrie*

Vortrag am 01.10.1999 im Arbeitskreis Geometrie in Ottmaring

Profke, L.: *Anwendungsaufgaben im Geometrieunterricht*.

In: Filler, A.; Ludwig, M. (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020*. Hildesheim: Franzbecker 2012, S. 51 - 68

Starke, H.; Türke, W.: *Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts*. 2 Bände. Berlin: Volk und Wissen 1972/1974

Steiner, H.-G.: *Vorlesung über Grundlagen und Aufbau der Geometrie in didaktischer Sicht*. Münster Westf.: Aschendorff 1966 (Ausarbeitungen mathematischer und physikalischer Vorlesungen Band XXXII)

Stiftung Rechnen: *Studie Bürgerkompetenz Rechnen. Ergebnisbericht*. 2013

Treutlein, P.: *Der geometrische Anschauungsunterricht*. Mit einer Einführung von Jürgen Schönbeck. Paderborn: Schöningh 1985 (Klassiker der Mathematikdidaktik **3**)

Ursprünglich Leipzig/Berlin: Teubner 1912

Volk, D.: *Geometrie aus dem Handwerk. Genauer Hinschauen beim Mauern und Häuserbauen*. Göttingen: Gegenwind 1984 (MUED-Schriftenreihe Unterrichtsprojekte **4**)

Vollrath, H.-J.: *Geometrie im Mathematikunterricht – Eine Analyse neuerer Entwicklungen*. Schriftenreihe IDM Bielefeld Heft 3/1974, S. 1 - 22

Wiederabdruck in Steiner, H.-G.; Winkelmann, B. (Hrsg.): *Fragen des Geometrieunterrichts Bd. 1*. Köln: Aulis Verlag Deubner & Co.1981, S. 11 - 27

Walser, H.: *Früh krümmt sich, was ein Häkchen werden will*.

In: Filler, A.; Ludwig, M. (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020*. Hildesheim: Franzbecker 2012, S. 95 - 108

Wittenberg, A. I.: *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach*. Stuttgart: Klett 1963

Wittmann, E. Ch.: *Vom Tangram zum Satz von Pythagoras*. mathematiklehren Heft 83 (1997), S. 18 - 20

Wittmann, E. Ch.: *Konstruktion eines Geometriecurriculums ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie*.

In: Henning, H. (Hrsg.): *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden*. Oldenburg: Bültmann & Gerriets 1999, S. 205 - 221