Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 174

# Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung
## mit Produktiven Aufgaben

Anselm Lambert

Saarbrücken 2006

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 174
submitted: May 29, 2006

# Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben

**Anselm Lambert**

Universität des Saarlandes
Fachrichtung Mathematik
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
alambert@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de

# ● Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben

*Anselm Lambert, Saarbrücken und St. Ingbert*

„Jeder hat einmal klein angefangen!“ ist in vielen Situationen ein guter Trost. Diese Aussage ist umgekehrt aber auch eine Empfehlung an uns alle, es erst einmal im Kleinen zu probieren und dort wertvolle Erfahrungen zu sammeln. Dieser Rat gilt auch im Schulalltag, insbesondere für das Thema *Modellbildung*.

Wer den breiteren Einzug von Modellbildungsaktivitäten in den Mathematikunterricht wünscht, der muss realitätsnahe – auch im Sinne von: der üblichen Unterrichtsrealität nahe! – Vorschläge unterbreiten. Die vorliegende Arbeit stellt im Unterricht mit Schülerinnen und Schülern und in Fortbildungen mit Lehrerinnen und Lehrern mehrfach erprobte Einstiege in die reflektierende und notwendig kritische Modellbildung vor.

Diese Arbeit greift meinen Vortrag „Modellieren, Model(l)ing, Modellbildung: Ein Thema?“ auf der GDM-Jahrestagung 2003 in Dortmund auf (vgl. LAMBERT 2003) und entwickelt die dort skizzierten Fragestellungen und Antwortversuche weiter.

## (M)eine kleine Vorbemerkung zur „Anwendung von Mathematik“ im Mathematikunterricht

„Natürlich kenne ich die Schülerfrage ‚Wofür brauchen wir denn das?’ Und um diese Frage gar nicht gestellt zu bekommen, bin ich immer auf der Suche nach sinnvollen, praxisnahen, für die Schüler und Schülerinnen interessanten Beispielen. Im Folgenden beschreibe ich eines davon.“ – So könnte man einen Artikel über ein beliebiges Beispiel zur Modellbildung im Mathematikunterricht beginnen. Ich tue das nicht, denn: Dies setzte *zwei* dabei *nicht offen gelegte Annahmen* als Argumentationsbasis voraus:

- Erstens die Annahme, dass Mathematik sich (gar allein?) durch ihre Anwendungen zu rechtfertigen habe, und
- zweitens die Annahme, dass wir solche Anwendungen immer in intellektuell redlicher Weise – eben authentisch – im Unterricht diskutieren könnten.

Die erste Annahme ist natürlich falsch: *Anwendung allein ist noch nicht Mathematik.* Mathematik ist *auch* ein legitimes, kulturhistorisch bedeutsames, Muster strukturierendes *Spiel des Geistes* einzelner Menschen im Stillen oder mehrerer Menschen gemeinsam (diese Menschen nennen wir dann Mathematiker). Die Geschichte der Mathematik als Wissenschaft ist auch – und phasenweise sogar wesentlich – die Geschichte dieses Spiels in seinen mannigfachen Ausprägungen. Dieses *Spiel* brauchen wir *für uns!*

Folglich: Auch für dieses Spiel sollten wir unsere Schülerinnen und Schüler zu interessieren versuchen. Ein möglicher Weg dorthin ist das Bewusstmachen dieses Spiels als Spiel und dies dann zu einem Ganzen komplementierend: das Bewusstmachen der Anwendung als Anwendung, der Modellbildung als Modellbildung. Auch so lässt sich die Schülerinnen- und Schülerfrage „Wofür brauchen wir denn das?“ im Unterricht sinnvoll und für den Unterricht fruchtbar diskutieren.

Und die zweite Annahme ist zumindest problematisch: Jedes Beispiel „Aus dem Leben – für den Unterricht“ ist notwendigerweise von uns für unseren Unterricht (mehr oder weniger) didaktisch reduziert und stellt uns deshalb vor ein prinzipielles Problem. Wir skizzieren immer nur einen Schattenriss von der uns alle umgebenden Mathematik da draußen, und wir laufen dabei stets Gefahr, uns und den uns anvertrauten Lernenden Anwendung von Mathematik nur vorzugaukeln und genau dadurch kein wirklich „gültiges Bild von der Mathematik“ – wie es WITTENBERG für den Mathematikunterricht gefordert hat – zu liefern (vgl. LAMBERT & PETERS 2005). Sicher gibt es eine Fülle schöner Beispiele zur Anwendung von Mathematik für den Mathematikunterricht – gerade die ISTRON-Bände wie dieser hier legen ja Zeugnis dafür ab. Aber auch diese Beispiele sind i. d. R. immer vorausgewählte, didaktisch aufbereitete und letztlich von uns (und nicht von den Lernenden selbst) im Unterricht gestellte und damit *nicht wirkliche*, nicht authentische *Probleme der Schülerinnen und Schüler* – ein zweites prinzipielles Problem.

Auf Probleme mit der Authentie (häufig auch: Authentizität) von Aufgaben für den Mathematikunterricht haben verschiedene Autoren betont und detailliert hingewiesen, z. B. PETER BENDER (vgl. etwa seine Diskussion von TIMSS-Aufgaben, die bei genauerer Betrachtung ihre *Realitätswidrigkeit* offenbaren: BENDER 2004, S. 104) und THOMAS JAHNKE (2005):

> Der Terminus ‚authentische Aufgaben' wird heute in der Didaktik vielfach […] benutzt. Gern taucht er insbesondere auch in Explikationen konstruktivistischer Lerntheorien auf, wo wir Halbsätze finden wie: „… wird besonders durch authentische Aufgaben befördert". Nähere Erläuterungen, was nun authentische Aufgaben sind, habe ich dagegen in der Literatur kaum gefunden, eher Beispiele, die offensichtlich als gut oder als gelungen empfunden werden. (JAHNKE 2005, S. 3)

> Das Formulieren einer Aufgabe in noch so authentischem Kontext und ihr Einsatz im Schulunterricht sprengt die Authentie. Vermutlich ist es sogar so, dass die schulische Rahmung von Mathematikaufgaben deren bemühte Authentizität zwangsläufig zerstört. (JAHNKE 2005, S. 10)

> Ich meine, man sollte sich eingestehen, dass es keine authentischen Aufgaben gibt. (Und wenn mal einer eine finden sollte, dann kann man das ja feiern.) (JAHNKE 2005, S. 8)

> Wenn man die Bezeichnung authentisch für Mathematikaufgaben retten will, dann darf man sie nicht an die Realität oder authentische Kontexte binden, sondern muss sich mit der übertragenen Bedeutung ‚echt', ‚glaubwürdig', ‚zuverlässig' begnügen. Unter ‚echt' könnte man auch ‚in sich stimmig' verstehen, ob eine Aufgabe also nichts anderes will als sie zugibt. (JAHNKE 2005, 12)

Eine Authentie, die sich durch

- das Verhältnis zu den Bildungszielen,
- die Qualität der angeregten mathematischen Tätigkeiten und
- das entstehende Bild von Mathematik

bestimmt, ist (neben Offenheit und Differenzierungsvermögen) wichtiges Aufgabenmerkmal (vgl. BÜCHTER & LEUDERS 2005, S. 73 ff.).

## Damals: Eingekleidete Aufgaben

Immer geht man das Risiko ein, dass sich oft auch gut gemeinte Anwendung reduziert auf das, was man früher fairerweise „Einkleidung" nannte. Das sollten Schülerinnen und Schüler wissen (dürfen). Die Frage etwa nach der Masse der Cheopspyramide (vgl. Abb. 1) ist sicherlich nicht wirklich eine anwendende Aufgabe, auch wenn sie von einer real existierenden Pyramide handelt; sie ist nur eine textliche Einkleidung einer mathematischen Struktur: der mathematischen Struktur, die wir gerade abfragen wollen – hier nämlich die Berechnung des Volumens einer mathematisch idealisierten Pyramide. Daneben kann diese Aufgabe auch noch eine Vorstellung von einer großen Steinmasse vermitteln (gewiss ein nicht zu vernachlässigender realitätsbezogener Aspekt).

**Eingekleidete Aufgaben.²)**

**123.** Wieviel wiegt die Luft in einem Saale von 17,5 m Länge, 13,2 m Breite und 7,35 m Höhe? Das spezifische Gewicht der Luft ist 0,001293.

**124.** Es soll ein Globus hergestellt werden, dessen Oberfläche 1 m² ist. Wie groß muß man den Radius nehmen?

**125.** Wie groß ist der Durchmesser eines 1500 m³ fassenden Luftballons, wie groß seine Oberfläche?

**126.** Wie groß ist der theoretische Auftrieb (ohne Berücksichtigung von Ballonhülle, Korb usw.) eines Luftballons von 8,35 m Durchmesser, der mit Wasserstoff prall gefüllt ist? (Spezifisches Gewicht der Luft 0,001293, spezifisches Gewicht des Wasserstoffes 0,0000900.)

**127.** Wieviel wiegt die Steinmasse der Cheopspyramide, wenn das spezifische Gewicht des Steines, aus dem sie gebaut ist, zu 2,75 angenommen wird? Die Höhe der Pyramide ist 148 m, die Seite der quadratischen Grundfläche 233 m.

Abb. 1: (LIETZMANN 1927, 231)

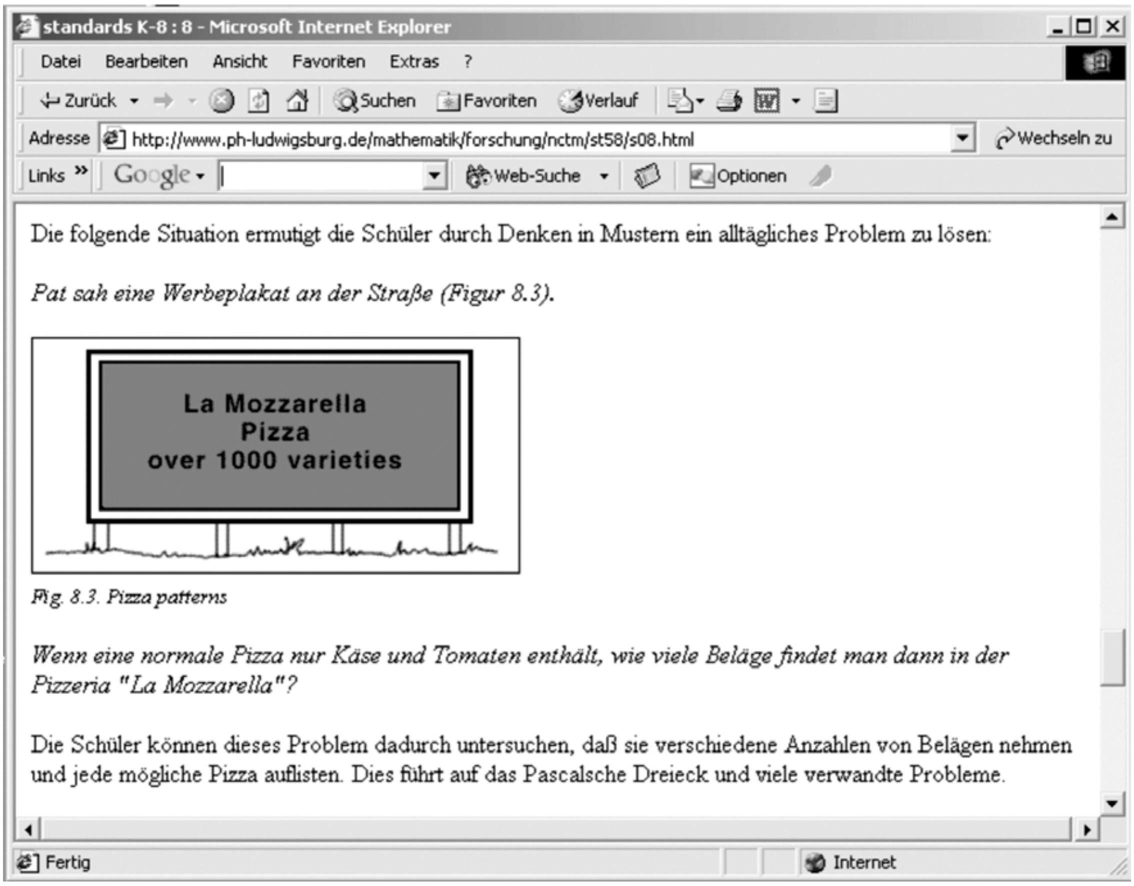



Abbildung 2: Aktuelle Standards?

## Heute: Alltägliche Probleme

Auch heute noch verkleidet man mathematische Muster in Textaufgaben, nennt dies allerdings dann leider meist nicht mehr *Einkleidung* sondern *Alltagsbezug.*

Ich denke: Eine Aufgabe wie die in Abbildung 2 vorgestellte ist nur für Menschen geeignet, die klaglos Pizza mit Ananas, Sardellen und Spinat essen, aber nicht alle tun dies. Hier werden Schülerinnen und Schüler berechtigte Zweifel an der Sinnhaftigkeit der angebahnten oberflächlichen Modellierungen hegen – und günstigstenfalls auch äußern: Dies wäre ein Zeichen vorangegangenen guten Unterrichts. Nicht „jede mögliche Pizza" schmeckt auch jemandem. Da besteht redlicherweise Diskussionsbedarf; ein stetes Ziel des allgemein bildenden Mathematikunterrichts ist die Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch (vgl. HEYMANN 1996).

Der Sinn einer solchen Aufgabe kann, wenn sie einem Denken in strukturierten und strukturierenden Mustern den Weg bahnen will, doch nicht darin liegen, auf das eine vom Aufgabensteller angedachte Muster zuzusteuern – wieso eigentlich ausgerechnet das PASCALsche Dreieck?

Diese Aufgabe entfaltet sich erst, wie viele andere alltägliche Aufgaben auch, durch die Konkurrenz verschiedener Muster, die die vorgegebene Situation spielerisch beschreiben wollen. Diese Muster müssen offen diskutiert werden und darüber hinaus auch die *Modellhaftigkeit* dieser Muster: *Das eine* Muster gibt es hier nicht. Das eindeutige Muster gibt es ohnehin meist nicht, auch wenn die Mathematik dazu neigt, uns durch ihre (innere!) Eindeutigkeit das Gegenteil zu suggerieren.

## Offensichtliche Realitätsferne – wi(e)der den gesunden Menschenverstand!

Eine häufig zu findende Aufgabe zur Dreisatzrechnung ist die, die etwa beginnt mit „Zwei Hühner legen an drei Tagen vier Eier. Wie viele …?".

Meine Schülerinnen und Schüler haben auf diese Aufgabe reagiert mit:

„Hühner legen doch nicht immer gleich viele Eier?!" (Klar, Recht haben sie: Hier wird implizit statistisch gemittelt, und dies wird nicht weiter reflektiert.)

„Und was ist, wenn ein Huhn einmal krank ist?" (Klar, Recht haben sie: Die Aufgabe müsste eigentlich beginnen mit: „Angenommen: Ich habe zwei stets gesunde Hühner, die an drei Tagen immer vier Eier legen.")

Schon besser, aber wir können immer noch nicht wissen, wie viele Eier …? Denn wie sieht denn ein möglicher Legeplan – ein mögliches Muster – für die behauptete Quote aus? Das ist durchaus eine interessante (und eigentlich dreisatzfreie!) mathematische Frage. Zum Beispiel so: Am ersten Tag werden von meinen stets gesunden Hühnern zusammen zwei Eier, an den beiden folgenden Tagen je ein Ei gelegt, dann wiederholen sie dieses Muster. Die getroffenen Voraussetzungen sind erfüllt! Aber: Wie viele Eier legen die Hühner denn dann an fünf Tagen: Na ja sechs oder sieben, abhängig davon, an welchem Tag ich anfange zu beobachten – und natürlich abhängig davon, ob die Hühner bereit sind, nach meinem Muster zu legen.) Dabei haben wir auch nicht vergessen: „Hühner können doch keine halben Eier legen!" (Klar: Das sagt einem der gesunde Menschenverstand!)

Aber so kommen wir nicht weiter, wenn wir Dreisatz üben wollen. Also was tun? Bereits durch einfache Variation der Aufgabe kommt man umhin, Realitätsnähe zu heucheln. WALTHER LIETZMANN hat bereits vor langer Zeit vorgeschlagen, die Aufgabe zu beginnen mit:

$$\text{„}1\frac{1}{2}\text{ Hühner legen in }1\frac{1}{2}\text{ Tagen }1\frac{1}{2}\text{ Eier}\ldots\text{"}$$

(vgl. z. B. LIETZMANN 1941, S. 122 – das Buch beginnt er übrigens mit einem Zitat von MICHAEL STIFEL aus dem Jahre 1553: „Sölliche spöttliche Exempla wöllen oft mehr Wort haben denn die nützliche.")

Diese *offensichtliche Realitätsferne* verrät den Lernenden ehrlich, dass wir hier eine mathematische Struktur eingekleidet haben und von ihnen das Entkleiden der Aufgabe fordern. Nicht mehr und nicht weniger.

Eingekleidete Aufgaben sind im Mathematikunterricht sicherlich notwendig:

- Einerseits lernt man hier das wichtige Übersetzen von (möglichst umgangssprachlichem – auf dieser Ebene ist der Realitätsbezug zu suchen!) Text in mathematische Sprachausdrücke, etwa Formeln oder Zeichnungen.
- Andererseits liefern sie umgekehrt umgangssprachliche Muster, die für mathematische Muster stehen, was das Verständnis dieser mathematischen Muster fördern kann.

Um diese beiden sich invers ergänzenden Ziele zu erreichen, sollten wir Einkleidung erstens bewusst als solche zu erkennen geben und zweitens auch *von den Lernenden selbst* verschiedene Einkleidungen zu vorgegebenen Berechnungen (er)finden lassen.

> Einkleidungen können veranschaulichen und so einen mathematischen Sachverhalt verständlich oder zugänglich machen, indem sie ihn in nicht-mathematische Vorstellungen einkleiden. Man kann sogar grundsätzlich die Frage aufwerfen, ob man Mathematik überhaupt anders lernen und verstehen kann als durch Einbettung in Vorstellungen, in Grundvorstellungen, in denen sich allgemeine Denkinhalte und -strukturen mit mathematische berühren, diesen zur Grundlage werden. (JAHNKE 2005, S. 6 f.)

Die Reflexion von Einkleidung kann dadurch unterstützt werden, dass wir im Unterricht Modellbildung selbst zum Thema zu machen, Modelle von Modellbildung entwickeln, um Begriffe zur Verfügung zu haben, die eine Diskussion von Anwendungen (und von Scheinanwendungen) ermöglichen.

## Warum Anwendung, warum Modellbildung, und wie?

Begriffsbildung lebt durch das gleichberechtigte Zusammenspiel ihres logischen und ihres prototypischen Aspekts.

Wir können Begriffe – hier also den Begriff, der sich hinter der Bezeichnung „Modellbildung" verbirgt – durch ihre abstrahierte logische Struktur (ihren *Begriffsinhalt*) beschreiben, müssen dies zur Theoriebildung sogar; wir lernen Begriffe aber über konkrete Beispiele, indem wir Beispiele (aus ihrem *Begriffsumfang*) – bewusst oder unbewusst – von Gegenbeispielen trennen (vgl. HISCHER & LAMBERT 2002, S. 161) – definieren bedeutet bekanntlich abgrenzen.

Wir erkennen z. B. ein Rechteck als solches, *bevor* wir seine Ecken gezählt und die Innenwinkel gemessen haben, da wir schon hinreichend viele Rechtecke gesehen und als Rechtecke bestimmt haben und daneben aber auch schon unterschiedliche Vielecke als Nicht-Rechtecke erkannt haben. Wir haben auf diesem Weg einen prototypischen Begriffsvorrat erworben (vgl. auch EDELMANN 2000, S. 120 ff.).

Gelegentlich erkennen Schülerinnen und Schüler (und übrigens auch Studentinnen und Studenten) das Viereck in Abbildung 3 links nicht als „Quadrat", sondern nur als „Viereck" und vielleicht noch als „Raute". Sie (er)kennen nur solche Quadrate wieder, die wie das Quadrat rechts in Abbildung 3 ausgerichtet sind.

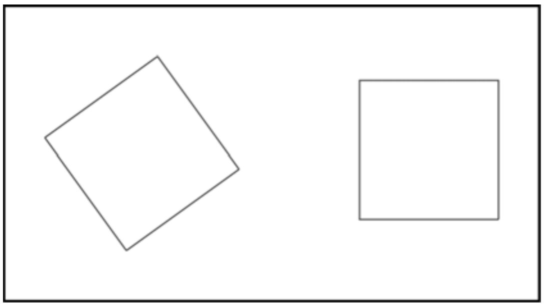


Abb. 3: Zwei Quadrate?

In diesen Fällen ist die nicht hinreichend reichhaltige prototypische Begriffsbildung noch dominant gegenüber der logischen Begriffsbildung. (Dies lässt sich an vielen weiteren Begriffen im Mathematikunterricht – z. B. Stetigkeit – immer wieder beobachten; dass jemand die Definition von Stetigkeit aufsagen kann, bedeutet schließlich nicht, dass er weiß, was Stetigkeit ist!)

Dem kann man im Unterricht durch *bewusste prototypische und logische Begriffsbildung*, d. h. Begriffsbildung auch selbst zum Thema machend, Darstellungen und Vorstellungen unterscheidend, also durch ein auch auf Metakognition zielendes Unterrichten entgegenwirken.

Um zu erfahren, was der Begriff *Modellbildung* bedeutet, müssen wir also hinreichend reichhaltige Beispiele zur Modellbildung kennen lernen (und ebenso auch Beispiele zur „Nicht-Modellbildung") und diese dann anschließend in abstrahierte Begriffe fassen.

> [Helmut] Messner meint, dass die Anwendbarkeit einer einmal gelernten Struktur umso besser sei, je abstrakter (also kontextunabhängiger) sie sei (Steiner 2001, S. 199).

Marilyn Jager Adams unterscheidet betont zwischen abstraktem Wissen einerseits und (von Lernenden selbst) abstrahiertem Wissen andererseits. Letzteres lässt sich auf neue Aufgaben- und Lernsituationen transferieren (vgl. Steiner 2001, S. 199).

Wir gehen also *nicht* den in der Mathematik (in Schule und Hochschule) bei mathematischen Begriffen noch zu häufig gegangenen Weg, *Modellbildung* als ein fertiges, von anderen abstrahiertes Begriffsnetz – etwa in Form der im folgenden Abschnitt beschriebenen Regelkreise – zu lehren, da solch abstraktes Wissen zur Trägheit neigt.

## Ein Modell von Modellbildung

Hans Schupp beschreibt Modellbildung in einem *Regelkreis* (Abb. 4), der die Ebenen *Welt* und *Mathematik* und die Seiten *Problem* und *Lösung* strukturiert unterscheidet (vgl. Schupp 1988, S. 11); dieses Modell von Modellbildung kann uns von deskriptivem und normativem Nutzen sein.

Ein Problem aus der Welt übersetzen wir in unsere Sprache Mathematik und verarbeiten es dort.

| | **Problem** | | **Lösung** |
|---|---|---|---|
| **Mathematik** | **Modell** | ***→deduzieren→*** | **Konsequenzen** |
| | ↑ ***modellieren, mathematisieren*** ↑ | | ↓ ***interpretieren*** ↓ |
| **Welt** | **Situation** | **←validieren←** | **Ergebnisse** |

Abb. 4: Ein Modell der Modellbildung (vgl. Schupp 1988, S. 11)

Wolfgang Henn beschreibt dieses Übersetzen in ein mathematisches Modell in zwei Schritten: Zuerst

> Idealisieren, Strukturieren, Vereinfachen, Präzisieren (Henn 1997, S. 7)

wir, um von der realen Situation zum realen Modell (vgl. das Modell von Modellbildung von Gabriele Kaiser und Werner Blum auf der nächsten Seite) zu kommen. Wir müssen dazu die Situation analysieren, uns Daten (intern aus der Situation oder extern) beschaffen und Annahmen und Vernachlässigungen machen (siehe Fischer & Malle 1985, S. 101). Dieses so von uns geschaffene, reduzierte Modell der betrachteten Situation mathematisieren wir, übersetzen es in mathematische Sprachausdrücke und erhalten ein mathematisches Modell der Situation.

Lutz Führer weist darauf hin, dass wir in einem Modell von Modellbildung nicht vergessen dürfen, dass wir nicht alle Probleme durch Übersetzen in Modelle „technologisch auflösen" können und dass „schon der betrachtete Wirklichkeitsausschnitt zwecks Beobachtung ‚begradigt' werden muss und dass auch der innermathematische Modellapparat von Menschen bedient […] wird." (Führer 2001, S. 13)

Nun sind wir in der Mathematik. Wir leiten Konsequenzen aus dem Modell ab, indem wir mit den Symbolen unserer mathematischen Sprache kalkulieren (von Hans Schupp mit Weitsicht auf Übertragbarkeit dieses Modells von Modellbildung auf andere Wissenschaften mit „deduzieren“ bezeichnet).

Die innermathematischen Konsequenzen müssen wir in die Wirklichkeit zurückübersetzen (interpretieren), die so erhaltenen Ergebnisse an der Ausgangssituation messen (validieren). Gegebenenfalls geht nun der Kreislauf von vorne los (vgl. SCHUPP 1988, S. 11 f. – BÜCHTER & LEUDERS 2005, S. 76 verwenden dafür das Bild einer *Modellierungsspirale*).

Der Vorteil einer solchen explizierten Modellauffassung ist darin zu sehen, dass Teilprozesse der Modellbildung wie gewünscht abstrahiert, mit Bezeichnungen versehen und damit zur Diskussion und gemeinsamen Reflexion freigegeben sind.

Das hier vorgestellte Modell hilft, dass die Ebenen *Mathematik* und *Wirklichkeit* von den Lernenden (und von den Lehrpersonen) bewusst unterschieden werden können.

Dazu ein einfaches Beispiel:

- Situation: Eine (baumarktübliche) Styroporplatte ist `100` cm lang und `50` cm breit. Wie lang ist ihre Diagonale? (Übrigens: Diese Fragestellung vernachlässigt bereits implizit die Dicke der Platte!)
- Modell: Ein Rechteck mit Seitenlängen `100` und `50`.
- Innermathematische Konsequenz: Diagonalenlänge: $50 \cdot \sqrt{5}$ .
- Weltliches Ergebnis: Diagonalenlänge `112` cm.

Unsere Modellauffassung erinnert uns alle daran, dass die irrationale Antwort nur innerhalb der Mathematik Sinn macht. Oder gibt es doch Styroporplatten mit irrationaler Diagonale?

Irrationale Zahlen sind bloß(?) ein Spiel des Geistes. Es muss sie geben, damit das gewünschte System Mathematik schlüssig ist. Wir wollen sie dazu, und nur aus diesem Grund existieren sie; irrationale Zahlen lassen sich nicht aus der Anwendung heraus motivieren.

Und bei all ihrer Leistungsfähigkeit dürfen wir dennoch nicht vergessen, dass Mathematik in den seltensten Fällen in der Wirklichkeit die alleinige Entscheidungsgrundlage ist.

> Gewiss gibt es viele und häufige Situationen, die durch mathematische Mittel auf Anhieb und eindeutig geklärt werden können. Aber ist gibt auch solche (nicht seltener und meist relevanter), zu deren erkennendem Verständnis und handelnder Bewältigung Mathematik nur einen mehr oder minder wichtigen Beitrag leisten kann. Solche Beispiele auszusparen oder aber auf den mathematischen Gehalt zu reduzieren ist gefährlich, weil Mathematik als deus ex machina und Wirklichkeit als vollständig mathematisierbar präsentiert wird. (SCHUPP 1988, S. 12)

## Andere Modelle von Modellbildung

Eine Situation lässt sich oft nicht eindeutig modellieren, komplexe Situationen lassen viele verschiedene Modelle zu. Modellbildung selbst ist natürlich auch ein komplexer Prozess, so dass es nicht verwunderlich ist, dass wir in der Literatur verschiedene Modellbildungen zu Modellbildung finden.

Auch hier gilt: Begriffsbildung ist immer Ausdruck eines bestimmten (bewussten oder unbewussten) Wollens einer Autorin oder eines Autors oder aber auch einer Gemeinschaft von Autorinnen und Autoren (vgl. FISCHER & MALLE 1985, S. 151).

## Der Regelkreis von Blum et al.

In einem Anhang zu ihrer Didaktik der Analysis, in dem sie der Frage der Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts nachgehen, greifen WERNER BLUM und GÜNTER TÖRNER das Modellbildungsmodell von GABRIELE KAISER et al. auf.

> Im Unterricht sollte […] anhand von Beispielen das <u>Verhältnis zwischen Mathematik und Realität</u> (genauer nach POLLAK 1979: zwischen Mathematik und dem “Rest der Welt“) deutlich werden, etwa im Sinne des folgenden Diagramms […]:

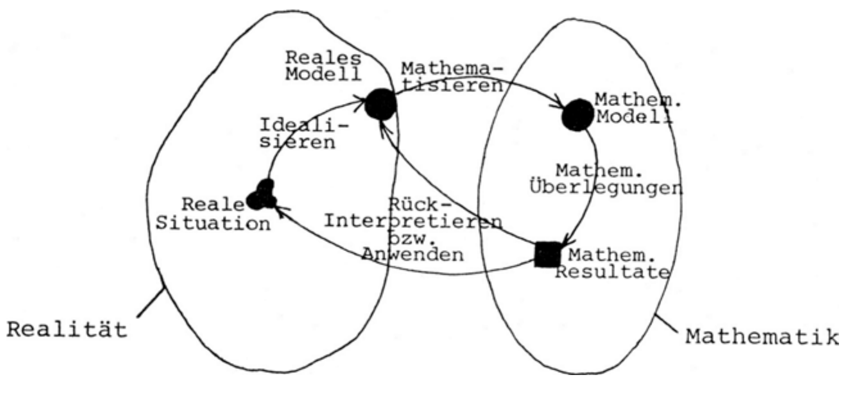



Abb. 5: Der Regelkreis von BLUM et al.

> […] Dieser Prozeß des Überganges zwischen den Bereichen Realität und Mathematik muß im Unterricht sowohl durchgeführt, als auch reflektierend thematisiert werden. […] Eine engere Verknüpfung der Mathematik mit realen Phänomenen führt zu einem „beziehungshaltigen“ Mathematikunterricht (FREUDENTHAL 1973). (BLUM & TÖRNER 1983, S. 247 f.)

Auf das unumgängliche Problem des wahren Realitätsgehaltes der im Mathematikunterricht betrachteten Phänomene bin ich bereits oben eingegangen

## Das Modell von FISCHER und MALLE

Auch ROLAND FISCHER und GÜNTHER MALLE bringen ihre Sicht des Modellbildungskreislaufes in einem Diagramm zum Ausdruck (siehe Abbildung 6).

Im Prinzip enthält dieses Diagramm (wie auch das in Abb. 5 zitierte von BLUM et al.) die von HANS SCHUPP beschriebenen Stationen im Regelkreis der Modellbildung, betont aber andere Aspekte, etwa in der Ausdifferenzierung des Umgangs mit der gegebenen Situation oder in der Explizierung der möglichen Ausgänge der Modellbildung.

Dennoch fehlt ihm etwas: Ihm fehlt die übergeordnete Struktur, das Muster – die Ebenen Welt und Mathematik *und* die Seiten Problem und Lösung – des SCHUPPschen Diagramms.

Für den Mathematikunterricht, den Unterricht in *der* Wissenschaft von den strukturierten und strukturierenden Mustern, ist, wie ich finde, HANS SCHUPPS Vorschlag einfach schöner, und Schönheit ist eine wesentliche Kategorie mathematischen Tuns (vgl. BURTON 1999, S. 95 f und G. H. HARDYS berühmtes „Beauty is the first test“ Hardy 1967, S: 85).

## Offene und geschlossene Modelle

ROLAND FISCHER und GÜNTHER MALLE treffen über ihren Regelkreis hinaus die wichtige Unterscheidung in *offene* und *geschlossene* Modelle (FISCHER & MALLE, S. 261 f.).

- *Geschlossene Modelle* (vgl. Abb. 7) zeichnen sich aus durch strenge Voraussetzungen, ein Zurechtstutzen der Wirklichkeit, eindeutiges Kalkulieren, eindeutige Konsequenzen und das Erledigen der Frage (unter diesen Bedingungen).
- *Offene Modelle* (vgl. Abb. 8) zeichnen sich hingegen aus durch vage Voraussetzungen und das Zulassen von Alternativen, durch ihre Verbindung mit der Welt (ohne die es zu keiner Lösung kommt) und ein für Diskussionen offenes, transparentes Kalkulieren.

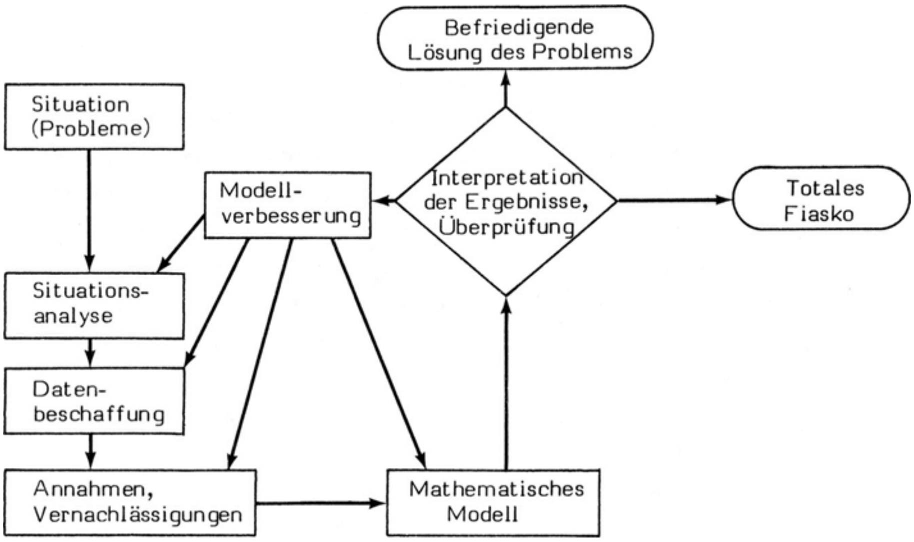



Abb. 6: aus (FISCHER & MALLE 1985, S. 101)

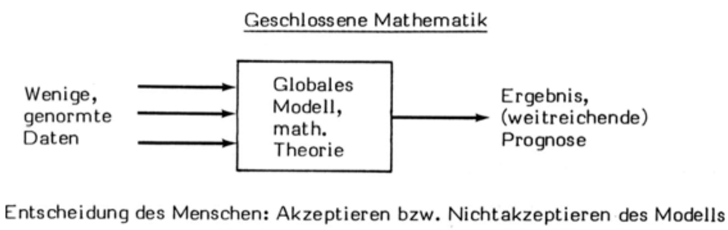



Abb. 7: aus (FISCHER & MALLE 1985, S. 266)

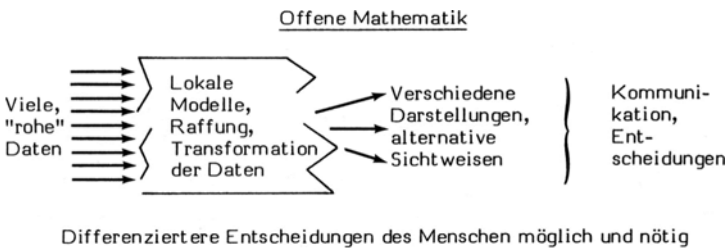



Abb. 8: aus (FISCHER & MALLE 1985, S. 266)

## Einstiege in die Modellbildung

Produktive Aufgaben (siehe HERGET et al. 2001) sind ein erster Schritt zu (noch) komplex(er)en Aufgaben. Bezüglich Komplexität empfiehlt die CTGV für den Mathematikunterricht „a problem of at least 14 steps" (CTGV 1997, S. 46).

Bei Produktiven Aufgaben

> […] geht es uns eher um die „kleine" Form, die Gestaltung normalen alltäglichen Unterrichts. (Herget et al. 2001, S. 5)

Produktive Aufgaben werden

> […] aus **unterrichtspraktischer** Sicht begründet. (Herget et al. S. 5)

Sie bieten wichtige Chancen zu einer im gewöhnlichen Schulalltag realisierbaren Modellbildung, die auch Kolleginnen und Kollegen mit ins Boot nimmt, denen andere Modellbildungen zu hoch gegriffen erscheinen mögen, und sie bieten Chancen zu *redlicher* Modellbildung, die nicht versucht ist, mehr zu versprechen als sie halten kann.

Produktive Aufgaben bieten damit einen Anfang im oft schon große Erfahrungen ermöglichenden exemplarischen Kleinen.

## Kleiner historischer Exkurs – oder: Ein altes Plädoyer für den kleinen Anfang

WALTHER LIETZMANN hat der dritten Auflage des (ursprünglich gemeinsam mit VIGGO TRIER verfassten) Buches „Wo steckt der Fehler?" (LIETZMANN & TRIER 1923) ein neues erstes Kapitel „Täuschungen bei der Größenschätzung" vorangestellt – die vorhergehenden Auflagen begannen noch mit dem Kapitel „Mathematische Trugschlüsse" (vgl. LIETZMANN & Trier 1917). Er beginnt auf der ersten Seite mit:

> I. TÄUSCHUNGEN BEI DER GRÖSSEN-SCHÄTZUNG
>
> Ich vereinige in diesem Abschnitt eine Anzahl von Täuschungen, die darin begründet sind, daß dem auf die vorgelegte Frage Antwortenden die Vertrautheit mit den in Betracht kommenden Größenverhältnissen abgeht. Eine bessere Schulung in der Größenerfassung, als sie gemeinhin vorhanden ist, würde diese Täuschungen unmöglich machen.
>
> **1.** Ich beginne mit einer Reihe ganz einfacher Schätzungen, bei denen zwischen geschätzten und wirklichen Werten, die entweder durch Messung oder durch Rechnung – eine ungefähre Überschlagsrechnung reicht aus – festgestellt werden, meist eine große Kluft zu klaffen pflegt. Der Leser beantworte also zunächst schriftlich die nachfolgenden Fragen und stelle dann den wirklichen Wert daneben. Der Fehler werde dann je nachdem absolut oder prozentual angegeben. (LIETZMANN 1923, S. 1)

Und dann fährt er ganz klein und dadurch wirklich (unterrichts)realitätsnah fort:

> a) Wie hoch ist ein Tisch?
> b) Wie hoch ist die Sitzfläche eines Stuhls?
> c) Wie hoch ist ein moderner Zylinderhut?
> d) Denke an einen dir bekannten runden Turm in der näheren oder weiteren Umgebung deines Wohnortes. Das Wievielfache des Umfanges ist seine Höhe?
> e) Man hat einen Globus von einem Meter Durchmesser. Wie hoch muss man, wenn man das Relief nicht überhöht, den größten Berg Europas, den 4800 m hohen Montblanc, darstellen?
> f) Wie lang ist ein marschierendes Armeekorps?
> g) Wieviel Menschen haben auf einem kreisrunden Platz von 1 km Radius Raum?
> h) Wie groß muß ein quadratischer Platz sein, der alle Einwohner Deutschlands aufnehmen kann?
> i) Ist es möglich, alle Bewohner der Erde auf der Fläche des Bodensees unterzubringen?
> k) Wieviel Jungens kann man in einem Kubikmeter unterbringen?
> l) Wieviel Erbsen haben in einem Wasserglas der üblichen Größe Platz?
> m) Um wie viel würde der Bodensee steigen, wenn man in ihm die ganze lebende Menschheit ertränken würde?
> n) Wie schwer ist die Luft in deinem Wohnzimmer? [Fußnote: Ein Liter Luft wiegt 1,293 Gramm.]
> o) Wieviel wiegt eine Korkkugel von einem Meter Radius? [Fußnote: Das spezifische Gewicht von Kork ist 0,24 Gramm.]
>
> **2.** Ein paar Fragen mögen sich in den Dienst der Veranschaulichung der Größenverhältnisse unserer Erde stellen:
>
> a) Wie hoch wölbt sich ein See von 1 km, von 4 km, von 6 km Breite mit seiner Mitte über der Ebene, die die beiden Ufer verbindet, wie groß ist mit anderen Worten der Einfluß der Erdkrümmung auf die Abweichung von der Ebene?
> b) Wie groß ist die Herauswölbung des Kaspischen Sees?
> c) Die Friedrichsstraße in Berlin ist etwas über 3 km (genau 3240 m) lang und geht ziemlich genau von Nord nach Süd. Die Häuser, die an den beiden Enden stehen, sind natürlich vertikal gebaut, das heißt, ihre senkrechten Kanten weisen zum Erdmittelpunkt, sie bilden also einen Winkel miteinander. Wie groß ist der?

d) Da die senkrechten Kanten der beiden Endhäuser der Friedrichsstraße nicht parallel sind, klaffen sie oben etwas mehr als unten auseinander. Um wie viel etwa?

e) Die Friedrichsstraße verläuft genau wa[a]gerecht. Wegen der Erdabplattung, die ja $\frac{1}{300}$ beträgt, ist also das Nordende dem Erdmittelpunkte näher als das Südende. Um wie viel etwa?

Ich möchte zu diesen Aufgaben [gemeint sind die unter **2.** – A. L.], da ein Nachrechnen dem einen oder anderen Schwierigkeiten bereitet, die Ergebnisse angeben. Näheres ist hierüber bei MARTUS, Astronomische Erdkunde, 4. Aufl., Dresden, Koch, 1912, zu finden: a) 2 cm, 31 cm und 71 cm; beachte die starke Zunahme der Werte! b) 28 km; c) $1\frac{3}{4}'$ ; d) etwa 1 cm; e) das Nordende ist 10,6 m dem Erdmittelpunkt näher als das Südende. Man muß also fast drei Stockwerke hoch steigen, um den gleichen Abstand am Nordende zu haben, wie am Südende. (LIETZMANN 1923, S. 1 f.).

Diese nun vor über achtzig Jahren von WALTHER LIETZMANN vorgeschlagenen Aufgaben sind nach wie vor im Wesentlichen aktuell. Sicherlich sind Zylinder aus der Mode, und der Marschlänge eines Armeekorps messen wir im alten Europa wohl nicht mehr den gleichen allgemein bildenden Wert zu wie damals, aber mit diesen Abstrichen können und sollten die Aufgaben auch heute noch im Mathematikunterricht eingesetzt werden.

Die Fragen aus **1.** sollten Schülerinnen und Schüler (Studentinnen und Studenten, Kolleginnen und Kollegen) beantworten können, bevor wir ihnen anspruchsvollere Modellbildungen zumuten.

Es klingen in diesen Aufgaben schon viele Aspekte von Modellbildung an: So laden etwa die Aufgaben a), b), d) und l) unter **1.** ein zur häufig vernachlässigten Validierung. Aufgabe m) unter **1.** ist eine ehrliche Konsequenz von Aufgabe i), die die Absurdität der Frage offen legt; sie tritt auch als Schülerfrage im Unterricht zu Tage und braucht von uns dann gar nicht mehr extra gestellt zu werden.

Die Kombination der Erkenntnisse, die bei der Bearbeitung von a) und e) unter **2.** gewonnen werden, führt zu neuen interessanten Fragestellungen.

Alle Aufgaben sind geeignet, Größenvorstellungen zu erwerben oder zurechtzurücken. Dies ist eine wichtige und notwendige Grundlage für sinnvolle Modellbildungen im Mathematikunterricht.

Übrigens: WALTHER LIETZMANN hat seine Vorschläge auch direkt in die von ihm (mit)verfassten Schulbücher eingebracht.

## Einstieg in die Modellbildung mit Produktiven Aufgaben (9. oder 10. Schuljahr)

Es ist eine alte lehr-lern-theoretische Forderung, dass wir die uns anvertrauten Lernenden dort abholen müssen, wo sie stehen. Dies gilt für die Schülerinnen und Schüler in unserem Unterricht, aber ebenso selbstverständlich auch für Lehrpersonen, für unsere Kolleginnen und Kollegen, die wir gerne davon überzeugen und dazu befähigen wollen, in ihrem eigenen Unterricht auch aktiv Modellbildung zu betreiben.

Die hier ausgewählten *Produktiven Aufgaben* bleiben selbst für Neueinsteigerinnen und Neueinsteiger in die Modellbildung überschaubar und nachvollziehbar, können so die Angst vor dem Ungewissen nehmen und ebnen einem Verständnis von Modellbildung den Weg – im Gegensatz zu vielen anderen guten, aber zu großen Vorschlägen, die oft von besonders engagierten (und darüber hinaus noch in die vorgeschlagene Sache sehr vertieften) Kolleginnen und Kollegen gestaltet sind und darum häufig nur von eben solchen mit entsprechendem Vorwissen im Unterricht Erfolg versprechend einsetzbar sind.

Die im Folgenden vorgestellten Produktiven Aufgaben können uns als vertrauensbildende Maßnahmen dienen; sie sind als *kleine* Modellbildungen ein Gewinn für jeden Unterricht und helfen, den Weg für eine reflektierende Modellbildung im Unterricht zu bereiten.

## Ein möglicher Unterrichtsgang

Betrachten wir nun die folgenden von Wilfried HERGET in (HERGET et al. 2001) präsentierten Aufgaben in Hinblick auf *Modellbildung*.

Die Situation ist in diesen Beispielen jeweils auf einem DIN A4-Arbeitsblatt durch ein Foto und (außer bei Aufgabe 8) einen kurzen Text gegeben, so, wie wir eine Situation etwa in Zeitungen vorfinden können. Auf ein beinhaltetes Problem wird durch eine (mehr oder weniger offene) Frage fokussiert.

Ich habe die hier vorgestellten Aufgaben in der angegebenen Reihenfolge wiederholt zum Einstieg in die Modellbildung im Mathematikunterricht genutzt, insbesondere auch im Unterricht von Kolleginnen und Kollegen, die sehen wollten, ob und wie man auch in ihren Klassen solche Aufgaben einsetzen kann (und die meist seitdem begeistert in ihrem eigenen Unterricht immer wieder auf Produktive Aufgaben – nicht nur zur Modellbildung – zurückgreifen).

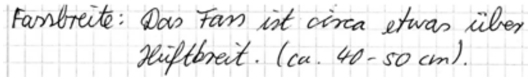
Die hier gleich kurz skizzierten vielgestaltigen Lösungswege habe ich im Wesentlichen von Schülerinnen und Schülern aus 10. Klassen (Realschule), die die Aufgaben in Kleingruppen (aus drei bis fünf Lernenden) bearbeiteten und ihr Vorgehen in kurzen Aufsätzen individuell oder gemeinsam schriftlich festhielten. Daneben werde ich auch auf Bearbeitungen durch Studierende meiner Lehrveranstaltungen und durch sich fortbildende Lehrpersonen aus einigen von mir moderierten Fortbildungen zum Thema eingehen.

*Zweizylinder-Fahrrad*
(HERGET et al. 2001, Aufgabe 18)

Abb. 8: (aus HERGET et al. 2001, S. 33)

Gezeigt wird auf dem Aufgabenblatt ein Mann auf einem Fahrrad, an dessen Gepäckträger zwei (gleiche?) Fässer montiert sind. Gefragt wird danach, wie viel Wasser der junge Mann damit transportieren kann.

Wie verläuft hier die Modellierung und Mathematisierung der *Situation*?

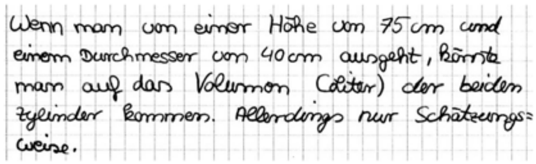


Fassbreite: Das Fass ist circa etwas über Hüftbreit. (ca. 40-50 cm).

Abb. 9: (aus der Lösung eines Schülers)

Sachdienliche Daten erhalten wir aus dem Bild über (abzuschätzende externe) Vergleichsgrößen, etwa über die Größe des Hinterrades (26 oder 28 Zoll oder aus der Erinnerung: „Das Hinterrad meines Fahrrades geht mir bis hierher!“, oder wie unten durch Vermessen eines Fahrrades auf dem Schulhof) oder alternativ über die Hüftbreite des Mannes (wie in Abb. 9 – oder: „Der ist ungefähr genauso breit wie ich.“) oder aber über die Sattelhöhe.

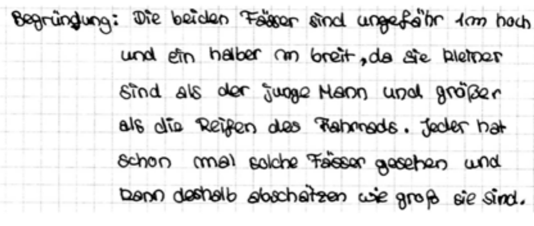
Im Foto kann man hier recht genau messen. Der ermittelte Maßstab, der in die Rechnung eingeht, bleibt aber durch einen von der (Un)Genauigkeit der Schätzung (der Vergleichsgrößen) abhängigen Fehler behaftet.



Wenn man von einer Höhe von 75cm und einem Durchmesser von 40cm ausgeht, könnte man auf das Volumen (Liter) der beiden Zylinder kommen. Allerdings nur Schätzungsweise.

Abb. 10: (aus der Lösung einer Schülerin)

Genauer bestimmbar ist aus dem Foto das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser der Fässer, was aber nicht von allen als notwendig erachtet wird:



Begründung: Die beiden Fässer sind ungefähr 1m hoch und ein halber m breit, da sie kleiner sind als der junge Mann und größer als die Reifen des Fahrrads. Jeder hat schon mal solche Fässer gesehen und kann deshalb abschätzen wie groß sie sind.

Abb. 11: (aus der Lösung einer Schülerin)

Als externes Datum wird noch die Dichte von Wasser benötigt. Wir nehmen an, dass die Fässer nicht ganz gefüllt werden, und setzen eine Füllhöhe fest. Wir vernachlässigen die wirkliche Form der Fässer und modellieren sie idealisiert als Zylinder. Interessanterweise verzichten viele Schülerinnen und Schüler hier (im Gegensatz etwa zur nächsten Aufgabe) darauf, eine Zeichnung dieses Modells zu machen; warum auch eine visuelle Darstellung von einem Modell erzeugen, von dem man bereits eine genaue Vorstellung hat?

Wir erhalten aufgrund dieser Überlegungen so gut wie immer als *formales mathematisches Modell*:

$$m = \rho V = \rho \pi r^2 h,$$

wie z. B. auch in der folgenden Schülerlösung:

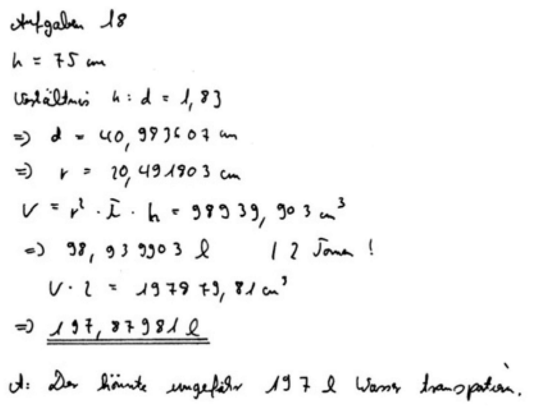

Aufgabe 18
h = 75 cm
Verhältnis h : d = 1,83
=> d = 40,983607 cm
=> r = 20,491803 cm
V = r² · π · h = 98939,903 cm³
=> 98,939903 l | 2 Tonnen !
V · 2 = 197879,81 cm³
=> 197,87981 l
A: Der könnte ungefähr 197 l Wasser transportieren.

Abb. 12 a: Eine Rechnung zu Aufgabe 18 …

Diese Lösung erklärt er wie folgt:


Erklärung:
Durch die Messung eines echten Fahrrads habe ich die Höhe der Tonnen rausbekommen. Ich habe dann das Verhältnis von d : h durch die Daten, die ich an dem Bild ablesen konnte ausgerechnet. Mit der Angabe h = 75 cm und dem Verhältnis h : d = 1,83 konnte ich den Durchmesser ausrechnen. Mit beiden Angaben konnte ich das Volumen der beiden Zylinder ausrechnen und es in Liter umwandeln!

Abb. 12 b: … und die zugehörende Erklärung

Die innermathematischen *Konsequenzen* müssen, um zu einem angemessenen *Ergebnis* zu gelangen, sinnvoll (in Abhängigkeit von der Genauigkeit der Eingangsdaten) gerundet werden.

Nun könnte man anmerken, dass bei den vagen Daten die in Abbildung 11 gegebene Antwort viel zu genau sei, und das wäre ja auch objektiv richtig. Aber verstehen wir Antworten immer auch aus ihrem schulischen Kontext?! Der Schüler besucht ein 10. Schuljahr und hat eine landeszentrale schriftliche Prüfung zum mittleren Bildungsabschluss vor sich. In den zentralen Korrekturvorgaben werden Volumenangaben immer auf drei Stellen nach dem Komma gerundet! Das ist eine normierende Randbedingung, die man bei der Diskussion von Modellbildung im real existierenden Unterricht zu beachten hat, selbst wenn sie ausgesprochen unsinnig ist! Vor diesem Hintergrund ist die vom Schüler hier gegebene, die Nachkommastellen vernachlässigende Antwort von durchaus mutiger Ungefährität.

Natürlich vergessen Schülerinnen und Schüler unter ihrer Erarbeitung des Fässervolumens häufig die gestellte Frage; diesen muss man auf den gewünschten Weg zurückhelfen.

Die *Validierung* besteht hier darin, sich zu fragen (und zu beantworten) ob eine Masse der berechneten Größe mit einem Fahrrad überhaupt transportiert werden kann; etwa im Vergleich zu Artistenpyramiden auf Fahrrädern im Zirkus, wie es ein Schüler vorgeschlagen hat. Selbstverständlich kann dabei auch die Frage aus der Klasse kommen, ob denn die Fässer überhaupt wasserdicht seien (Antwortmöglichkeit: Das nehmen wir an!) und wozu der Fahrradfahrer Wasser transportieren sollte (Antwortmöglichkeit: Das können wir nicht wissen, und das ist auch nicht so wichtig: Der Realitätsbezug einer solchen Aufgabe ist in der Gewinnung von Daten (hier im Wesentlichen aus dem realen Foto) und deren Weiterverarbeitung zu suchen; die Geschichte ist frei erfunden!).

Dieses erste Beispiel ermöglicht eine eigene Entscheidungen benötigende Modellbildung mit allen zuvor beschriebenen Teilprozessen des Regelkreises. In deren Diskussion können hier bereits behutsam – mit dem Ziel eines abstrahierten Modells von Modellbildung – die Bezeichnungen aus dem Regelkreis eingeführt werden.

*Luft-Nummer*
(Herget et al. 2001, Aufgabe 17)

Gezeigt wird ein fliegender Heißluftballon, auf dem ein Mann steht! Gefragt wird danach, wie viel Liter Luft der Ballon wohl enthält.


Abb. 12: (aus HERGET et al. 2001, S. 32)

Ergänzt wird diese Abbildung durch einen Zeitungstext:

> Viel heiße Luft bringt einen mit Sicherheit nach oben. Niemand weiß das besser als

> **Ian Ashpole**. Der 43-Jährige stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte dann die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen vorbei. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer keine Verletzungen davon. (HERGET et al. 2001, S. 32)

Die Datenbeschaffung muss auch hier über das Foto erfolgen. Es hat sich als hilfreich erwiesen, die kleinen der zu messenden Größen nicht auf den Arbeitsblättern, sondern auf der durchleuchteten Overheadfolie zu messen, die als sinnvolles Medium für gemeinsame Diskussionen bereit liegt. Der Text liefert keine in Hinblick auf die gestellte Frage sinnvolle Information – dennoch versuchen immer wieder einige Schülerinnen und Schüler die Angabe 1500 Meter in ihre Rechnungen zu integrieren. Die Größe des Ballons erhalten wir über die geschätzte Größe des Mannes, der auf dem Bild gemessene 6 bis 7 mm groß ist (oder aber auch über die Größe des Korbes). Dabei hat einmal eine Schülerin eine neue, situativ nahe liegende Maßeinheit eingeführt und so gezeigt, dass sie die Leitidee Messen hier tragfähig verinnerlicht hat:

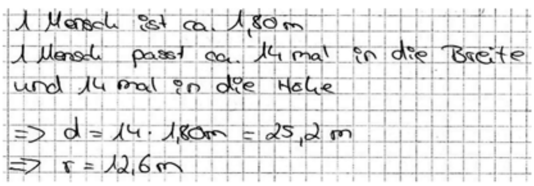



Abb. 14: Maßstab Mensch?!

Hier ist es schwieriger als in Aufgabe 18, im Foto genau zu messen. In einer der Klassen hat ein Schüler vorgeschlagen, das Bild, von dem er wusste, dass es von CD war, also digital vorlag, mit einem Bildverarbeitungsprogramm durch „Pixel zählen lassen" zu vermessen, um möglichst genaue Informationen über die Größe zu erhalten.

Das nach meinen Erfahrungen am häufigsten auftretende Modell ist, den Ballon als zusammengesetzt aus Halbkugel und Kegel(stumpf) aufzufassen:

$$V_{Ballon} = V_{Halbkugel} + V_{Kegel} .$$

Das ist das typische Modell bei Lehrpersonen (und ich kann mich da nicht ausnehmen). Auch viele Schülerinnen und Schüler wählen dieses Modell, besonders in Klassen, die gerade Stereometrie zusammengesetzter Körper behandelt haben.

Aber die Eingangsdatenfehler – bei der Messung der Größen im Bild und bei der Schätzung der wahren Größe des Ballonartisten – blasen sich kubisch (nicht linear!) auf. Eine genauere Fehleranalyse oder zumindest das Durchrechnen verschiedener Beispiele ist hier angebracht. Oder wir vergleichen und diskutieren, um diese Erfahrung von Nichtlinearität bewusst zu machen, im Plenum die verschiedenen Ergebnisse, die in der Klasse – abhängig von den jeweils verwendeten Eingangsdaten – gefunden wurden.

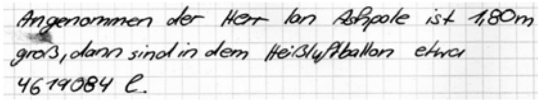



Abb. 15: Antwort einer Schülerin

In einer Schulklasse finden wir in der Regel auch die Modellierung des Ballons als eine Kugel oder als Kegel(stumpf) oder weitere Modellierungen:

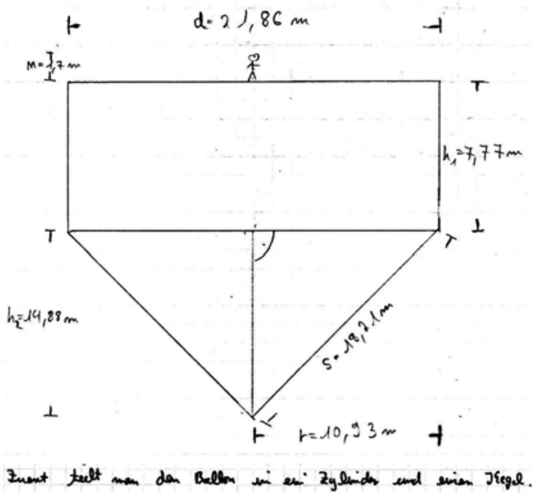



Abb. 16: Ein Modell des Ballons

Alle diese Modelle liefern Ergebnisse in derselben richtigen Größenordnung – natürlich auch der effiziente Quader, den der professionelle Numeriker in der gegebenen Situation wohl wählen würde. Mehr ist mit den hier vorhandenen Daten wirklich nicht zu erreichen und zu verlangen. Aber:

> Je mehr man mathematisch vorgebildet ist, umso mehr Instrumentarium wird man […] wie selbstverständlich einsetzen – und zwar ohne darüber nachzudenken, ob diese hoch genauen Instrumente wirklich genauere Ergebnisse liefern. (HERGET et al. 2001, S. 142)

Viele Studierende in meinen Lehrveranstaltungen an der Universität des Saarlandes, denen ich diese Aufgabe stellte und die i. d. R. nicht allzu lange davor die Zwischenprüfung in Mathematik abgelegt hatten, versuchten den Ballon über einen geeigneten Funktionsgraphen als Rotationskörper zu modellieren. Solch einer Verschwendung von Instrumentarium kann und sollte man durch reflektierende Modellbildung entgegenwirken!

Dieses zweite Beispiel liefert ein einfaches offenes Modell, das Diskussionen über ein gleichberechtigtes Nebeneinander *verschiedener* Modelle und über die Angemessenheit von Modellen ermöglicht.

Nebenbei: Mit CAS können Lernende schneller als von Hand verschiedene Eingangsdaten in verschiedenen Modellen selbst durchspielen, um zu eigenen verschiedenen Ergebnissen zu gelangen – auch hier ist im Kleinen bereits der durch Neue Medien und Werkzeuge mögliche Fortschritt im Mathematikunterricht zu finden.

*Lüneburger Weitblick*
(HERGET et al. 2001, Aufgabe 14)

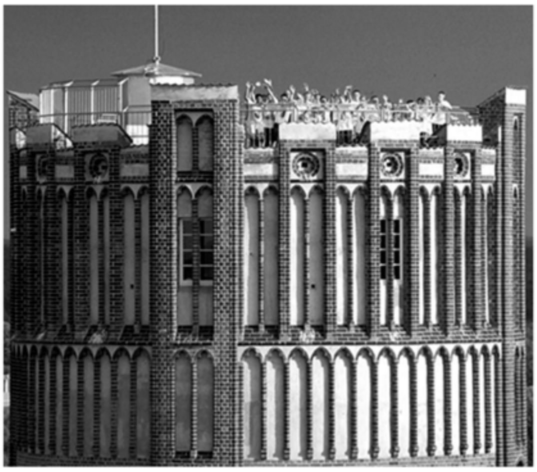


Abb. 17: (aus HERGET et al. 2001, S. 29)

Gezeigt wird die Aussichtsplattform des Lüneburger Wasserturms. Beschrieben werden darunter in einem – viele weitere (Des)Informationen enthaltenden – Zeitungstext die Höhe dieses Turms mit 56 m und die Sichtweite mit 40 km. Gefragt wird danach, ob das denn stimmen kann.

Die Höhe des Wasserturms wird intern aus dem Text gewonnen – ein wertvoller Beitrag zur Lesekompetenz –, der Erdradius extern. Zu dessen Bestimmung verwenden die Schülerinnen und Schüler meist den ihnen geläufigen Erdumfang 40000 km.

Die Erde hat einen Umfang von 40000 km. Durch diese Angabe konnte ich den Radius der Erde ausrechnen. Wenn man zum Radius 56 m, also die Höhe des Turms dazu addiert, hat man den Radius der Erde + den Turm. Diese Seite bildet mit dem normalen Radius ein Rechtwinkigs Dreieck.

Abb. 18: (aus einer Schülerlösung)

Das mathematische Modell zur Situationsbeschreibung sieht wie folgt aus: Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse *Erdradius plus Turmhöhe* und den Katheten *Erdradius* und *Blicktangente an die Erde*, und es wird visuell dargestellt in einer nicht maßstabgerechten Zeichnung.

Doch wie gelangt man zu diesem Modell? Die Lage Lüneburgs im Flachland spricht sich in der Klasse schnell herum: Berge und ähnlich große Hindernisse spielen dort glücklicherweise keine Rolle. (Es ist aber durchaus (an-)reizvoll, analogen Fragestellungen in hügeligem Land anhand von Karten fachübergreifend mit dem Erdkundeunterricht nachzugehen.) Wir nehmen an, dass wir gutes Wetter mit idealen Sichtbedingungen haben: Wir idealisieren.

Viele Schülerinnen und Schüler versuchen es zuerst mit dem Modell „Erde als Scheibe“:

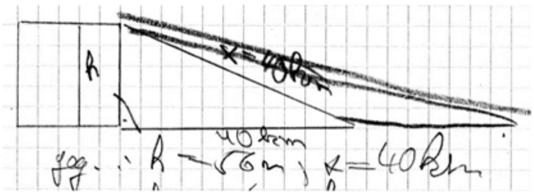



Abb. 19: Ein häufiger falscher Ansatz

Ähnliche Skizzen können wir aber auch bei manchen zukünftigen oder auch bei bereits aktiven Lehrpersonen beobachten: Bei einer Fortbildung im Rahmen eines pädagogischen Tages an einer Schule, an der Mathematik zu großen Teilen fachfremd unterrichtet werden muss, dauerte es bei den anwesenden engagierten Kolleginnen und Kollegen über 20 Minuten, bis die ersten problemadäquaten Skizzen produziert wurden – die dann aber echte Erfolgserlebnisse bescherten!

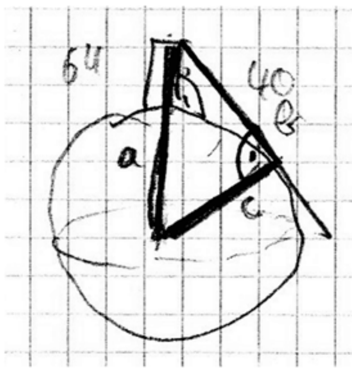



Abb. 20: Endlich auf dem richtigen Weg!

Letztlich wird das adäquate Modell i. d. R. doch gefunden (vgl. auch ANNESER 2005). Aber immer wieder gibt es auch Schülerinnen und Schüler, die kurz vor ihrem mittleren Bildungsabschluss noch nicht die hilfreiche

Macht des Werkzeugs Mathematik für sich entdeckt haben und es darum – außer, wenn sie explizit dazu aufgefordert werden – nicht einsetzen:

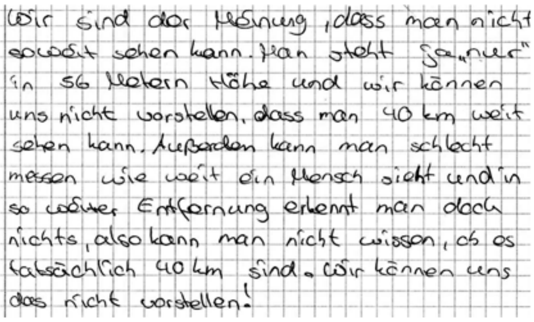

Wir sind der Meinung, dass man nicht soweit sehen kann. Man steht ja „nur" in 56 Metern Höhe und wir können uns nicht vorstellen, dass man 40 km weit sehen kann. Außerdem kann man schlecht messen wie weit ein Mensch sieht und in so weiter Entfernung erkennt man doch nichts, also kann man nicht wissen, ob es tatsächlich 40 km sind. Wir können uns das nicht vorstellen!

Abb. 21: Reicht es ohne Mathematik?

Das Beispiel *Lüneburger Weitblick* liefert ein einfaches geschlossenes Modell, bei dem der Schwerpunkt im ersten Teilprozess, der Modellierung, der geeigneten Strukturierung liegt, zu der man den Lernenden die angemessene Muße gönnen muss.

*Zeitung lesen unter erschwerten Bedingungen* (HERGET et al. 2001, Aufgabe 8)


Abb. 22: (aus HERGET et al. 2001, S. 23)

Gezeigt wird ein Mann, der ein Fahrrad fährt, auf dessen Gepäckträger ein großer Stapel Zeitungen befestigt ist, auf dem wiederum ein zeitungslesender Mann sitzt.

Gefragt wird danach, wie schwer denn wohl dieser Stapel Zeitungen ist. Hingeleitet wird auf dem Arbeitsblatt ursprünglich über die Frage, wie hoch ein Stapel von 11111 Blatt Papier ist, worauf ich im Unterricht allerdings verzichte. Da die Arbeitsblätter auf CD auch als `doc`-Dateien vorliegen, ist ein individuelles Editieren vor dem Drucken ein Leichtes. (Schon wieder: Ein großer kleiner Fortschritt durch Neue Medien.)

Dieses letzte Beispiel führt auf ein einfaches, offenes Modell, bei dem der Schwerpunkt auf der externen Datenbeschaffung liegt; das mathematische Modell Quader ist offensichtlich. Die Größen lassen sich wie in der Aufgabe *Zweizylinder-Fahrrad* bestimmen, die dort erworbenen Kompetenzen zum Schätzen und zur Bewertung des Schätzens nutzen. Die Beschaffung der Dichte von Papier ist auf sehr vielfältige Weise möglich, etwa über die Dichte von Holz, die über des Argument „Holz schwimmt, ist also leichter als Wasser" bestimmt wird, oder über die Flächendichte von Papier (80 Gramm pro Quadratmeter, wie auf den meisten Schulheften zu lesen) und das Volumen eines Kopierpapierstapels, oder über das Schätzen des Gewichts und der Dicke einer Samstagsausgabe einer Zeitung (aus der Erinnerung) oder Nachlesen oder …

## Sollte Modellbildung Thema sein?

Einigkeit herrscht heute unter allen am Mathematikunterricht Interessierten sicherlich darüber, dass Modellbildung im Mathematikunterricht (implizit oder explizit) thematisiert werden soll.

HANS SCHUPP weist darauf hin, dass

> *zentrale Modelle der SI-Mathematik* meist auch *als Standardmodelle* taugen. Das gilt insbesondere für die dort auftretenden Funktionen. (SCHUPP 1988, S. 14)

Die Formel für das Volumen eines Zylinders ist in natürlicher Weise eine solche Funktion. Der vorgestellte Unterrichtsgang zeigt, wie in der Stereometrie (und ich habe darin bewusst auch eine nicht stereometrisch zu bearbeitende Aufgabenstellung aufgenommen) neben Stereometrie auch Modellbildung Thema sein kann. Wir können den vorgeschlagenen Unterrichtsgang auch umgekehrt lesen: Wir haben Modellbildung diskutiert und nebenbei auch noch Stereometrie geübt!

Die Frage ist also genauer: Sollte Modellbildung (etwa in Form einer Einführung in obiges Regelkreismodell) ein eigenständiges Thema im Mathematikunterricht sein? Mit einer Verankerung in Curricula, Lehrplänen, Rahmenrichtlinien der Klasse 9 oder 10?

Meine Antwort lautet: Ja! Auf der einen Seite

> setzt das Verständnis des Realitäts-Modell-Bezuges eine gewisse Reife, eine Fähigkeit zu relativierendem und bewertendem Denken voraus (SCHUPP 1988, S. 15),

auf der anderen Seite aber können wir den Erwerb dieser Fähigkeit gerade durch eine bewusste Diskussion eines selbst abstrahierten Modells an geeignet gewählten konkreten Beispielen unterstützen.

Und nicht zuletzt ist die Reflexion der Ebenen *Welt* und *Mathematik* Voraussetzung einer reflektierenden Bewertung von *Mathematik als Spiel* und *Mathematik als Werkzeug.*

Übrigens: In den Bildungsstandards taucht *Modellieren* inzwischen explizit als Kompetenz (K3) auf.

## Schluss zum (kleinen?) Anfang

Der hier angedeutete Unterrichtsgang hat sich in meinem eigenen Unterricht bewährt.

Der hier angedeutete Unterrichtsgang mit einer bewussten Diskussion des Regelkreises ist nach meiner Erfahrung geeignet, Lehrpersonen und solche, die es werden wollen, für das Thema *Reflektierende Modellbildung* zu sensibilisieren und zu gewinnen.

Ich hoffe, ich habe auch Sie gewonnen.

Und fangen Sie ruhig klein an.

## Literatur


ANNESER, FRANZ [2005]: Wie weit ist es bis zum Horizont? Ein Beispiel für selbstverantwortliches Lernen. – In: *Praxis der Mathematik* 47(2), S. 9–12.

BENDER, PETER [2004]: Die etwas andere Sicht auf den mathematischen Teil der internationalen Vergleichsuntersuchungen PISA sowie TIMMS uns IGLU. – In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 78/2004. S. 101–108.

BÜCHTER, ANDREAS & LEUDERS, TIMO [2005]: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. – Berlin: Cornelsen Scriptor 2005.

BURTON. LEONE [1999]: Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. – In: SCHWANK, INGE (Hrsg.): European Research in Mathematics Education I. – Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik 1999, S. 90–105.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt [1997]: The Jasper Project: lessons in curriculum, instruction, assessment, and professional development. – Lawrence Erlbaum Associates 1997.

EDELMANN, WALTER [2000]: Lernpsychologie. 6., vollständig überarbeite Auflage – Weinheim: Beltz PVU 2000.

FISCHER, ROLAND & MALLE GÜNTER [1985]: Mensch und Mathematik. – Mannheim: BI 1985.

FÜHRER, LUTZ [2001]: Effizienz oder Substanz? Pädagogische Überlegungen zum Mathematikunterricht
http://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/forschung/Effizienz.pdf

HARDY, GODFREY HAROLD. [1967]: A Mathematician's Apology. With a foreword by C. P. SNOW. Cambridge University Press (First Edition 1940, Reprinted with foreword 1967).

HENN, WOLFGANG [1997]: Realitätsnaher Mathematikunterricht mit DERIVE. – Bonn: Dümmler 1997.

HERGET, WILFRIED & JAHNKE, THOMAS & KROLL, WOLFGANG [2001]: Produktive Aufgaben. – Berlin: Cornelsen 2001.

HEYMANN, HANS-WERNER [1996]: Allgemeinbildung und Mathematik. – Weinheim: Beltz 1996.

HISCHER, HORST & LAMBERT, ANSELM [2002]: Begriffs-Bildung und Computeralgebra. – In: HISCHER, HORST (Hrsg.): Mathematikunterricht und Neue Medien. – Hildesheim; Berlin: Franzbecker 2002.

JAHNKE, THOMAS [2005]: Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. Vortragsskript zum Vortrag auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik in Bielefeld.

LAMBERT, ANSELM [2003]: Modellieren, Model(l)ing, Modellbildung: Ein Thema? – In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2003 – Hildesheim: Franzbecker 2003. S. 381–384.

LAMBERT, ANSELM & PETERS, UWE [2005]: Straßen sind keine Splines. – In: HISCHER, HORST & HERGET, WILFRIED & LAMBERT, ANSELM (Hrsg.): Mathematikdidaktik für den Unterricht. HANS SCHUPP zum siebzigsten Geburtstag. – Hildesheim / Berlin: Franzbecker. S. 23–43 (auch: *mathematica didactica* 28(1), S. 23–43).

LIETZMANN, WALTHER & TRIER, VIGGO [1917]: Wo steckt der Fehler? 2., vermehrte u. verbesserte Auflage. – Leipzig: Teubner, 1917.

LIETZMANN, WALTHER & TRIER, VIGGO [1923]: Wo steckt der Fehler? 3., stark vermehrte u. verbesserte Auflage. – Leipzig: Teubner, 1923.

LIETZMANN, WALTHER [1927]: E. BARDEYS Aufgabensammlung für Arithmetik, Algebra und Analysis. Reformausgabe B: für Anstalten realer Richtung. Unterstufe. Bearbeitet von Dr. W. LIETZMANN. 11., durchgesehene Auflage. – Leipzig: Teubner. 1927.

LIETZMANN, WALTHER [1941]: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. – Breslau: Ferdinand Hirt 1941.

SCHUPP, HANS[1988]: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. – In: *Der Mathematikunterricht* 34(6) 1988, S. 5–16.

STEINER, G. [2001]: Lernen und Wissenserwerb. – In: KRAPP, A. & WEIDEMANN, B. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. 4., vollst. überarbeitete Aufl. – Weinheim: Beltz PVU 2001.