

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 182

**Dem Aliasing auf der Spur —  
Wie wir Neue Medien als Funktionen entdecken können**

Pia Selzer

Saarbrücken 2006



**Dem Aliasing auf der Spur —**  
**Wie wir Neue Medien als Funktionen entdecken können**

**Pia Selzer**

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung Mathematik  
Postfach 15 11 50  
D-66041 Saarbrücken  
Germany  
[piaselzer@math.uni-sb.de](mailto:piaselzer@math.uni-sb.de)

Edited by  
FR 6.1 — Mathematik  
Universität des Saarlandes  
Postfach 15 11 50  
66041 Saarbrücken  
Germany

Fax: + 49 681 302 4443  
e-Mail: [preprint@math.uni-sb.de](mailto:preprint@math.uni-sb.de)  
WWW: <http://www.math.uni-sb.de/>

---

# Dem Aliasing auf der Spur —

## Wie wir Neue Medien als Funktionen entdecken können

von

**Pia Selzer, Saarbrücken**

### 1 Einleitung

Wie in [Hischer 2006 b] dargestellt wird, kommt im Verhältnis von Funktionen und Medien eine Trias der folgenden drei Aspekte zum Tragen:

- *Darstellung von Funktionen durch Medien:*  
Konkrete Funktionen werden oft durch Medien dargestellt.
- *Funktionen als Medien:*  
Funktionen dienen oft der medialen Darstellung von Kultur und Wirklichkeit.
- *Medien als Funktionen:*  
Medien können oft als Funktionen (also als eindeutige Zuordnungen) auftreten.

[Hischer 2006 b, 24]

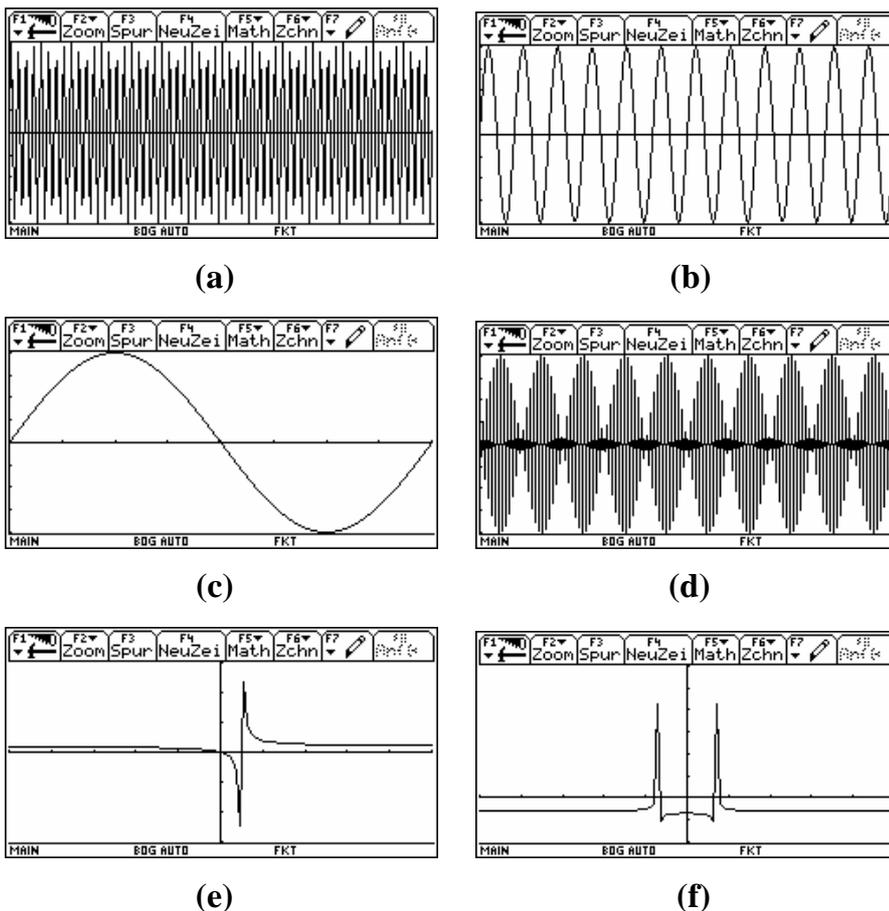
[Hischer 2006 b] führt dazu einige Beispiele wie Keilschrifttafeln (vgl. [Hischer 2006 b, 28 ff.]), zeitachsenorientierte Funktionen (vgl. [Hischer 2006 b, 30 ff.]), empirische Funktionen (vgl. [Hischer 2006 b, 32]) sowie Funktionen in der Musik (vgl. [Hischer 2006 b, 32 ff.]) an, welche die Gültigkeit der oben genannten Trias belegen; zudem treten in diesem Zusammenhang neue Erkenntnisse über die genannten Beispiele zutage, die uns die dahinter stehenden Funktionen besser verstehen lassen. Unter diesem Gesichtspunkt soll nun die Reihe der in [Hischer 2006 b] dargestellten Beispiele ergänzt werden, wobei im Folgenden insbesondere das Verhältnis von Funktionen und Neuen Medien im Blickpunkt steht: Die Berücksichtigung der oben genannten drei Aspekte bietet uns dabei die Möglichkeit, unsere Sichtweise von Neuen Medien zu reflektieren und unseren Verstehenshorizont diesbezüglich zu erweitern.

## 2 Funktionenplotter und Funktionsplots

Funktionenplotter geben uns die Möglichkeit, termdefinierte Funktionen graphisch in einem sog. Funktionsplot darzustellen. Damit erfüllt das Neue Medium „Funktionsplotter“ den oben an erster Stelle genannten Aspekt der *Funktionsdarstellung*. In Bezug auf den zweiten Aspekt, wonach die dargestellte Funktion selbst als *Medium zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit* auftreten kann, kommt es ganz

darauf an, welche Absicht wir mit der jeweiligen Funktionsdarstellung – im hier betrachteten Falle der Funktionenplotter geht es ja um die *graphische* Darstellung einer Funktion<sup>1</sup> – verfolgen: Soll der Funktionsplot ein Stück Kultur oder Wirklichkeit repräsentieren, so muss er in dieser Hinsicht interpretierbar sein, und die vom

Funktionenplotter gelieferten „Funktionswerte“ müssen in dem zugehörigen Kontext einen Sinn ergeben. Dies setzt eine reflektierte Deutung des Funktionsplots voraus, d. h., wir dürfen die vom Funktionenplotter gelieferten Visualisierungen



**Abbildung 1:** Die Abbildungen zeigen mit dem TI Voyage 200<sup>TM</sup> erzeugte Funktionsplots der Funktionen mit Term in (a)  $\sin(56\pi x)$ , in (b)  $\sin(488\pi x)$ , in (c)  $\sin(239\pi x)$ , in (d)  $\sin(124\pi x)$ , jeweils mit den Fenstereinstellungen  $x \in [0;2]$ ,  $y \in [-1;1]$  und mit der Auflösung  $\text{res}=1$ , sowie in (e)  $\frac{1}{x-1} + 1$  für  $x \in [-10;10]$  und  $y \in [-15;15]$  und in (f)  $\frac{1}{x^2-2} - 3$  für  $x \in [-10;10]$ ,  $y \in [-10;30]$  und jeweils mit der Auflösung  $\text{res}=2$  geplottet.

<sup>1</sup> Dass beim zweiten Aspekt *Funktionen als Medien* nicht nur die graphische Darstellung einer Funktion berücksichtigt wird, wird u. a. im Beispiel der Keilschrifttafel in [Hischer 2006 b, 28] deutlich.

nicht einfach hinnehmen, sondern müssen überprüfen, ob diese „einen gültigen Eindruck der Funktion“ ([Winkelmann 1992, 34]; vgl. auch [Hischer 2002, 296], [Hischer 2005, 123]) liefern, uns beispielsweise beim Ablesen von Funktionswerten im Funktionsplot immer wieder fragen, ob die Werte eigentlich in den jeweiligen Zusammenhang passen.

Gehen wir so vor, dann werden uns früher oder später Darstellungen auffallen, die anscheinend falsch sind, deren Funktionswerte eben nicht stimmig, in vielen Fällen erst gar nicht ablesbar sind. Abbildung 1 zeigt Beispiele solcher (Fehl-)Darstellungen (vgl. [Barzel & Böhm 2002, 19], [Herget, Keuneke, Malitte & Stachniss-Carp 2002, 64 f.], [Hischer 2002, 299 f. & 308], [Hischer 2006 a, 19 & 24], [Selzer 2005, 96]). So können wir in den Funktionsplots in den Abbildungen 1 (a) und (d) keine Funktionswerte ablesen: Die Funktionsplots stellen keinen Funktionsgraphen mehr dar und geben damit keine gültige Darstellung der zugehörigen Funktion.

Allerdings scheinen nicht alle der obigen Funktionsplots auf den ersten Blick „falsch“ zu sein, dennoch sind auch die unauffälligeren Plots in den Abbildungen 1 (b) und (c) sowie in (e) und (f) Fehldarstellungen, denn in den Abbildungen 1 (e) und (f) sind die Polstellen der Funktionen im Funktionsplot nicht auszumachen, in Abbildung 1 (b) ist der Funktionsplot von  $\sin(488\pi x)$  abgebildet, der hier aber mit demjenigen von  $\sin(12\pi x)$  identisch ist, und in Abbildung 1 (c) ist zwar der Funktionsplot von  $\sin(239\pi x)$  dargestellt, aber wir erhalten denjenigen von  $\sin(\pi x)$ . Das heißt, in Abbildung 1 (c) gilt für den abgebildeten Funktionsplot:  $\sin(239\pi x) = \sin(\pi x)$ . Versuchen wir uns an diesem Beispiel klarzumachen, was hier passiert, und gehen wir dabei von dem Term  $\sin(239\pi x)$  aus, so erhalten wir unter Verwendung der Additionstheoreme folgende Gleichungskette (für  $x \in [0; 2]$ ):

$$\begin{aligned}\sin(239\pi x) &= \sin((238 + 1)\pi x) = \sin(238\pi x) \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \cos(238\pi x) \\ &= \sin(119 \cdot 2\pi x) \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \cos(119 \cdot 2\pi x).\end{aligned}$$

Wäre nun  $\sin(119 \cdot 2\pi x) = \sin(119x \cdot 2\pi) = 0$  und  $\cos(119 \cdot 2\pi x) = \cos(119x \cdot 2\pi) = 1$  erfüllt, so würden wir  $\sin(239\pi x) = \sin(\pi x)$  erhalten, was der Situation in Abbildung 1 (c) entsprechen würde und woraus schließlich  $119x \in \mathbb{Z}$  folgen würde. Im Widerspruch dazu scheint nun aber die Argumentation zu stehen, dass der Funktionsplotter doch eigentlich eine Darstellung des Funktionsterms  $\sin(239\pi x)$  über dem gesamten Intervall  $[0; 2]$  liefern sollte, und folglich nicht alle Werte  $119x$  für  $x \in [0; 2]$  ganzzahlig sein können! Oder etwa doch?

Betrachten wir uns den Funktionsplot bzw. das Display des TI Voyage 200™ einmal etwas genauer, so erkennen wir, dass er aus einzelnen Pixeln besteht – beim TI Voyage 200™ kann man dies auch dadurch „erfahren“, dass man den Funktionsgraphen mit dem Cursor verfolgt (denn dabei entspricht jeder Schritt einem Pixel) und dass das Display des TI Voyage 200™ über eine feste Pixelanzahl verfügt: in horizontaler Ausdehnung 239 Pixel, in vertikaler Ausdehnung 103.

Daher liegt die Vermutung nahe, dass der TI Voyage 200™ den vorgegebenen Funktionsterm lediglich an bestimmten, äquidistanten Stützstellen auswertet, also eine sog. *Abtastung*<sup>2</sup> vornimmt, und dass die Frequenz, mit der diese Abtastung erfolgt – die sog. *Abtast-* oder *Samplingfrequenz* (vgl. [Hischer 2006 a, 21]) – fest vorgegeben ist und 238 beträgt, denn dies ist die Anzahl der Intervalle zwischen den 239 Pixeln in horizontaler Displayausdehnung. Berücksichtigen wir zudem den im Graphikfenster in der Abbildung 1 (c) gewählten Ausschnitt der  $x$ -Achse, also das Intervall  $[0;2]$ , so müssten die Stützstellen bei  $x_n = 2n/238$  für  $n \in \{0, \dots, 238\}$  liegen (vgl. [Hischer 2006 a, 26]), womit sich tatsächlich  $119 x_n \in \mathbb{Z}$  ergeben würde! Die in Abbildung 1 gezeigten Fehldarstellungen scheinen demnach in Zusammenhang mit dieser (vermutlich) festen Abtastfrequenz des TI Voyage 200™ zu stehen.

Dass all diese Überlegungen tatsächlich zutreffen, belegen die Ergebnisse einer systematischen Untersuchungen von Fehldarstellungen trigonometrischer Funktionen in [Hischer 2006 a], denn entgegen der hier dargestellten, lediglich entdeckenden Vorgehensweise liefert [Hischer 2006 a] einen Beweis der oben angedeuteten Sachverhalte, und zwar anhand einer „algorithmischen Untersuchung unbekannter Funktionenplotter“ (vgl. [Hischer 2006 a, 28]) sowie anhand der „Elementaren Sätze über Funktionenplotter“ (vgl. [Hischer 2006 a, 26 ff.]). [Hischer 2006 a] stellt damit eine didaktische Aufbereitung dieses Stoffes hinsichtlich einer Behandlung im Unterricht zur Verfügung und bringt diese in Zusammenhang mit dem sog. *Shannonschen Abtasttheorem*. Dieses Theorem besagt, dass die Abtastfrequenz mehr als doppelt so groß wie die abzutastende Frequenz sein muss, damit die zu simulierende Funktion exakt rekonstruiert werden kann (vgl. [Hischer 2006 a, 26], [Selzer 2005, 95]).

Wir wollen daher der Bedeutung des Shannonschen Abtasttheorems, speziell der darin enthaltenen Aussage über die Rekonstruierbarkeit der zu simulierenden Funktion auf den Grund gehen und in diesem Zusammenhang eine tiefer gehende Erklärung der Phänomene aus Abbildung 1 finden, denn unsere bisherigen Überlegungen stellten ja lediglich einen Versuch dar, sich den Ursachen für das Auftreten der beobachteten Phänomene in ganz naiver Weise und exemplarisch – hier anhand des TI Voyage 200™ – zu nähern. Deshalb werden wir an dieser Stelle einen kleinen Exkurs in die Fouriertheorie wagen – was in dieser Form zwar nicht zur Umsetzung in Schule und Unterricht gedacht ist (diesbezüglich sei nochmals auf [Hischer 2006 a] verwiesen), was uns aber wertvolles Hintergrundwissen liefert. Vor diesem Hintergrund der Fouriertheorie wird uns eine Veranschaulichung des Shan-

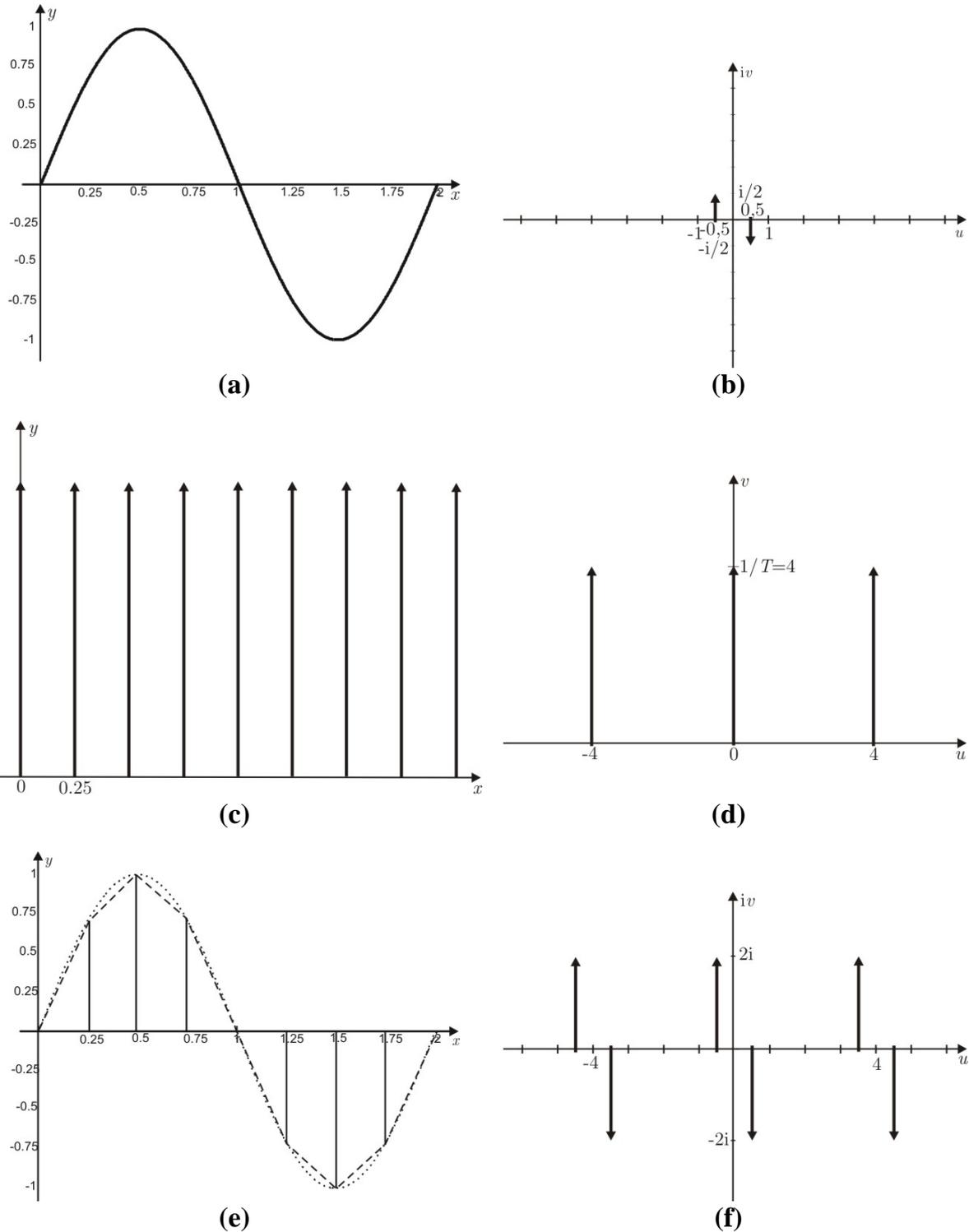
---

<sup>2</sup> Die Bezeichnung *Abtastung* sowie ihre englische Entsprechung *sampling* stammen ursprünglich aus dem Gebiet der Audiotechnik, da sie dort bei der Digitalisierung eines analogen Audiosignals (der sog. A/D-Wandlung, der Umwandlung von analogen in digitale Signale) angewendet wird (vgl. [Hischer 2006 a, 21]).

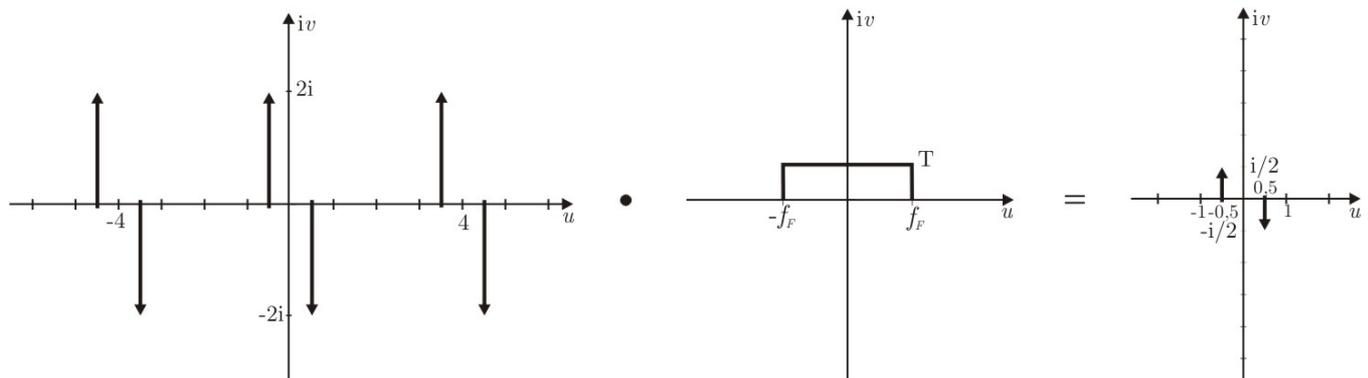
nonschen Abtasttheorems neue Einblicke in die gegebenen Zusammenhänge verschaffen; konkret führen wir dazu im Folgenden je eine Abtastung einer Sinusfunktion durch, und zwar sowohl unter Einhaltung als auch unter Verletzung der Abtastbedingung.

Betrachten wir zunächst die Sinusfunktion der Frequenz  $f_0 = \frac{1}{2}$  bzw. der Periode  $T = 2$ , die durch den Funktionsterm  $\sin(\pi x)$  beschrieben wird und deren Funktionsgraph in Abbildung 2 (a) über dem Intervall  $[0; 2]$  dargestellt ist. Wird diese mit der Abtastfrequenz  $f_s = 4$  abgetastet, so hat die entsprechende „Abtastfunktion“ (nicht etwa die abzutastende Funktion) die Periode  $T = \frac{1}{4}$  und ist – wie in Abbildung 2 (c) zu sehen – durch einen sog. *Impulskamm* (vgl. [Bracewell 2000, 81 ff.], [Selzer 2005, 15 ff.]) gegeben. Die Abtastung der Sinusfunktion erfolgt nun durch Multiplikation mit dem Impulskamm, was in Abbildung 2 (e) veranschaulicht ist: Hier sehen wir als gepunktete Linie den Graphen der Sinusfunktion sowie die lineare Interpolation ihrer Abtastwerte als gestrichelte Linie. Die Abbildungen 2 (a), (c) und (e) zeigen die jeweiligen Funktionen im sog. *Bildbereich*, also im Bereich der *Bilder*, der gewohnten, „üblichen“ Funktionsdarstellungen. Demgegenüber steht der sog. *Spektralbereich* als der Bereich der *Spektren* bzw. der *Fouriertransformierten*, wobei es sich bei der dahinter steckenden *Fouriertransformation* um eine Integraltransformation handelt, die eine Funktion aus dem Bildbereich in den Spektralbereich transformiert und dort durch ihren Frequenzanteil dargestellt: Die Funktion erhält also im Spektralbereich lediglich eine andere Darstellung (vgl. [Bracewell 2000, 5 ff. & 573 ff.], [Selzer 2005, 10 ff.]). Im hier betrachteten Fall wird die Sinusfunktion aus Abbildung 2 (a) durch ihren Frequenzanteil wie in Abbildung 2 (b) dargestellt: Das Spektrum dieser Sinusfunktion besteht aus einem gewichteten Impuls an der Stelle  $x = \frac{1}{2}$  – entsprechend des Frequenzanteils  $f_0 = \frac{1}{2}$  – sowie aus einem gewichteten Impuls an der Stelle  $x = -\frac{1}{2}$ . Was genau es nun bedeutet, dass hierbei anscheinend auch negative Frequenzen eine Rolle spielen, und wie die Gewichte  $\mp i/2$  (bei  $i$  handelt es sich um die imaginäre Einheit  $i \in \mathbb{C}$  mit  $i^2 = -1$ ) an den Stellen  $x = \pm \frac{1}{2}$  zustande kommen, wollen wir hier nicht weiter vertiefen, dafür sei auf die entsprechende Literatur, wie beispielsweise [Bracewell 2000] verwiesen.

Betrachten wir die im Bildbereich durchgeführte Abtastung der Sinusfunktion nun im Spektralbereich, so entspricht der Multiplikation der Sinusfunktion mit dem Impulskamm im Bildbereich die sog. *Faltung* der zugehörigen Spektren im Spektralbereich (vgl. [Bracewell 2000, 24 ff.], [Selzer 2005, 13 f.]), die in den Abbildungen 2 (c) und (d) dargestellt sind. Das Spektrum des Impulskammes aus Abbildung 2 (c) besteht wiederum aus einem Impulskamm, und zwar der Periode  $T = 4$ , was sich aus der Frequenz  $f_0 = 4$  seines *Bildes* ergibt (vgl. die ausführlichere Behandlung der mathematischen Hintergründe zu den Spektraldarstellungen von Impulskämmen in [Bracewell 2000, 81 ff. & 334] sowie in [Selzer 2005, 28 f.]



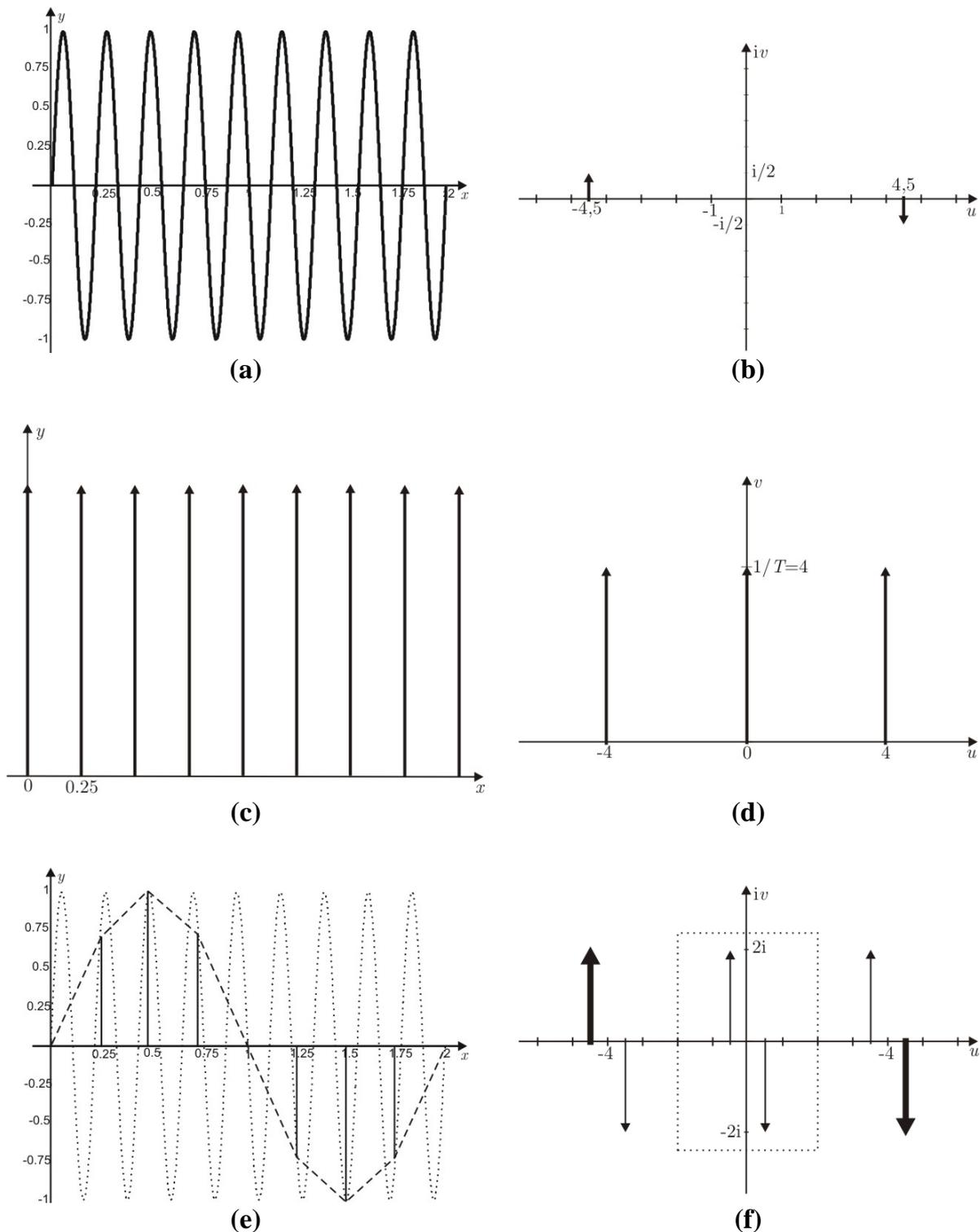
**Abbildung 2:** (a) zeigt den Funktionsgraphen der Sinusfunktion mit der Frequenz  $\frac{1}{2}$  und dem Funktionsterm  $\sin(\pi x)$  sowie in (b) das zugehörige Spektrum: zwei Impulse an den Stellen  $x = \pm 0,5$  mit den Gewichten  $\mp i/2$ ; (c) stellt die Abtastfunktion dar: einen Impulskamm der Periode  $\frac{1}{4}$ , sowie in (d) das zugehörige Spektrum: den Impulskamm der Periode 4, wobei die Impulse mit 4 gewichtet sind; in (e) ist die Abtastung der Sinusfunktion veranschaulicht (die gestrichelte Linie zeigt die lineare Interpolation der Abtastwerte) und in (f) das zugehörige Spektrum (vgl. [Selzer 2005, 97–99]).



**Abbildung 3:** Herausfiltern des Spektrums der zu rekonstruierenden Funktion aus dem Spektrum der Abtastung mit einem Tiefpassfilter.

Die Faltung der beiden gegebenen Spektren bedeutet hierbei nun anschaulich, dass eine zentrierte Kopie des Spektrums der Sinusfunktion aus Abbildung 2 (b) um jeden Impuls im Spektrum des Impulskammes aus Abbildung 2 (d) gesetzt wird, was wiederum in Abbildung 2 (f) zu sehen ist (vgl. [Amidror 2000, 16]). Da bei dieser Abtastung die Voraussetzung des Shannonschen Abtasttheorems eingehalten wurde – die Abtastfrequenz  $f_s = 4$  ist mehr als doppelt so groß wie die abzutastende Frequenz  $f_0 = \frac{1}{2}$  – kann die Sinusfunktion wieder exakt rekonstruiert werden, und zwar anhand des Spektrums in Abbildung 2 (f). Aus diesem wird nämlich das Spektrum der Sinusfunktion mit einem sog. *Tiefpassfilter* (vgl. [Oppenheim & Willsky 1992, 351 f.]) ausgeschnitten, das alle Frequenzen, die betragsmäßig kleiner als die Frequenz  $f_F$  mit  $f_0 < f_F < (f_s - f_0)$  sind, „ausschneidet“. Das Tiefpassfilter wird daher durch eine um den Nullpunkt zentrierte Rechteckfunktion der Breite  $2f_F$  und der Höhe  $T$  realisiert, es ist also durch den Wert der Periode  $T$  verstärkt (vgl. [Selzer 2005, 99]). Durch Multiplikation der Rechteckfunktion mit dem Spektrum der Abtastung aus Abbildung 2 (f) wird aus diesem genau das Spektrum der Sinusfunktion herausgefiltert – dies ist in Abbildung 3 veranschaulicht. Wir wissen, dass zu diesem herausgefilterten Spektrum im Bildbereich die Sinusfunktion der Frequenz  $f_0 = \frac{1}{2}$  gehört; daher kann nun durch die sog. *Fourier-rücktransformation* (vgl. [Bracewell 2000, 5], [Selzer 2005, 10]), die das Spektrum, also die Darstellung der Funktion im Spektralbereich wieder in diejenige des Bildbereichs umwandelt, die Sinusfunktion im Bildbereich exakt rekonstruiert werden.

Wird nun allerdings die Sinusfunktion aus Abbildung 4 (a) (mit der Frequenz  $f_0 = \frac{9}{2}$  und dem Funktionsterm  $\sin(9\pi x)$ ) mit der Abtastfrequenz  $f_s = 4$  abgetastet, wie in den Abbildungen 4 (a), (c) und (e) dargestellt, so kommt es im Spektrum der Abtastung aus Abbildung 4 (f) zu einer Überlappung der kopierten und um jeden Impuls im Spektrum des Impulskammes aus Abbildung 4 (d) zentrierten Spektren der Sinusfunktion:



**Abbildung 4:** (a) zeigt den Funktionsgraphen der Sinusfunktion mit Frequenz  $\frac{9}{2}$  und Funktionsterm  $\sin(9\pi x)$ , sowie in (b) das zugehörige Spektrum: zwei Impulse bei  $x = \pm 4,5$ , gewichtet mit  $\mp \frac{i}{2}$ ; (c) stellt die Abtastfunktion, und (d) ihr Spektrum dar; in (e) ist die Abtastung der Sinusfunktion aus (a) veranschaulicht (die gestrichelte Linie zeigt die lineare Interpolation der Abtastwerte), und in (f) das zugehörige Spektrum (vgl. [Selzer 2005, 98]).

In Abbildung 4 (f) gehören lediglich die dick gezeichneten Impulse zu derselben Kopie des Spektrums der Sinusfunktion, die anderen Impulse gehören zu jeweils verschiedenen Kopien dieses Spektrums. Die Überlappung der Frequenzen im Spektralbereich wird durch die Verletzung der Shannonschen Abtastbedingung verursacht, denn die Abtastfrequenz  $f_s = 4$  ist kleiner als das Doppelte der abzutastenden Frequenz  $2f_0 = 9$ . Dadurch werden nun aber im Spektrum der Abtastung falsche niedrige Frequenzen, sog. *aliased frequencies* (vgl. [Amidror 2000, 50]), erzeugt, die durch das Tiefpassfilter aus Abbildung 3 herausgefiltert werden – in Abbildung 4 (f) gibt der gepunktete Rahmen den entsprechenden Bereich an. Diese Frequenzen machen jedoch nicht das Spektrum der Sinusfunktion aus Abbildung 4 (a) mit  $f_0 = \frac{9}{2}$  aus, sondern das Spektrum der Sinusfunktion aus Abbildung 2 (a) mit  $f_0 = \frac{1}{2}$ . Die Rücktransformation der herausgefilterten Frequenzen in den Bildbereich liefert damit die falsche Sinusfunktion, also diejenige mit der Frequenz  $f_0 = \frac{1}{2}$ , und wir erhalten ein sog. *Aliasing-Phänomen* (von lat. *alias*: „sonst“ im Sinne von „anders“; [Hischer 2006 a, 22]) – die Benennung erfolgt in Ahnlehnung an die oben genannten *aliased frequencies*.

Die dargestellten Zusammenhänge machen uns nun auch das Auftreten der Aliasing-Phänomene in den Abbildungen 1 (b) und (c) plausibler, denn diese sind durch sog. Unterabtastung mit der zu niedrigen Abtastfrequenz des TI Voyage 200™ entstanden: Die Shannonsche Abtastbedingung kann beim TI Voyage 200™ ab einer bestimmten Frequenz der zu simulierenden Funktion nicht mehr eingehalten werden, weshalb sich, wie in den Abbildungen 1 (b) und (c) für den TI Voyage 200™ zu sehen ist, die mit Funktionenplottern erzeugten Funktionsplots von Sinusfunktionen (oder allgemeiner: von periodischen Funktionen) in bestimmten Frequenzabständen wiederholen.<sup>3</sup>

Zusätzlich zeigt sich jedoch in Abbildung 1 (a), dass auch unter Einhaltung der Shannonschen Abtastbedingung nicht immer eine gültige Darstellung einer Sinusfunktion geliefert wird. Dies liegt daran, dass sich die vom TI Voyage 200™ angefertigten Funktionsplots aus den 239 berechneten Abtastwerten zusammensetzen, was wiederum auch die Phänomene in den Abbildungen 1 (e) und (f), die in den Funktionsplots gebrochen rationaler, nicht-periodischer Funktionen auftreten, begründet.<sup>4</sup>

---

<sup>3</sup> Es muss hierbei betont werden, dass dies nicht nur beim TI Voyage 200™ der Fall ist, sondern dass es in Abhängigkeit der Abtastfrequenz bei jedem Funktionenplotter zu einer Verletzung der Shannonschen Abtastbedingung kommen kann. Beispielsweise hat der Funktionenplotter des Casio ClassPad 300™ eine feste Abtastfrequenz von 156 (vgl. [Selzer 2005, 100]) und in Derive™ ist die Abtastfrequenz abhängig von der jeweils eingestellten Fenstergröße (vgl. [Hischer 2006 a, 28]).

<sup>4</sup> Zusätzlich belegen diese Beispiele auch den Ersten Hauptsatz für Funktionenplotter: „Jeder Funktionsplot ist stetig.“ in [Hischer 2002, 307].

Kommen wir nun wieder auf die oben genannten drei Aspekte im Verhältnis von Funktionen und Medien zu sprechen: Nach den bisherigen Ausführungen zeigt sich, dass beim Plotten von Funktionen mit einem Funktionenplotter der erste Aspekt der Funktionsdarstellung zwar immer erfüllt ist – der Funktionenplotter liefert schließlich zu jeder eingegebenen Funktion einen Funktionsplot; dieser ist selbst wieder eine Funktion, denn, wie wir nun ja wissen, besteht dieser Funktionsplot aus einer sog. Bildmatrix, die angibt, welche der zur Verfügung stehenden Pixel eingefärbt werden sollen; diese Matrix kann auch als Tabelle interpretiert werden und macht somit eine Funktion aus (vgl. [Hischer 2002, 307], [Hischer 2006 b, 24 f.]; zur Bildmatrix als Tabelle vgl. [Hubwieser 2004, 137 ff.]) –, allerdings treten auch Fälle von Fehldarstellungen auf, die wir unter Berücksichtigung des zweiten Aspekts (ein Funktionsplot ist schließlich immer Darstellung von Wirklichkeit (oder?!)) entlarven können. Auf diese Weise machen wir uns Einiges über die *Funktionsweise* des Neuen Mediums „Funktionenplotter“ bewusst, nämlich, dass es die termdefinierten, eingegebenen Funktionen abtastet und diese Abtastwerte durch einen Funktionsplot darstellt. Das Neue Medium *fungiert* hierbei als *Funktion*, denn es liefert zu jeder eingegebenen Funktion eindeutig einen Funktionsplot: Es handelt sich also bei dem Neuen Medium Funktionenplotter sogar selbst wieder um eine Funktion! Und damit ist auch der dritte Aspekt erfüllt.

Verfolgen wir diese Überlegungen einmal in umgekehrter Richtung: Geben uns dann nicht die auftretenden Fehldarstellungen bzw. Aliasing-Phänomene die Möglichkeit, weitere Beispiele Neuer Medien zu finden, die den dritten Aspekt „Medien als Funktionen“ erfüllen? Denn: Wir haben herausgefunden, dass das Neue Medium „Funktionenplotter“ selbst eine Funktion ist, was wir mit der *Funktionsweise* eines Funktionenplotters bzw. mit der eindeutigen Ausgabe eines Funktionsplots begründen können. Darauf sind wir gekommen, indem wir uns Gedanken über die Aliasing-Phänomene in Abbildung 1 gemacht haben, die wiederum nur auftreten, weil beim Funktionenplotter eine *Abtastfunktion* zum Einsatz kommt, also gerade weil der Funktionenplotter eben selbst eine Funktion verkörpert. Bezogen auf den dritten Aspekt „Medien als Funktionen“ könnte man doch nun vermuten, dass überall, wo beim Einsatz Neuer Medien Aliasing-Phänomene auftreten, das Neue Medium eine Funktion ausmacht. D. h., durch die Suche nach Aliasing können wir womöglich eine Reihe von Neuen Medien als Funktionen entdecken und Beispiele für die Gültigkeit des dritten Aspekts finden. Wir wollen diese Überlegung gleich fortführen, vorerst aber noch unser Wissen über die dabei im Mittelpunkt stehenden Aliasing-Phänomene anreichern.

### 3 Aliasing als Abtast-Moiré-Phänomen

Fassen wir grob zusammen, was wir bis jetzt über Aliasing-Phänomene erfahren haben: Bei Funktionenplotten treten sie aufgrund von Unterabtastung auf; dabei

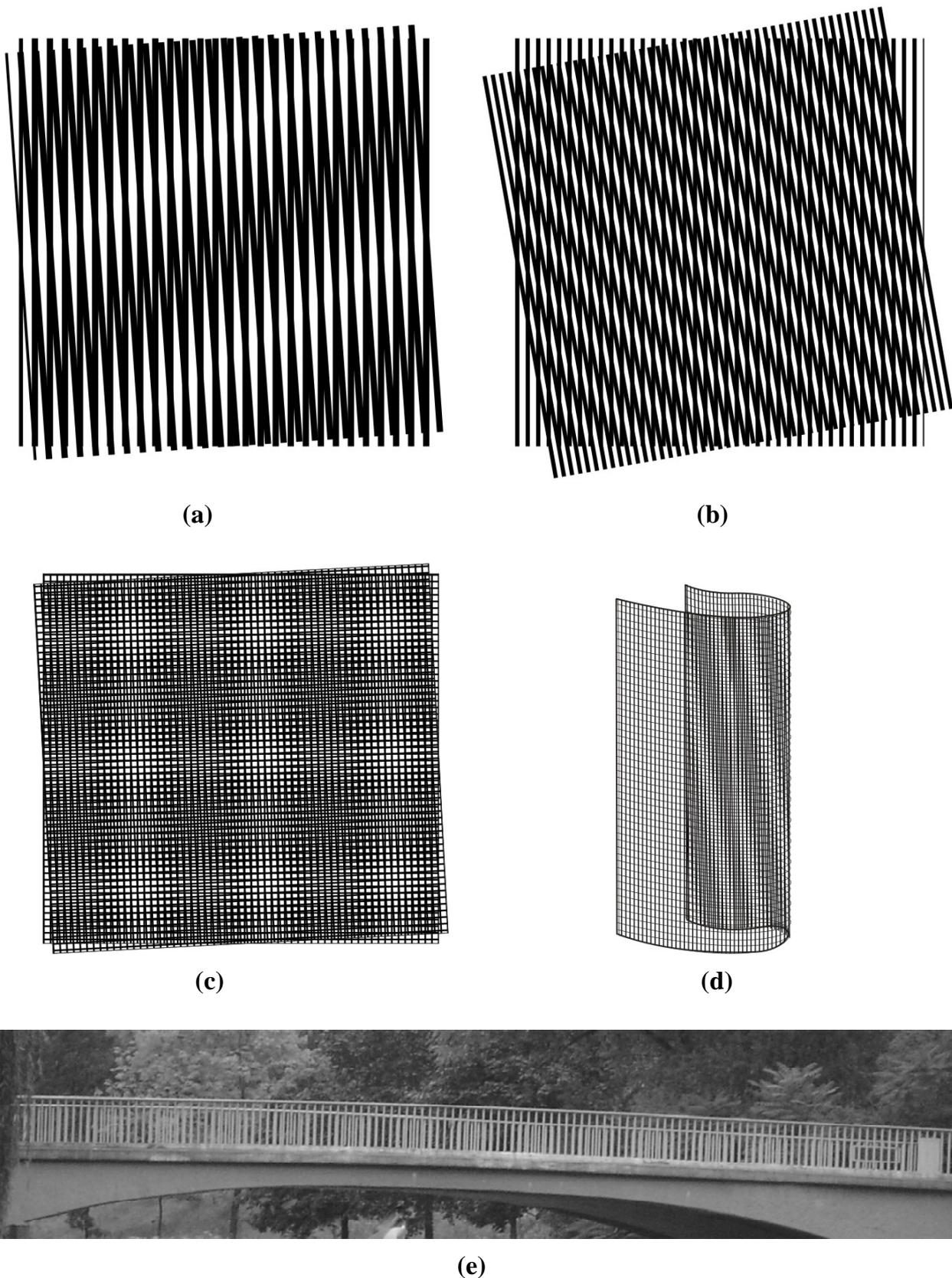
kann die Abtastung an sich, also die Auswertung der termdefinierten Funktion an äquidistanten Stützstellen, durch die Multiplikation einer Abtastfunktion und der termdefinierten Funktion realisiert werden. Am deutlichsten zu erkennen waren die Aliasing-Phänomene beim Plotten der Sinusfunktionen in Abbildung 1. Dabei handelt es sich um die Abtastung periodischer Funktionen; auch die Abtastfunktion ist periodisch, und die Multiplikation dieser beiden Funktionen kann als ihre Überlagerung veranschaulicht werden – die Abbildungen 2 und 4 (a), (b), (c) stellen dies ja bereits dar! Das heißt also: Aliasing-Phänomene treten auf in der Überlagerung periodischer Funktionen, sogar – allgemeiner formuliert – in der Überlagerung sog. *Wiederholungsstrukturen* (nach [Amidror 2000, 249]: *repetitive structure*; sowie [Hischer 2006 a, 21]), wobei man unter einer Wiederholungsstruktur eine aus einem periodischen Muster durch Koordinatentransformation entstandene Struktur wie beispielsweise das konzentrische Kreismuster (das aus der entsprechenden Transformation eines periodischen Linienmusters hervorgeht) in Abbildung 8 (c) versteht. Auf dieser Ebene spricht man dann nicht mehr speziell von Aliasing, sondern von den sog. Moiré-Phänomenen: *moiré* kommt aus dem Französischen und bedeutet „schillernd“ (vgl. [Amidror 2000, 1], [Hischer 2006 a, 19], [Patorski 1993, vii], [Selzer 2005, 5-8, 93]). Diese Bezeichnung wird klar, wenn wir uns die Beispiele von Moiré-Phänomenen in Abbildung 5 anschauen. Ein Moiré-Phänomen tritt hierbei als neue Struktur in der Überlagerung zweier Wiederholungsstrukturen in Erscheinung, wobei diese neue Struktur in keiner der überlagerten Strukturen enthalten war (vgl. [Amidror 2000, 1], [Selzer 2005, 6]). Wir können daher „Moiré-Phänomen“ nun folgendermaßen definieren:

Ein *Moiré-Phänomen* (oder kurz: *Moiré*) ist ein sichtbares<sup>5</sup> Phänomen, das auftritt, wenn Wiederholungsstrukturen überlagert werden. Es besteht aus einer neuen Struktur, die deutlich in der Überlagerung zu erkennen ist, obwohl sie in keiner der sich überlagernden Strukturen auftritt.

In Abbildung 5 wird zudem angedeutet, wie groß die Vielfalt an Moiré-Phänomenen ist – einen Eindruck davon kann man sich mit Hilfe der Bilder-Suche unter [google.de](http://google.de) verschaffen: Der Suchbegriff „moiré“ lieferte am 15.08.2006 ca. 17500 Treffer und damit eine Übersicht über die verschiedensten Moiré-Phänomene; zudem wird deutlich, dass Moiré-Phänomene nicht erst mit Funktionenplottern oder Graphikprogrammen erzeugt werden müssen, sondern auch im Alltag z. B. in Brückengeländern oder in den Falten von Vorhangsstoffen aus Organza oder Seide (wie in den Abbildungen 5 (d) und (e) dargestellt) vorkommen können.

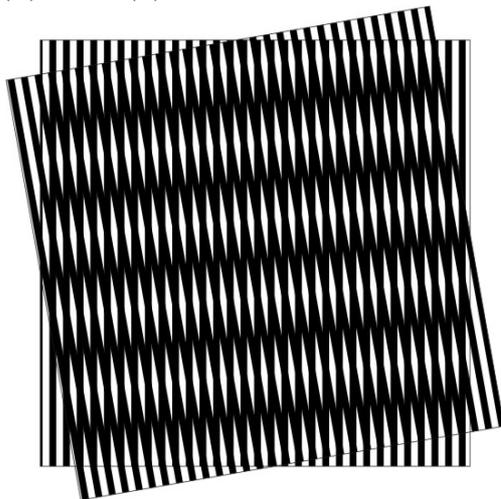
---

<sup>5</sup> Moiré-Phänomene können auch hörbar gemacht werden, sie stellen in diesem Zusammenhang ein Problem in der Audiotechnik dar (vgl. [Hischer 2006 a, 20 f.]). Jedoch wollen wir uns hier auf sichtbare Moiré-Phänomene beschränken, weshalb die obige Definition für unsere Belange ausreicht.

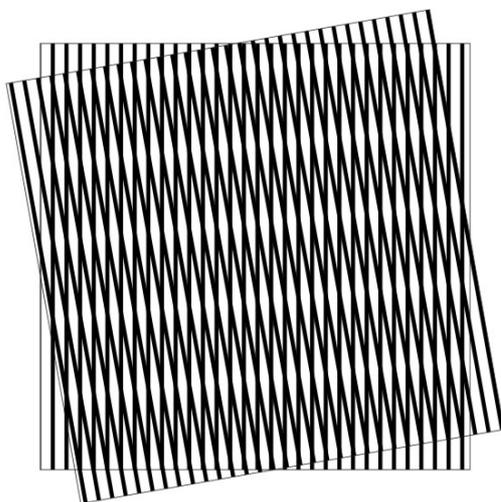


**Abbildung 5:** Beispiele von Moiré-Phänomenen in der Überlagerung schwarz-weißer einfach periodischer Streifenmuster in (a) und (b), zweifach periodischer Muster in (c), in einer Falte von Vorhangstoff, veranschaulicht in (d), sowie bei Betrachtung eines Brückengeländers in (e) (vgl. [Selzer 2005, 5 & 7 & 81]).

Moiré-Phänomene verfügen über eine gewisse Regelmäßigkeit, eben – wie oben bereits erwähnt – über eine bestimmte Struktur. Um welche Art von Struktur es sich dabei handelt, hängt von den überlagerten Strukturen ab: So ist beispielsweise in der Überlagerung der periodischen Linienmuster in den Abbildungen 5 (a) und (b) sowie in der Überlagerung der Gitter in Abbildung 5 (c) das auftretende Moiré-Phänomen ebenfalls periodisch (in den Abbildungen 5 (a) und (b) einfach, in (c) zweifach periodisch), im Gegensatz zu Abbildung 5 (d), wo ein nicht-periodisches Moiré-Phänomen zu sehen ist. Die periodischen Moirés in den Abbildungen 5 (a), (b) und (c) verlaufen außerdem in einer bestimmten Richtung: die jeweilige Richtung und Periode hängen wiederum von den Richtungen und Perioden der überlagerten periodischen Strukturen ab. Darüber hinaus treten Moirés oftmals mit unterschiedlicher *Intensität* in Erscheinung (vgl. [Amidror 2000, 38 ff.], [Selzer 2005, 42-45 & 47-64]): dies zeigt beispielsweise der Vergleich der Abbildungen 6 (a) und (b), wo die beiden in den einzelnen Überlagerungen erzeugten Moirés gleiche Richtung und Frequenz besitzen, aber aufgrund der unterschiedlichen Verhältnisse von schwarz zu weiß in einer einzelnen Periode der jeweils überlagerten Linienmuster haben die beiden Moirés unterschiedliche Intensität. Jedoch besitzen nicht nur Moirés in der Überlagerung von periodischen Linienmustern, sondern auch Moirés in der Überlagerung anderer Wiederholungsstrukturen eine gewisse Intensität, die auch dann von dem Anteil an schwarz und weiß in den überlagerten Strukturen abhängt.



(a)



(b)

**Abbildung 6:** (a) zeigt ein Moiré-Phänomen in der Überlagerung zweier Linienmuster mit gleichem Schwarz-Weiß-Anteil innerhalb einer Periode; in (b) ist der Weiß-Anteil in jeweils einer Periode der überlagerten Linienmuster größer als der Schwarz-Anteil.

Wir kommen zurück zur Periode und Richtung eines periodischen Moirés und betrachten beispielsweise das Moiré-Phänomen in Abbildung 7 (a). Es handelt sich dabei um ein sog.  $(1, -1)$ -Moiré: Diese Bezeichnung steht in Zusammenhang mit der Bestimmung der Periode und Richtung des Moirés, die sich ja aus den Perioden und Richtungen der überlagerten Muster ergeben: Stellen wir nämlich die Frequenzen und Richtungen der überlagerten Muster jeweils durch Vektoren dar (in Abbildung 7 (c) geben die Vektoren  $f_1$  und  $-f_1$  die

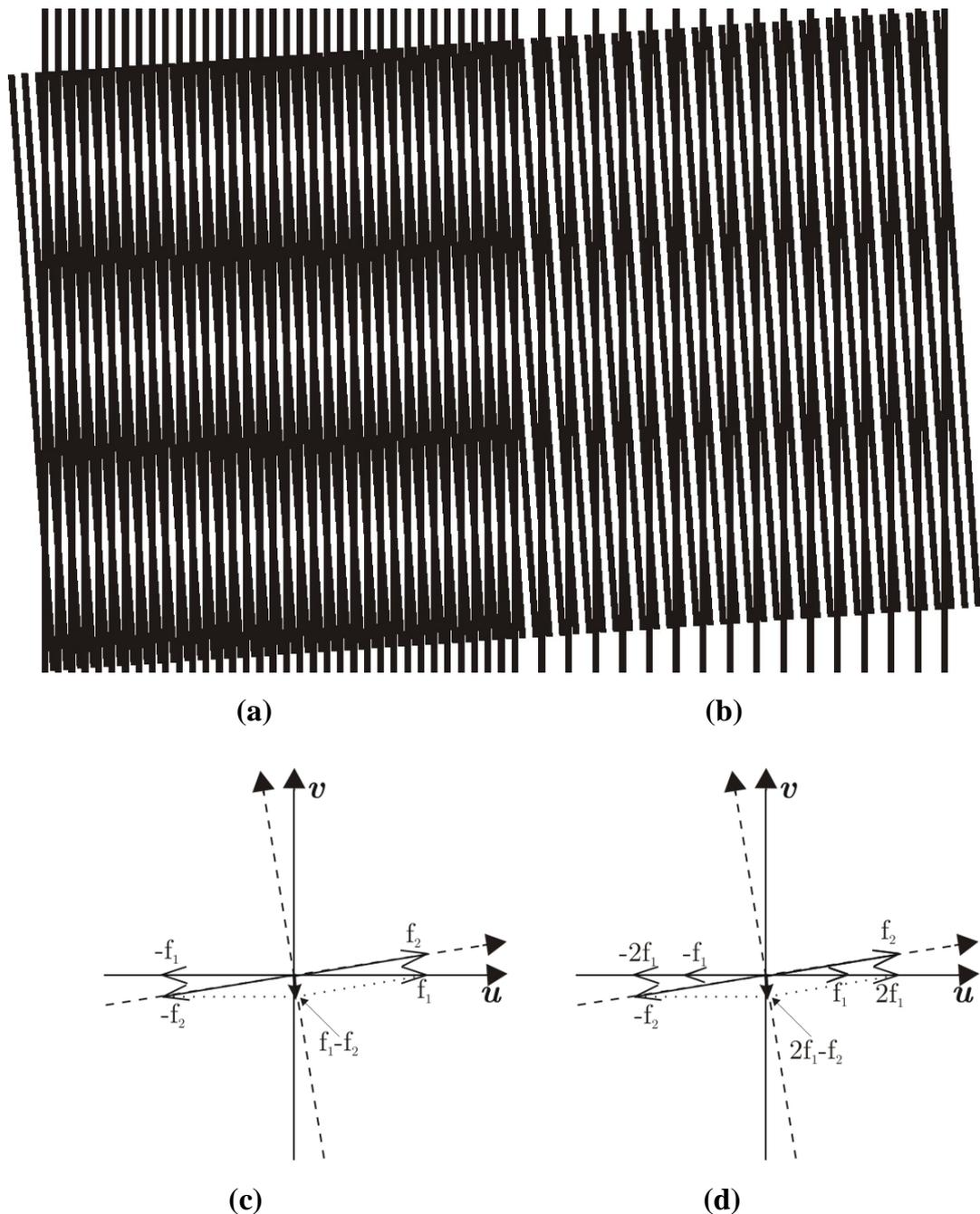
Richtung und Frequenz des vertikal ausgerichteten Linienmusters in Abbildung 7 (a) an, und die Vektoren  $\mathbf{f}_2$  und  $-\mathbf{f}_2$  stehen für die Richtung und Frequenz des gedrehten Linienmusters), so ergibt sich der Vektor, der für die Richtung und Frequenz des (1,-1)-Moirés steht, durch Vektoraddition von  $\mathbf{f}_1$  und  $-\mathbf{f}_2$  (dies ist in Abbildung 7 (c) dargestellt); die Bezeichnung (1,-1)-Moiré gibt also an, mit welcher Vielfachheit die jeweiligen Frequenzvektoren der überlagerten Muster an seiner Entstehung beteiligt sind. Die Idee der Vektoraddition stellt gleichzeitig eine didaktische Reduktion<sup>6</sup> der Fourieranalyse dar, welche die Grundlage zur Untersuchung von Moiré-Phänomenen liefert (vgl. [Amidror 2000, 10ff], [Lambert & Selzer 2006], [Selzer 2005, 9ff & 30ff]).

Neben dem (1,-1)-Moiré in Abbildung 7 (a), der in einer Überlagerung gleicher Frequenzen erzeugt wird – in diesem Zusammenhang betrachtet man das *Frequenzverhältnis*  $q := \mathbf{f}_1/\mathbf{f}_2$  (vgl. *frequency ratio* in [Amidror 2000, 66 ff.]; [Selzer 2005, 40 ff.]) einer Überlagerung (in dem hier betrachteten Fall gleicher Frequenzen beträgt das Frequenzverhältnis  $q = 1$ ), zeigt Abbildung 7 (b) ein sog. (2,-1)-Moiré, dessen Bezeichnung deutlich macht, dass bei der Erzeugung dieses Moirés das Doppelte von  $\mathbf{f}_1$  beteiligt ist, denn die Frequenz  $\mathbf{f}_1$  des senkrecht ausgerichteten Linienmusters in Abbildung 7 (b) ist nur halb so groß wie die Frequenz  $\mathbf{f}_2$  des überlagerten Linienmusters, es liegt also eine Überlagerung mit dem Frequenzverhältnis  $q = 1/2$  vor. Dennoch sind Richtung und Frequenz der in den Abbildungen 7 (a) und (b) gezeigten Moirés identisch – dies belegen die zugehörigen Vektordiagramme in den Abbildungen 7 (c) und (d) –, lediglich ihre Intensitäten sind verschieden (vgl. [Selzer 2005, 42-45 & 60-62]).

Die von uns beobachteten Aliasing-Phänomene in Abbildung 1 können wir nun also in die allgemeine Theorie der Moiré-Phänomene einbetten; Aliasing wird dabei als sog. Abtast-Moiré-Phänomen (nach [Hischer 2006 a] als Übersetzung von *sampling moiré* [Amidror 2000, 48]) interpretiert, sozusagen als Spezialfall eines Moiré-Phänomens: Man bezeichnet solche Moiré-Phänomene als Aliasing, die in der Audiotechnik oder in der Bildbearbeitung aufgrund von Abtastung (engl. *sampling*) entstehen (vgl. [Hischer 2006 a, 21]). Bei der weiteren Suche nach „Neuen Medien als Funktionen“ hilft uns daher nicht nur das Auftreten von Aliasing als Hinweis auf die „versteckten“ Funktionen, wir können nun sogar aufgrund unseres erweiterten Wissens über Moiré-Phänomene etwas über die *Funktionsweisen* der betrachteten Neuen Medien erfahren. Gehen wir also auf Entdeckungsreise ...

---

<sup>6</sup> Der in Abbildung 6 dargestellte Sachverhalt – die didaktische Reduktion der Fourieranalyse in Form von Vektordiagrammen – kann für den Schulunterricht unter Einsatz eines DGS aufbereitet werden (vgl. [Lambert 2005, 267]).



**Abbildung 7:** (a) zeigt ein sog. (1,-1)-Moiré in einer Überlagerung mit dem Frequenzverhältnis  $q = 1$ , (c) zeigt das zugehörige Vektordiagramm sowie (b) ein sog. (2,-1)-Moiré in einer Überlagerung mit Frequenzverhältnis  $q = \frac{1}{2}$  mit dem zugehörigen Vektordiagramm in (d) (vgl. [Selzer 2005, 43]).

## 4 Computerbildschirme

Nach dem Auftreten von Aliasing beim Funktionenplotter des TI Voyage 200™, verursacht durch die feste Abtastfrequenz bzw. die begrenzte Pixelanzahl seines Displays, liegt es nahe, weitere Ausgabemedien wie beispielsweise Computerbildschirme auf Aliasing hin zu untersuchen, denn auch ein Computerbildschirm verfügt ja nur über eine endliche Anzahl matrixförmig angeordneter Pixel.

So kommt es beim Betrachten von Graphiken auf einem Computerbildschirm immer wieder vor, dass diese vergrößert werden müssen, damit auch Details erkennbar werden: In solch einem Fall liegen bereits Aliasing-Phänomene vor, die auch bei nicht-periodischen Bildern auftreten können, dann aber nur die hochfrequenten Anteile in den jeweiligen Graphiken betreffen.

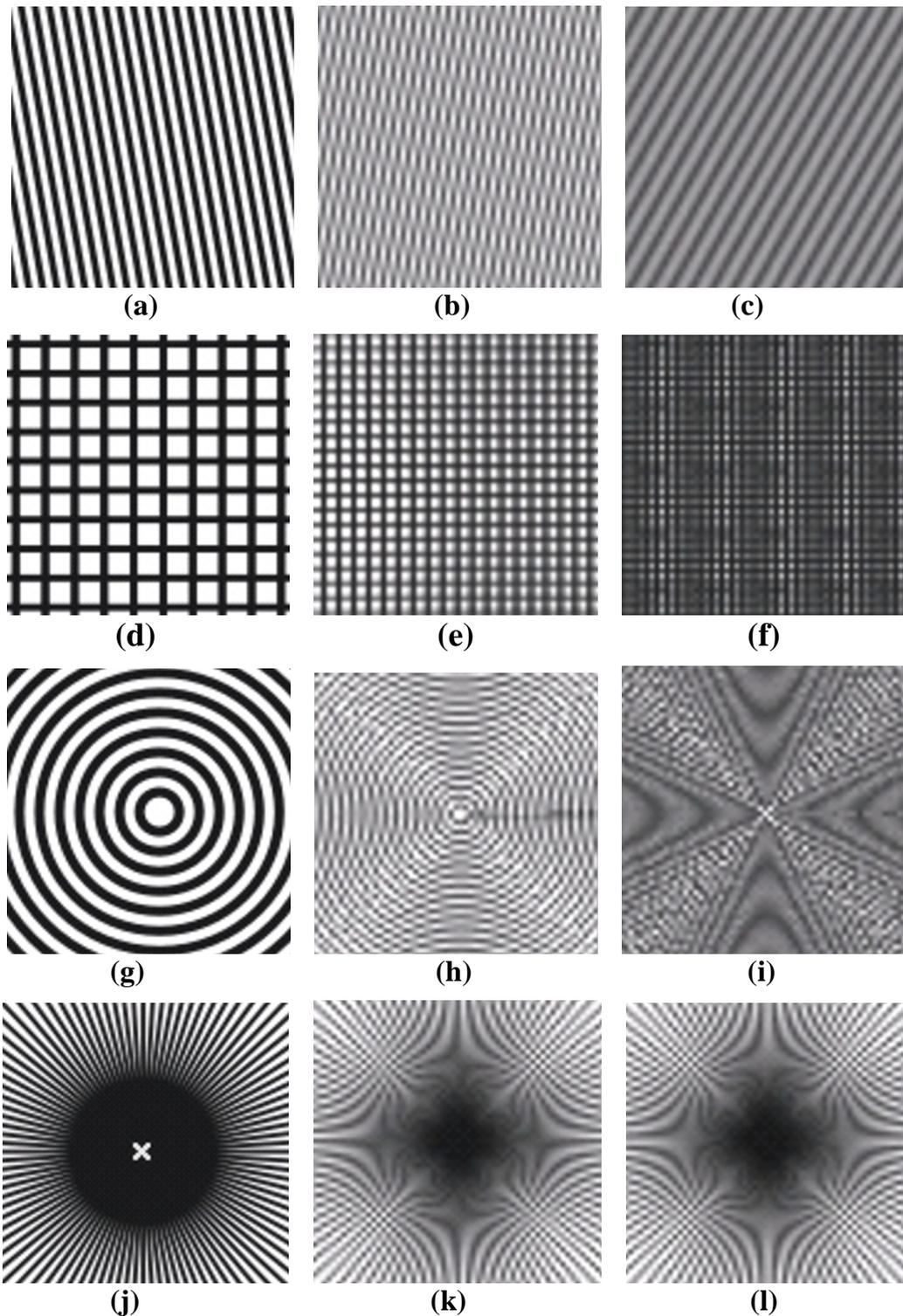
Untersuchen wir die graphische Darstellung auf einem Computerbildschirm hinsichtlich Aliasing, und betrachten wir dabei regelmäßige Muster unter verschiedenen Zoomfaktoren, dann müssten die (möglicherweise?) auftretenden Moiré-Phänomene in Analogie zu denjenigen in Abbildung 5 stehen und somit eine regelmäßige Struktur besitzen. Erzeugen wir also mit einem Bildbearbeitungsprogramm zweidimensionale periodische Muster, und beobachten wir, was beim Verkleinern und Vergrößern der Muster auf dem Bildschirm passiert: Tatsächlich treten Aliasing-Phänomene auf, beispielsweise beim Verkleinern des Streifenmusters in Abbildung 8 (a)<sup>7</sup>: Die dabei erzeugten Moiré-Phänomene weisen eine gewisse Ähnlichkeit zu denjenigen in den Abbildungen 5 (a) und (b) auf; außerdem können wir erkennen, dass Richtung, Frequenz und auch die Intensität dieser Moirés bei unterschiedlichen Zoomfaktoren verschieden sind.

Abbildung 8 zeigt neben dem oben beschriebenen Beispiel noch weitere Muster und ihre Verkleinerungen; es handelt sich um Screenshots von Füllmustern, die mit Corel Draw 11™ erzeugt<sup>8</sup> und auch dort vergrößert oder verkleinert wurden. Besonders interessante Effekte können erzielt werden, wenn man das Zoomen der Muster mit einer Scrollmaus ausführt, denn beim Drehen des Scroll-Elements ändert sich der Zoomfaktor in Corel Draw 11™ automatisch, so dass der Übergang der in den verschiedenen Stufen auftretenden Moiré-Phänomene leicht beobachtet werden kann. In Abbildung 8 sind allerdings nicht nur periodische Muster zu sehen, sondern auch Wiederholungsstrukturen wie das konzentrische Kreismuster in (g) oder das Strahlenmuster in (j). Beim Verkleinern dieser Strukturen auf dem Bildschirm treten ebenfalls Aliasing-Phänomene auf, die allerdings nicht periodisch sind, sondern wiederum Wiederholungsstrukturen darstellen.

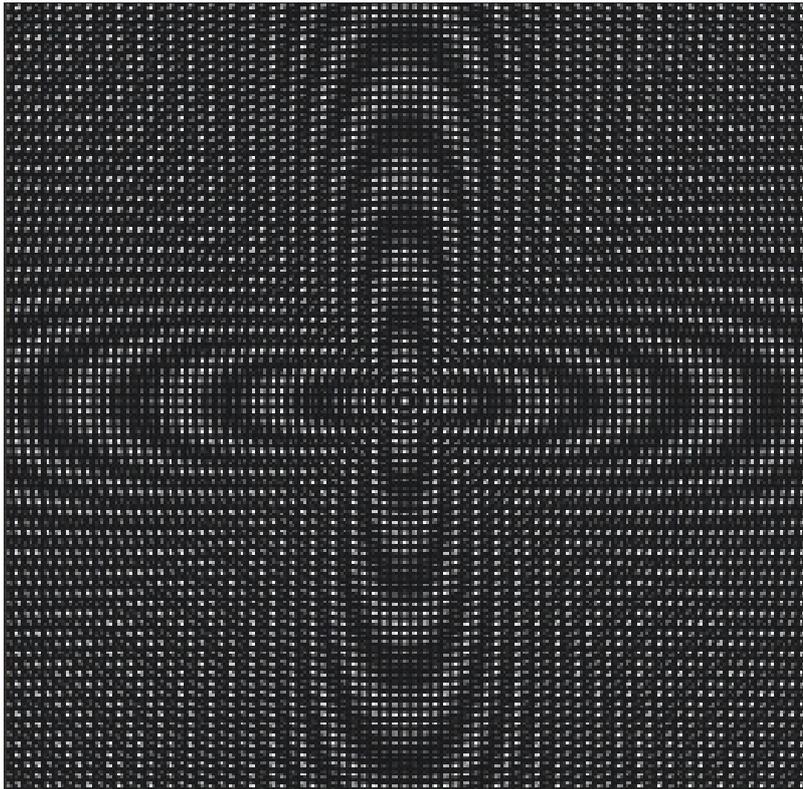
---

<sup>7</sup> Hierbei weist bereits das vergrößerte Streifenmuster eine gewisse Stufigkeit und damit ein Aliasing-Phänomen auf, das sich bei der Bildschirmdarstellung von schrägen Geraden nicht vermeiden lässt.

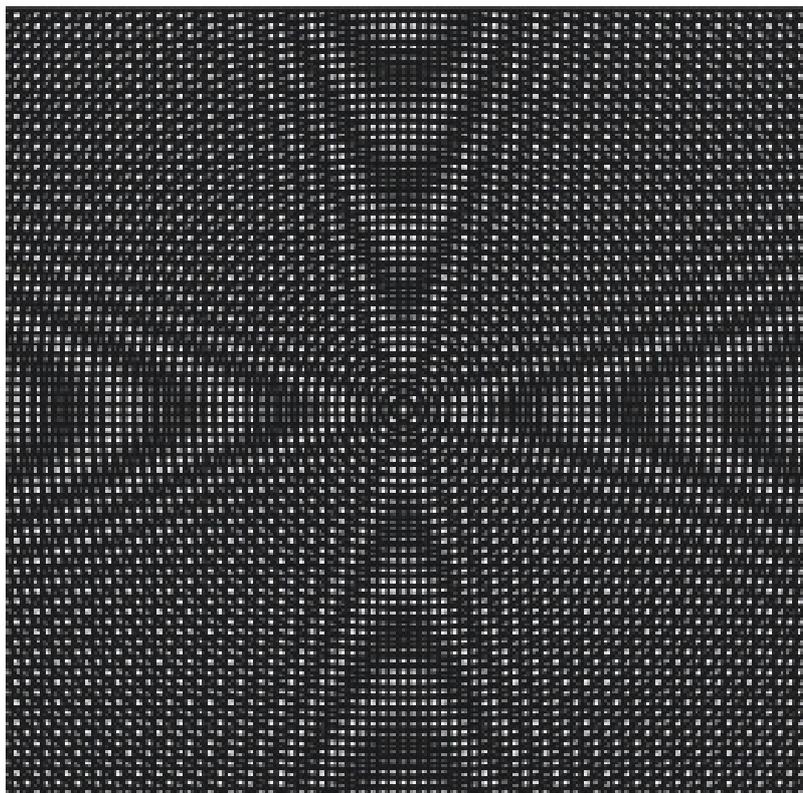
<sup>8</sup> Es handelt sich dabei um die sog. PostScript-Füllmuster *Schraffierung*, *Quadrate*, *Baumringe* und *Strahlen* (aufgelistet in der Reihenfolge entsprechend Abbildung 7), die in Corel Draw 11™ zum Füllen beispielsweise eines Rechtecks zur Verfügung stehen. Das periodische Streifenmuster in Abbildung 6 (a) lässt sich mit dem Füllmuster *Schraffierung* erzeugen, indem dort gleicher Maximal- und Minimalabstand der Linien angegeben wird; analog funktioniert die Erzeugung des konzentrischen Kreismusters mit dem Füllmuster *Baumringe*: auch hier müssen die angegebenen Minimal- und Maximalabstände gleich sein.



**Abbildung 8:** Die Abbildungen zeigen zeilenweise die Verkleinerungen, durchgeführt in Corel Draw 11™, der jeweils in der linken Spalte ausschnittsweise dargestellten Muster. Dabei sind die Verkleinerungen in der zweiten und dritten Spalte wiederum Ausschnitte von Screenshots, die, um möglichen, weiteren Moirés beim Druck vorzubeugen, wieder um 200% vergrößert wurden. Bei den Verkleinerungen wurden folgende Zoomfaktoren verwendet: (a) 300%, (b) 100%, (c) 70%, (d) 160%, (e) 40%, (f) 25%, (g) 200%, (h) 50%, (i) 30%, (j) 250%, (k) 100%, (l) 30%. Da es durch den Druck zu weiterem Aliasing kommen kann und dadurch möglicherweise die beabsichtigten Moirés nicht mehr richtig zu erkennen sind, stelle ich die pdf-Version dieses Artikels gerne bereit: Kontaktieren Sie mich einfach per Email (die Email-Adresse ist am Ende des Beitrags notiert).



(a)



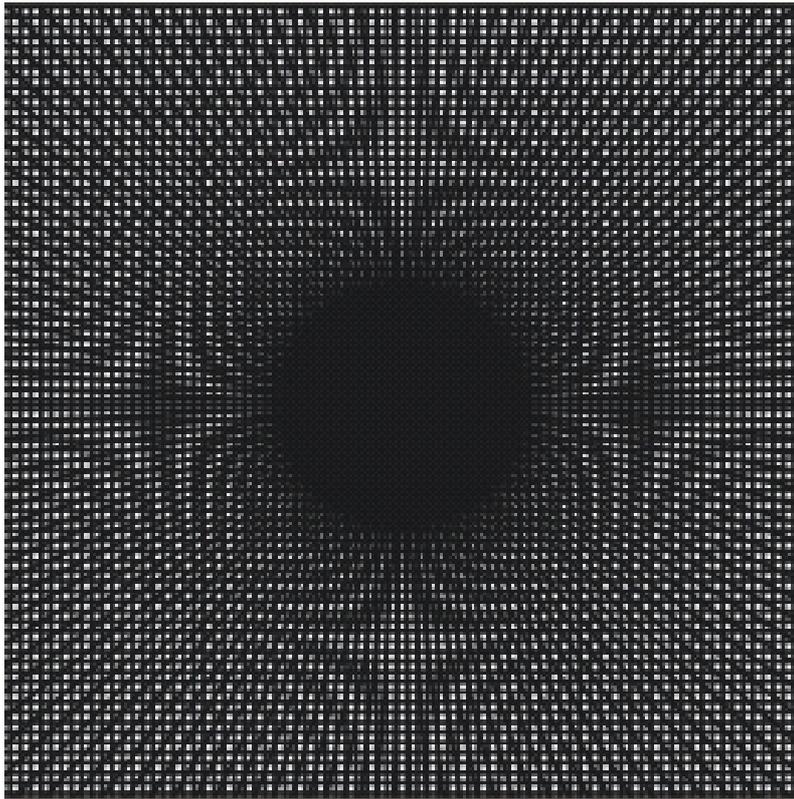
(b)

**Abbildung 9:** Dargestellt sind in (a) und (b) die Überlagerungen von konzentrischen Kreismustern und Gittern, in (a) mit einem parabolischen und in (b) mit einem hyperbolischen Moiré; in (c) (siehe: nächste Seite) ist ein hyperbolisches Moiré-Phänomen in der Überlagerung eines Strahlenmusters und eines Gitters zu sehen.

Die in den Verkleinerungen des konzentrischen Kreismusters zu beobachtenden Moiré-Phänomene in den Abbildungen 8 (h) und (i) weisen dabei sogar unterschiedliche Typen an Wiederholungsstrukturen auf, nämlich ein sog. *parabolisches* Muster (vgl. [Amidror 2000, 302]; [Selzer 2005, 121]) in Abbildung 8 (h) sowie ein sog. *hyperbolisches* Muster (vgl. [Amidror 2000, 303]) in Abbildung 8 (i).

Um hyperbolische Muster handelt es sich auch bei den Moiré-Phänomenen in den Abbildungen 8 (k) und (m). Obwohl der erste Eindruck dieser Phänomene ein ganz anderer als bei dem hyperbolischen Moiré-Phänomen in Abbildung 8 (i) ist, wird bei genauerem Hinschauen plausibel, dass das auftretende Moiré-Phänomen aus Hyperbeln zusammengesetzt ist.

Wir sehen also, dass beim Anzeigen periodischer bzw. Wiederholungsstrukturen auf einem Computerbildschirm Aliasing-Phänomene entstehen, die analog zu den Moiré-Phänomenen in den entsprechenden Überlagerungen schwarz-weißer Muster sind, denn ein Computerbildschirm verfügt ja nur über eine endliche Anzahl an Pixeln, weshalb auch hier eine



(c)

Abtastung des darzustellenden Objekts stattfindet. Deshalb können wir die Abbildungen 8 (a) bis (c) bzw. (d) bis (f) in Beziehung zu den Abbildungen 5 (a), (b) und (c) setzen, weil sich die auftretenden Moiré-Phänomene hierbei entsprechen. Die parabolischen sowie hyperbolischen Moiré-Phänomene aus den Abbildungen 8 (h), (i), (k) und (l) stehen dann entsprechend in Analogie zu den Moirés in den Überlagerungen schwarz-weißer Gitter und Kreismuster bzw. Gitter

und Strahlenmuster, wie im Vergleich mit Abbildung 9 zu erkennen ist.

## 5 Computerbildschirme und Funktionen

Auch beim Medium „Computerbildschirm“ finden wir also den dritten Aspekt „Medien als Funktionen“ bestätigt, denn hier findet eine Abtastung statt, die zu einer eindeutigen Ausgabe am Computerbildschirm führt: Der Computerbildschirm ist damit eine Funktion. Die Ausgabe auf den Bildschirm stellt ebenfalls eine Funktion dar, denn das auf dem Bildschirm dargestellte Objekt ist ja wieder nichts anderes als eine Bildpunktmatrix und damit im Grunde eine Tabelle (vgl. [Hischer 2006 b, 24 f. & 28 ff.]). Berücksichtigt man außerdem, dass bei der Erschaffung von Objekten mit dem Computer stets eine bestimmte Intention verfolgt wird, und zwar die Darstellung von Kultur oder Wirklichkeit, so ergibt sich auch der zweite Aspekt im Verhältnis von Funktionen und Medien. Lediglich der erste Aspekt ist nicht immer zwingend gegeben, denn nicht alles, was wir in einen Computer eingeben und was somit am Bildschirm dargestellt wird, ist eine Funktion – beispielsweise die Worte, die ich gerade eintippe –, dennoch kann der Bildschirm als Medium zur Darstellung von Funktionen dienen, nämlich wenn die entsprechende Software eingesetzt wird, wie z. B. ein Funktionenplotter, ein Tabellenkalkulationsprogramm usw.

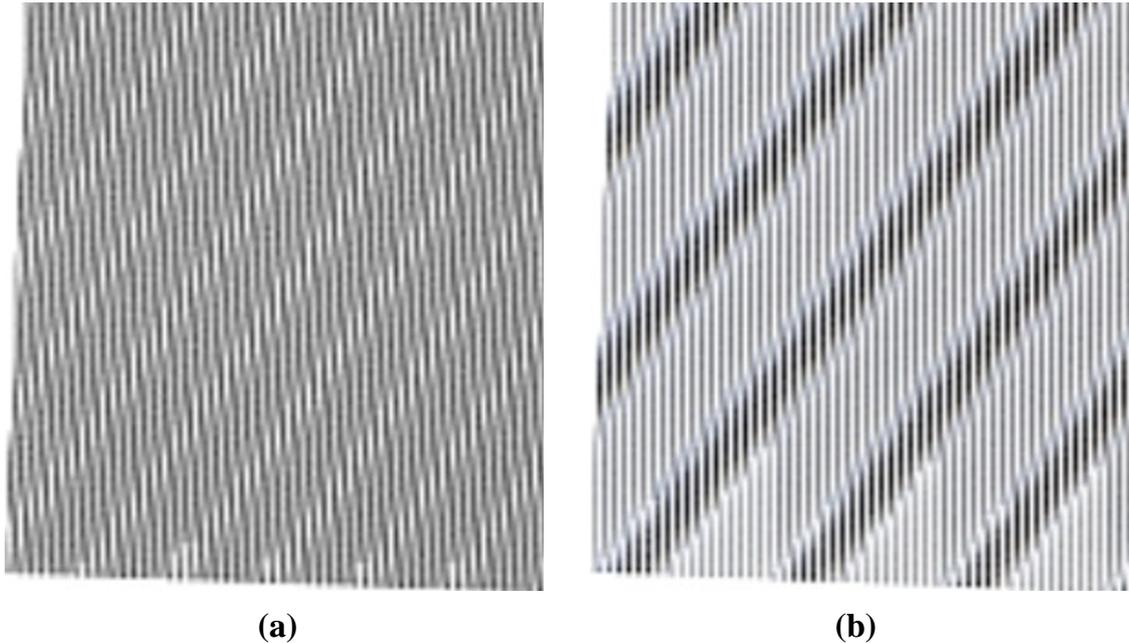
Neben Computerbildschirmen machen natürlich auch andere Bildschirme, bei denen eine Abtastung stattfindet, wie beispielsweise beim Digitalfernsehen, und eine eindeutige Bildausgabe erfolgt, eine Funktion aus. Beim Fernsehen lassen sich zudem hin und wieder Moiré-Phänomene beobachten, wenn beispielsweise ein leeres Fußballstadion oder eine Person in einem gemusterten Hemd gefilmt wird. In diesem Zusammenhang stellt sich dann allerdings die Frage: Liegt das ausschließlich am Bildschirm, oder kann es noch andere Ursachen haben?

## 6 Scanner

Orientieren wir uns bei der Suche nach weiteren Neuen Medien, hinter denen sich möglicherweise Funktionen verbergen könnten, am Auftreten von Aliasing, so stoßen wir auf das Medium „Scanner“. Wer schon mal einen Scanner benutzt hat, weiß, dass dieser über eine bestimmte *Auflösung* verfügt. Auflösung meint hier nichts anderes als die *Abtastfrequenz*, mit der ein Objekt gescannt wird – beim Scannen erfolgt also eine Abtastung, womit bereits eine Voraussetzung für das Auftreten von Aliasing gegeben ist. Ein Scanner besitzt aufgrund seiner technischen Gegebenheiten eine maximale Auflösung; bei Geräten „für den Hausgebrauch“ liegt diese „physikalisch“ derzeit bei höchstens 600 dpi<sup>9</sup>, wobei es möglich ist, vor dem Start eines Scan-Vorgangs in der zugehörigen Software manuell eine niedrigere als die maximal technisch mögliche Auflösung einzustellen. Wir nutzen dies im Folgenden aus, um gezielt Aliasing zu erzeugen und anhand dieser Aliasing-Phänomene Aussagen über das Neue Medium „Scanner“ treffen zu können.

Betrachten wir dazu die Abbildung 10: (a) zeigt den Scan eines Streifenmusters der Periode 0,02 inch, (b) den Scan eines Streifenmusters der Periode 0,04 inch; beide wurden bei einem Drehwinkel von ca. 2° und mit einer Auflösung von 50 dpi gescannt: In beiden Fällen wurde also die Shannonsche Abtastbedingung verletzt, denn in (a) wurde das Streifenmuster mit seiner eigenen Frequenz abgetastet (eine Periode von 0,02 inch bedeutet, dass das Streifenmuster 50 Linien pro Zoll (lpi) besitzt, und damit ist die Abtastfrequenz genauso groß wie die „eigene“ Frequenz) – es handelt sich daher um eine Überlagerung mit dem Frequenzverhältnis  $q = 1$  –, in (b) wurde das Streifenmuster mit seiner doppelten Frequenz abgetastet (ein Streifenmuster mit einer Periode von 0,04 inch besitzt 25 Linien pro Zoll, d. h. die Abtastfrequenz ist doppelt so groß wie die „eigene“ Frequenz), denn hier liegt das Frequenzverhältnis  $q = 1/2$  vor. Beide Scans weisen daher eindeutig Aliasing auf, und wie deutlich in Abbildung 10 zu erkennen ist, verlaufen die beiden Aliasing-Phänomene in gleicher Richtung, während allerdings ihre Frequenzen einen Unter-

<sup>9</sup> „dpi“ steht für „dots per inch“, wobei 1 inch (Zoll) = 2,54 cm ist. Höhere Auflösungen, die in der Werbung angepriesen werden, sind nicht physikalisch, sondern werden nur mittels Interpolation künstlich erzeugt (Hinweis von Horst Hischer).



**Abbildung 10:** In (a) ist ein um 200% vergrößerter Ausschnitt aus dem Scan eines periodischen Linienmusters der Periode 0,02 inch abgebildet, das bei einem Drehwinkel von ca.  $2^\circ$  und einer Auflösung von 50 dpi gescannt wurde; (b) zeigt einen um 200% vergrößerten Ausschnitt des Scans eines periodischen Streifenmusters der Periode 0,04 inch, ebenfalls bei einem Drehwinkel von ca.  $2^\circ$  und einer Auflösung von 50 dpi gescannt (vgl. [Selzer 2005, 108]).

schied aufweisen: die Frequenz des Aliasing-Phänomens in Abbildung 10 (a) scheint doppelt so groß wie diejenige in Abbildung 10 (b) zu sein.

Blicken wir an dieser Stelle noch einmal auf die Beispiele „Funktionsplotter“ und „Computerbildschirm“ zurück: Auch dort findet eine Abtastung der darzustellenden Objekte statt, was das Auftreten von Aliasing zur Folge haben kann. Die Abtastung kann dabei durch die Multiplikation der darzustellenden Funktion und einer Abtastfunktion umgesetzt werden, was, wie wir inzwischen wissen, der Überlagerung entsprechender schwarz-weißer periodischer Strukturen bzw. Wiederholungsstrukturen entspricht. Übertragen wir dies auf die oben abgebildeten Beispiele, so müssten die in den Scans auftretenden Aliasing-Phänomene in den Abbildungen 10 (a) und (b) in Analogie zu entsprechenden Überlagerungen periodischer Strukturen stehen. Solche Überlagerungen liegen uns sogar bereits vor, und zwar mit den Abbildungen 7 (a) und (b), denn dort handelt es sich um dieselbe Situation wie in den Abbildungen 10 (a) und (b): In den Überlagerungen in Abbildung 7 gelten dieselben Frequenzverhältnisse wie in Abbildung 10. Allerdings besteht ein Unterschied: Während sich die Moiré-Phänomene in den Abbildungen 10 (a) und (b) in ihrer Frequenz unterscheiden und lediglich in ihrer Richtung übereinstimmen, besitzen die Moirés in den Abbildungen 7 (a) und (b) dieselbe Richtung *und* Frequenz! Doch was hat das zu bedeuten?!

Überdenken wir die Situation noch einmal: Wir scannen zwei Linienmuster, gehen dabei davon aus, dass die vom Scanner vorgenommene Abtastung einer Überlagerung dieser Linienmuster mit einer zweidimensionalen Punktfläche (nach [Amidror 2000, 44]: *dot screen*, vgl. [Selzer 2005, 74 ff.]) der Periode 0,02 inch entspricht, wobei die Punktfläche weiße Punkte auf schwarzem Untergrund darstellen muss, damit sie die Abtastung repräsentiert. Scannen wir nun mit einer Auflösung von 50 dpi, so würde das doch bedeuten, dass je nach maximal möglicher Auflösung des Scanners größere Lücken zwischen den Abtastwerten im Scan entstehen würden, denn es blieben ja zwischen den Abtastungen immer mehrere Pixel „ungeutzt“. Allerdings enthalten die Scans in den Abbildungen 10 (a) und (b) keine großen Lücken: Es scheint daher etwas mit unserer Vorstellung vom Scannen nicht zu stimmen. Tatsächlich dürfen wir uns den Scanprozess nicht als reine Überlagerung des zu scannenden Objekts mit einer periodischen Punkt-Fläche vorstellen; das Scannen stellt einen weitaus komplexeren Prozess dar, der außerdem bei verschiedenen Scannern unterschiedlich umgesetzt wird. Aufgrund der obigen Ergebnisse können wir allerdings nur Vermutungen über eine solche Umsetzung aufstellen: So könnte möglicherweise eine Interpolation oder Mittelwertbildung der Abtastwerte eine Rolle spielen, was auch die unterschiedlichen Frequenzen der Moiré-Phänomene erklären würde. Jedoch bedarf es an dieser Stelle noch viel tiefer gehender Untersuchungen, um präzisere Aussagen über die Vorgehensweise von Scannern treffen zu können.

## 7 Scanner und Funktionen

Betrachten wir nun wieder die Aspekte im Verhältnis von Funktionen und Medien, so reichen unsere bisherigen Ergebnisse bzgl. des Scannens allerdings aus, um zu belegen, dass es sich auch bei einem Scanner um eine Funktion handelt, denn es erfolgt u. a. eine Abtastung, die eine eindeutige Ausgabe in Form einer Graphikdatei – also in Form einer Bildpunktmatrix und daher in Gestalt einer Funktion liefert: Der dritte Aspekt der *Trias Medien als Funktionen* ist damit also erfüllt. Darüber hinaus haben wir mit Hilfe des Aliasing sogar Aussagen über die *Funktionsweise* dieses Mediums treffen können, so dass wir ausgehend von dem dritten Aspekt *Medien als Funktionen* unser Verständnis des Mediums (oder der Funktion!) „Scanner“ erweitert haben.

## 8 Ausblick

Im Hinblick auf die drei Aspekte im Verhältnis von Funktionen und Medien haben wir eine Reihe Neuer Medien wie „Funktionenplotter“, „Computerbildschirme“ und „Scanner“ als Funktionen entdeckt und dadurch unsere Auffassung dieser Neuen Medien – möglicherweise sogar Neuer Medien im Allgemeinen – erweitert.

Einen wichtigen Beitrag leisteten dabei die Aliasing-Phänomene, deren Auftreten uns erst auf die richtige Fährte gebracht hat. In diesem Kontext spielten die Aliasing- bzw. Moiré-Phänomene sozusagen die Rolle eines „Wegweisers“ zum Entdecken der hinter den Neuen Medien „versteckten“ Funktionen. Jedoch stellen Moiré-Phänomene einen viel zu interessanten, geradezu faszinierenden eigenen Untersuchungsgegenstand dar – die obigen Ausführungen haben dies sicherlich bereits angedeutet –, um sie lediglich in dieser Form zu betrachten. Vielmehr sollten sie „Untersuchungsgegenstand im Rahmen einer Integrativen Medienpädagogik werden“ [Hischer 2006 b, 37]: So bieten sich neben den angedeuteten und in [Hischer 2006 a] vorgestellten Untersuchungen zum Aliasing bei Funktionenplottern viele Möglichkeiten, diese Phänomene zu erforschen, und zwar sowohl mit „althergebrachten“ Medien wie Folien, Stoffen oder Stift und Papier als auch – und insbesondere – mit den Neuen Medien, wie die Darstellungen im Zusammenhang mit „Computerbildschirmen“ bzw. „Bildbearbeitungssoftware“, „Dynamischer Geometriesysteme“ und „Scanner“ bereits andeuteten.

Der Unterrichtsgegenstand „Aliasing“ bzw. „Moiré-Phänomene“ bietet allerdings nicht nur die Möglichkeit, Medien als Unterrichtsmittel (vgl. [Hischer 2006 b, 38 ff.]) zur Darstellung oder Veranschaulichung der Phänomene zu nutzen, sondern das Auftreten von Aliasing bei Neuen Medien zeigt zudem die Grenzen dieser Medien auf, und gerade die Erforschung dieser Grenzen macht diese Neuen Medien und damit auch das Aliasing zum Unterrichtsgegenstand. Im Sinne von [Hischer 2006 b, 37 ff.] erfüllt das Thema „Aliasing“ damit alle drei Aspekte der integrativen Medienpädagogik, nämlich die *Mediendidaktik*, *Medienkunde* und *Medienerziehung*.

## 9 Literatur

- Amidror, Isaac [2000]: Computational Imaging and Vision. Bd. 15: The theory of the Moiré phenomenon. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Barzel, Bärbel & Böhm, Josef (Hrsg.) [2002]: mathematikunterricht anders – offenes lernen mit neuen medien. Stuttgart/Düsseldorf/Leipzig: Klett.
- Bracewell, Ronald [2000]: The Fourier Transform and Its Applications. Boston u. a.: McGraw-Hill.
- Herget, Wilfried & Keunecke, Karl-Heinz & Malitte, Elvira & Stachniss-Carp, Sibylle [2002]: Sinus-Graphen und Rechner-Grenzen. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, 44(2002)2, S. 64–68.
- Hischer, Horst [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hildesheim: Franzbecker.
- [2005]: Aliasing und Neue Medien – Ein Beitrag zur Integrativen Medienpädagogik. – In: Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.): Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge – Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Osnabrück: Schriftenreihe des FMD, Nr. 40.1, 2005, S. 115–129.

- [2006 a]: Abtast-Moiré-Phänomene als Aliasing. – In: *Der Mathematikunterricht*, **52**(2006)1, S. 18–31.
- [2006 b]: Funktionen und Medien — Anmerkungen zur Trias ihrer Beziehung . In diesem Band, S. 23–40.
- Hubwieser, Peter [2004]: Didaktik der Informatik. Grundlagen, Konzepte, Beispiele. Berlin u. a.: Springer.
- Lambert, Anselm [2005]: Ich sehe was, was Du nicht siehst – Computerdarstellungen reflektieren. – In: Barzel, Bärbel & Hußmann, Stephan & Leuders, Timo (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen, S. 256–286.
- Lambert, Anselm & Selzer, Pia [2006]: Schillernde Diskretisierung – eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik. – Erscheint in: Kortenkamp, Ulrich (Hrsg.): Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen/Donau. Hildesheim: Franzbecker.
- Oppenheim, Alan V. & Willsky, Alan S. [1992]: Signale und Systeme. Weinheim: VCH.
- Patorski, Krzysztof [1993]: Handbook of the Moiré Fringe Technique. Amsterdam u. a.: Elsevier.
- Selzer, Pia [2005]: Überraschende Phänomene bei der Darstellung von Funktionen – in naitiver und mathematischer Sicht. Universität des Saarlandes: Staatsexamensarbeit.
- Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. – In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? – Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.

### **Anschrift der Verfasserin**

Pia Selzer  
Universität des Saarlandes  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Postfach 15 11 50  
66041 Saarbrücken  
E-Mail: [piaselzer@math.uni-sb.de](mailto:piaselzer@math.uni-sb.de)



