Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 334

Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung

Marie-Christine von der Bank

Saarbrücken 2013

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 334
submitted: April 23, 2013

Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung

Marie-Christine von der Bank

Saarland University
Department of Mathematics
P.O. Box 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany
mcvdb@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung

Marie-Christine von der Bank

Zusammenfassung. Die KMK standardisiert den Mathematikunterricht durch allgemeine Kompetenzen und inhaltliche Leitideen. Eine solche Ausrichtung an für die Mathematik zentral erscheinenden Ideen ist nicht neu. Sie wurde unter „Fundamentale Ideen“ (oder anderen Bezeichnern[1]) schon vielfach in der mathematikdidaktischen Literatur diskutiert. Meist wurden dabei nur Inhaltsideen (z. B. Zahl) und Tätigkeitsideen (z. B. Kommunizieren) berücksichtigt, „Nichtkognitive“ Ziele blieben unbeachtet. Im Beitrag wird die Forschungsdebatte skizziert, ein Modell zur Theorie Fundamentaler Ideen erarbeitet und „Optimierung“ als Beispielreservoir für Anwendungen des Modells ausgelotet.

0. Einleitung

JEROME BRUNER eröffnete mit seinem Buch „Der Prozess der Erziehung“ (Bruner 1970), in dem er die Ausrichtung des schulischen Fachunterrichts an den Fundamentalen Ideen der zugrunde liegenden Wissenschaft fordert, eine breite Diskussion über Auswahlkriterien für Inhalte des (Mathematik-)Unterrichts, die bis heute nicht beendet ist. Dabei sei bemerkt, dass die Thematik über die Jahre unterschiedlich starke Beachtung fand. Im deutschsprachigen Raum wurde sie besonders intensiv nach der deutschen Übersetzung des genannten Buches und dem Aufkommen der Strukturmathematik in den Schulen geführt. Einen weiteren Boom erlebte die Diskussion parallel zur Emanzipation von Informatik als Schulfach.[2] Aktuell wird im Zusammenhang mit der Standardisierung von Lehrplänen und Abschlüssen wieder über zentrale „Leitideen“ als Auswahlkriterien für Inhalte des schulischen Unterrichts nachgedacht. Bedingt durch diese Diskontinuitäten der Forschungsdebatte ist die Literatur zum Thema „Fundamentale Ideen“ kontrovers und umfangreich. Dennoch wird hier ein Versuch unternommen werden, exemplarisch ausgewählte Ansätze vorzustellen und zu vergleichen, um so einen arbeitsfähigen Überblick zu liefern. Als „roter Faden“ dient dabei zunehmend expliziter ein Vernetzungsgedanke. Den Ausgangspunkt bildet ein naiver Vernetzungsbegriff, das heißt, Knoten eines ebenen oder auch räumlichen Graphen werden/sind über Kanten verbunden.

---

[1] Dem gesamten Artikel liegt die Unterscheidung zwischen Begriff und Bezeichner (des Begriffs) im Sinne von (Lambert 2003) zugrunde.

[2] Vgl. beispielsweise die Arbeiten von ANDREAS SCHWILL, der aufbauend auf dem Ansatz von FRITZ SCHWEIGER, eine Theorie Fundamentaler Idee der Informatik erarbeitet, die auch für die Mathematikdidaktik nutzbar ist (Schwill 1993, Schubert/Schwill 2004).

Nach einem Zwischenfazit, in dem der bisherige Forschungsstand kritische Würdigung findet, wird ein pragmatischer Weg eingeschlagen. Mithilfe von obigem Vernetzungsbegriff wird ein Vorschlag zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen gemacht. Dazu ist zunächst neben einer Erweiterung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen eine stärkere Strukturierung und Ordnung derselben erforderlich. Die daraus resultierende Theorie wird unterrichtspragmatische auf folgenden Vernetzungspentagraphen reduziert.

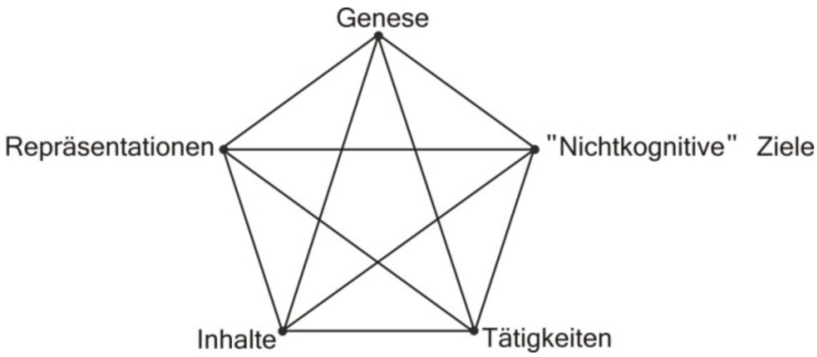

Abb. 1: Vernetzungsmöglichkeiten im Unterricht

Dieses Aspektemodell und seine Tragweite werden im dritten Teil der vorliegenden Arbeit an Optimierungsaufgaben aus verschiedenen Gebieten der Schulmathematik demonstriert.

Für alle Beispiele werden zunächst Vernetzungsmöglichkeiten zwischen verschieden Gebieten der (Schul-) Mathematik betrachtet. Im Speziellen sind dies

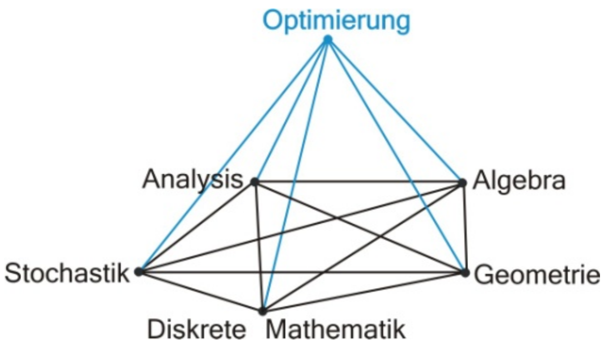

Abb. 2: Vernetzungen zwischen Gebieten der (Schul-)Mathematik durch „Optimierung“

1. Fundamentale Ideen der Mathematik

1.1 Kompetenzen und Leitideen – heute und früher und anderswo

Die Kultusministerkonferenz (KMK) verabschiedete 2003 die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss. Darin wird eine Orientierung des Mathematikunterrichts an

- sechs *allgemeinen Kompetenzen*: mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6), und
- fünf *inhaltlichen Leitideen*: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall

gefordert. Die genannten allgemeinen Kompetenzen, die alle als Tätigkeiten formuliert sind, werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Diese Inhalte sind Konkretisierungen der übergeordneten mathematischen Leitideen. Die sechs allgemeinen Kompetenzen sind durch drei Anforderungsbereiche (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren), die nach ansteigendem „Anspruch" und „kognitiver Komplexität" geordnet sind, weiter differenziert (KMK 2003, S. 13). Mithilfe dieser Ausdifferenzierung kann analysiert werden, „welche Kompetenzen in welchen Anforderungsbereichen zur Bearbeitung [einer Aufgabe] gebraucht werden" (KMK 2003, S. 13). Dadurch ergibt sich eine $6 \times 5 \times 3$ - Kompetenzmatrix, die Mathematikunterricht definieren soll.

Ausgehend von dieser Standardisierung soll nun

> bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sachgebietsübergreifendes, vernetzendes Denken und Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erreicht werden […]
>
> (KMK 2003, S. 6)

Die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife stellen den Vernetzungsgedanken weiter in den Vordergrund. Hier ist Vernetzung nicht mehr ein Produkt des Lernprozesses, sondern eine Basis.

> Für den Erwerb von Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern.
>
> (KMK 2012, S. 11)

Neben den allgemeinen Kompetenzen tragen Leitideen zur Vernetzung von traditionellen klassischen Sachgebieten der Schulmathematik bei (KMK 2012, S. 21).

In Österreich wurden im Zuge einer Standardisierung von Lehrplänen und Abschlussprüfungen ebenfalls kompetenzorientierte Bildungsstandards verfasst.

Sie sind, wie ihr deutsches Pendant, als Regelstandards konzipiert, die eine Auswahl der im Unterricht zu erwerbenden Kompetenzen ermöglichen (BIFIE 2012). Der österreichische Lehrplan für die Oberstufe[3] der „Allgemeinbildenden höheren Schulen" umfasst drei Kompetenzkategorien (BMUKK 2004, S. 1).

- Kompetenzen, die sich auf *Kenntnisse* beziehen. Sie umfassen mathematische Inhalte aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik;
- Kompetenzen, die sich auf *Begriffe* beziehen. Sie äußern sich in der
    - o Fähigkeit mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen und
    - o Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen zu erkennen;
- Kompetenzen, die sich auf mathematische *Fertigkeiten und Fähigkeiten* beziehen. Sie beziehen sich auf
    1. darstellend-interpretierendes Arbeiten,
    2. formal-operatives Arbeiten,
    3. experimentell-heuristisches Arbeiten sowie
    4. kritisch-argumentatives Arbeiten.

Kompetenzen, die sich auf inhaltliche Kenntnisse beziehen, entsprechen im Wesentlichen den inhaltlichen Leitideen der KMK. Die allgemeinen Kompetenzen der deutschen Bildungsstandards finden sich, wenn auch anders strukturiert, in den österreichischen Kompetenzen, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, wieder.[4]

1.	2.	3.	4.
(K3), (K4)	(K5)	(K2)	(K1), (K6)

Tab. 1: Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den Kompetenzen in Österreich, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen

[3] Entspricht den Klassenstufen 9 bis 12 des deutschen achtjährigen Gymnasiums.

[4] Die Kompetenz (K6) wird von den österreichischen Kompetenzen nicht vollständig erfasst. Sie kann nur teilweise dem kritisch-argumentativen Arbeiten zugeordnet werden.

Kompetenzen, die auf Begriffe bezogen sind, finden sich so nicht in den deutschen Bildungsstandards. Diese Art von Kompetenzen beinhaltet vor allem (Meta-)Denkprozesse und trägt somit zur Erweiterung des Verständnisses von Kompetenzen um einen wesentlichen Aspekt von Mathematik bei.

Zur Analyse und Beurteilung der vom Schüler erworbenen Kompetenzen werden letztlich nur noch drei Dimensionen von Kompetenzen unterschieden; Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen, spielen dabei keine Rolle mehr (BMUKK 2011, S. 9 f.). Dazu werden

> „verwandte" Handlungen zu **Handlungsbereichen** (H1, H2 …), „verwandte" Inhalte zu **Inhaltsbereichen** (I1, I2 …) und „verwandte" Arten bzw. Grade von Vernetzung zu **Komplexitätsbereichen** (K1, K2 …) zusammengefasst.

(BMUKK 2011, S. 9)

Somit ergibt sich eine $4 \times 4 \times 3$ – Kompetenzmatrix.

Handlungsdimension	**Inhaltsdimension**	**Komplexitätsdimension**
(H1) Darstellen, Modellbilden (H2) Rechnen, Operieren (H3) Interpretieren (H4) Argumentieren, Begründen	(I1) Algebra, Geometrie (I2) Funktionale Abhängigkeit (I3) Differential- und Integralrechnung (I4) Wahrscheinlichkeit und Statistik	(K1) Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K2) Herstellen von Verbindungen (K3) Einsetzen von Reflexionswissen, Reflexion

Tab. 2: Kompetenzdimensionen in den österreichischen Bildungsstandards

Dass eine solche Ausrichtung an für die Mathematik zentral erscheinenden Aspekten eine lange Tradition hat, zeigt ein Blick in die Preußischen Richtlinien zu den Lehrplänen für die höheren Schulen von 1925 (vgl. Lambert 2004, S. 71-74). Damals fanden sich unter „Methodische Bemerkungen" acht „Allgemeine Grundsätze", die im Wesentlichen die von der KMK aktuell geforderten allgemeinen Kompetenzen beinhalten. Lediglich die bewusste kulturelle Einbettung von Mathematik (damals der 7. Punkt) findet sich nicht mehr explizit in den aktuellen Kompetenzbeschreibungen in Deutschland. In Österreich findet sich der „Kulturell-historische Aspekt" im Rahmen der Aspekte der Mathematik (Schöpferisch-kreativer Aspekt, Sprachlicher Aspekt, Erkenntnistheoretischer Aspekt, Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt, Autonomer Aspekt, Kulturell-historischer Aspekt), die im Lehrplan für die AHS Oberstufe direkt nach den mathematischen Kompetenzen beschrieben werden.

Ähnlich wie die allgemeinen Kompetenzen finden sich auch die Leitideen der Bildungsstandards (teilweise) in den Preußischen Richtlinien. Hier wird als „Allgemeines Lehrziel“ gefordert:

> […] Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen […] Schulung in der richtigen Auffassung von Größenwerten […]. Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen […] insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte […]

(z. n. Lambert 2004, S. 71. f.)

Angesprochen sind die Leitideen Zahl, Messen, Raum und Form und Funktionaler Zusammenhang. Lediglich die Leitidee Daten und Zufall fehlt, da Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik (teilweise bis ganz) aus den Lehrplänen gestrichen wurden, um Platz für Differential- und Integralrechnung zu schaffen.[5]

Schon dieser kurze historische Abriss zeigt, dass eine Orientierung von Unterricht an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik lange vor dem Erscheinen des Buches „The Process of Education“ von BRUNER gefordert wurde, und auch ganz aktuell (oft ohne Bezug zu BRUNER oder anderen historischen Vorläufern) diskutiert wird. Da allerdings fast alle im Folgenden vorgestellten Autoren BRUNERs Buch als (historische) Basis ihrer Theoriebildung angeben, werden die Überlegungen BRUNERs im nächsten Abschnitt als Startpunkte für eine detailiertere Analyse der Entwicklung der Theorie Fundamentaler Ideen gewählt.

1.2 Fundamentale Ideen nach BRUNER – Ein Bezeichner wird geboren(?)

1960 entfachte BRUNER die Diskussion über Fundamentale Ideen der Mathematik mit seinem Buch „The Process of Education“[6] neu. Das Buch ist eine zusammenfassende Darstellung von Ergebnissen einer von BRUNER geleiteten Konferenz in Woods Hole im September 1959. Dort berieten Erziehungswissenschaftler, Lehrer, Psychologen und Fachwissenschaftler (u. a.) über die weitere

---

[5] Vgl. (Lietzmann 1925).

[6] Zur Analyse dient die deutschsprachige Übersetzung „Der Prozeß der Erziehung“ von 1970. An Stellen, bei denen sich durch die Übersetzung semantische Verschiebungen ergeben, wird auf die englische Originalliteratur zurückgegriffen.

Entwicklung und Verbesserung des (naturwissenschaftlichen) Unterrichts der Grund- und weiterführenden Schulen (Bruner 1970, S. 13).[7]

Als Ursache für den vermeintlichen „Bildungsrückstand“ nennt BRUNER die unzureichende Entwicklung der Curricula in den letzten fünfzig Jahren. Diese begründet er zum einen dadurch, dass führende Wissenschaftler und

> die an der Spitze ihrer Disziplinen stehenden Gelehrten, die den größten Beitrag zu einer grundlegenden Reorganisation ihres Fachgebietes hätten leisten können, an der Entwicklung von Curricula für Primar- und Sekundarschulen nicht beteiligt [waren].

(Bruner 1970, S. 18)

Als weiteren Grund gibt er an, dass wichtige Bezugswissenschaften, wie Lernpsychologie und Erziehungspsychologie sich nicht mehr ganzheitlich mit dem Curriculumsproblem beschäftigten (Bruner 1970, S. 19).

Beide genannten Entwicklungen beschreibt BRUNER als rückläufig und hebt hervor, dass neuerdings wieder viele Wissenschaftler an der Entwicklung und Planung des Schulunterrichts auf ihrem Fachgebiet beteiligt sind (Bruner 1970, S. 18). Im Zuge der Erforschung des sogenannten „nicht-spezifischen“ Transfers wurde das Interesse verschiedener psychologischer Disziplinen an

> jenen Formen komplexen Lernens neu belebt, wie man sie in der Schule findet: eines Lernens, durch welches ein allgemeines Verständnis für die Struktur eines Unterrichtsgegenstandes erreicht werden soll.

(Bruner 1970, S. 20 f.)

---

[7] Sowohl BRUNERs Buch als auch die vorangegangene Konferenz stehen im Zeichen einer bildungspolitischen Umbruchstimmung. Durch den enormen Ausbau der Rüstungsindustrie während des 2. Weltkrieges und des aufkommenden Kalten Krieges stieg das Bruttoinlandsprodukt der USA ständig an. Demokratie und Kapitalismus schienen vielen Amerikanern Garanten für technologischen und wirtschaftlichen Fortschritt. Damit ging ein Überlegenheitsgefühl gegenüber anderen Nationen einher, besonders gegenüber der UdSSR. Dieses Selbstverständnis wurde grundlegend erschüttert, als am 04. Oktober 1957 die Sowjetunion den ersten künstlichen Erdsatelliten startete. Politisch wurde dieses Ereignis (genannt „Sputnik-Schock“) in den USA genutzt um die staatlichen Förderungen der amerikanischen Rüstungsindustrie aufzustocken, da nun ein direkter nuklearer Raketenangriff der Sowjetunion auf die USA möglich schien. Gleichzeitig begegnete die Regierung unter Dwight D. Eisenhower dem vermeintlichen Bildungsrückstand gegenüber der Sowjetunion mit einer stärkeren finanziellen Förderung des Bildungssystems. BRUNER selbst spricht von einer Krise der nationalen Sicherheit, „für deren Bewältigung es auf eine gut ausgebildete Bürgerschaft ankommt“ (Bruner 1970, S. 16).

Besonders diese Art des Transfers (engl: transfer of principles and attitudes) bildet für BRUNER den Kern des „Erziehungsprozesses“. Er unterscheidet sich vom spezifischen Übergangstransfer dadurch,

> daß man anfangs nicht eine Fertigkeit (skill) erlernt, sondern einen allgemeinen Begriff (general idea). Dieser kann dann als Basis dafür genutzt werden, spätere Probleme als Sonderfälle der ursprünglich erlernten Begriffs [(idea)] zu erkennen.
>
> (Bruner 1970, S. 30)[8]

Lernen besteht dann aus

> the continual broadening and deepening of knowledge in terms of basic and general ideas.
>
> (Bruner 1960, S. 17)

Dazu ist ein Curriculum notwendig,

> [that] should revisit these basic ideas repeatedly, building upon them until the student has grasped the full formal apparatus that goes with them.
>
> (Bruner 1960, S. 13)

Der Forderung nach einem spiraligen Aufbau des Curriculums liegt die berühmte Hypothese BRUNERs zugrunde

> that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development.
>
> (Bruner 1960, S. 33)

BRUNER umschreibt „basic ideas“, die auch häufig mit „fundamental ideas“ bezeichnet werden, als

---

[8] An den folgenden Stellen ist ein Rückgriff auf die englische Originalliteratur unverzichtbar, da ab hier engl. „idea“ häufig mit dem Bezeichner „Begriff“ übersetzt wird. An vorherigen Textstellen findet sich noch die Übersetzung von „basic ideas“ (Bruner 1960 S. 12) mit „basalen Ideen“ (Bruner 1970, S. 26). Es ist in der deutschen Übersetzung nicht klar nachzuvollziehen, warum verschiedene Bezeichner an den verschiedenen Stellen gewählt wurden. Daher trägt die deutschsprachige Übersetzung hier wenig zur Begriffsklärung bei. LUTZ FÜHRER weist zudem darauf hin, dass die deutschen Begriffe „Idee“ und „Begriff“ sich nur unzureichend mit dem englischen Begriff „idea“ decken, der in diesem Zusammenhang auch fachtypische Fragestellungen, Bezeichnungsweisen, Strukturierungs- und Begründungsformen, Heuristiken, Methoden etc. bedeuten kann (vgl. Führer 1997, Fn. 132). Diese Feststellung wird belegt durch die häufige Gleichsetzung der Bezeichner „fundamental principles“, „fundamental ideas“ und „fundamental structure“ im englischen Originaltext (Bruner 1960, S. 25).

> ideas that lie at the heart of all sciences and mathematic [...] [and] are as simple as they are powerful […]

(Bruner 1960, S. 12)

> The more fundamental or basic is the idea […], almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems. Indeed, this is almost a tautology, for what is meant by “fundamental” in this sense is precisely that an idea has wide as well as powerful applicability.

(Bruner 1960, S. 18)

Damit also Lernen durch nicht-spezifischen Transfer möglich ist, muss der Lernende wissen, ob eine vorher gelernte „idea“ auf einen neuen Lerngegenstand anwendbar ist. Dazu ist es nach BRUNER unabdingbar, die Struktur des Lerngegenstandes zu beherrschen.

> Die Struktur eines Themas begreifen heißt, es so zu verstehen, daß viele andere Dinge dazu in eine sinnvolle Beziehung gesetzt werden können. Kurz: Die Struktur lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind.

(Bruner 1970, S. 22)

Obwohl BRUNER an einigen Stellen die Bezeichner „fundamental structure“ und „fundamental idea“ fast synonym verwendet, sprechen obige Zitate gegen eine inhaltliche Gleichsetzung der Begriffe.[9] Fundamentalen Ideen sind als allgemeine Konzepte zu verstehen, die gewissermaßen zu Grundlagen von Lernprozessen werden können. Mit Struktur ist eine Beschaffenheit eines Themas gemeint, die ein Erkennen[10] von Zusammenhängen zwischen (vorher) gelernten Fundamentalen Ideen und neuen Lerngegenständen (des Themas) zulässt. Somit stiftet Struktur nach BRUNER Verbindung zwischen verschiedenen Lerngegenständen durch Fundamentalen Ideen, die ihnen zugrunde liegen.

Vereinfacht gesprochen fordert BRUNER demnach die Entwicklung eines Curriculums, welches aufbauend auf Fundamentalen Ideen den Erwerb von vernetz-

---

[9] Befördert durch eine Vermischung der Begriffe „Struktur der Mathematik“ im Sinne BOURBAKIS und „Fundamentalen Ideen der Mathematik“ im Sinne BRUNERS kam es zur Einführung der Strukturmathematik und der Mengenlehre in den Schulen; mit den bekannten negativen Auswirkungen.

[10] Wiedererkennen meint in diesem Kontext das Erkennen einer allgemeinen Fundamentalen Ideen in einer neuen (spezielleren) Lernsituation (Bruner 1970, S. 25). Dieser Aspekt im Umgang mit Fundamentalen Ideen, das Sehen des Allgemeinen im Speziellen, findet sich schon bei ALFRED NORTH WHITEHEAD (Whitehead 1913).

tem Wissen zulässt. Was sich zunächst auf eine so einfache und anerkannte Formel bringen lässt, erweist sich in der Umsetzung als höchst problematisch. BRUNER selbst weist auf einige Schwierigkeiten hin.

> The first and most obvious problem is how to construct curricula that can be taught by ordinary teachers to ordinary students and that at the same time reflect clearly the basic or underlying principles of various fields of inquiry. The problem is twofold: first, how to have the basic subjects rewritten and their teaching materials revamped in such a way that the pervading and powerful ideas and attitudes relating on them are given a central role; second, how to match the levels of these materials to the capacities of students of different abilities at different grades in school.

(Bruner 1960, S. 18)

BRUNER folgend lässt sich die Frage nach den Inhalten und dem Aufbau eines Curriculums, welches die Struktur und die zugrunde liegenden Fundamentalen Ideen eines Lehrgegenstandes betont, nur „mit der Hilfe von Personen von großer Weitsicht und Kompetenz auf diesen Gebieten" entscheiden (Bruner 1970, S. 32).[11] Er geht dabei davon aus, dass durch Zusammenarbeit der besten Köpfe einer jeden Fachwissenschaft Einigkeit über Inhalte und Ziele von Unterricht erreicht werden kann.[12] Allerdings konnte bis heute nicht im Konsens geklärt werden, was Fundamentale Ideen der Fachwissenschaft Mathematik sind, noch wie sich an ihnen vernetztes Wissen im Unterricht erfolgreich erwerben lässt. Die Uneinigkeit über den Begriffsumfang zeigt sich in der Vielzahl fachdidaktischer Publikationen, in denen trotz ähnlicher Theorieansätze für Fundamentalen Ideen häufig völlig unterschiedliche Ideenkataloge erarbeiten werden. Selbst bei dem zu benutzenden Bezeichner für den Begriff „Fundamentale Idee" herrscht keine Einigkeit (vgl. Abb. 3). Zudem werden einige Bezeichner nicht synonym verwendet. Beispielsweise versteht ALFRED SCHREIBER unter „Zentralen Ideen" gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter „Universeller Ideen" (s. u.), während HANS WERNER HEYMANN den gleichen Bezeichner für seine übergeordneten Ideen verwendet (Heymann 1995, S. 173). In (Tietze/Klika/Wolpers 2000) und den wesentlichen Vorüberlegungen dazu von UWE-PETER TIETZE

[11] Diese Aussage beinhaltet in keiner Weise, dass BRUNER die Auswahl von Inhalten allein Wissenschaftlern der einzelnen Fachgebiete überlassen will. Eine solche (Fehl-)Interpretation findet sich häufig als Kritik am BRUNERschen Ansatz in der fachdidaktischen Diskussion (vgl. beispielsweise Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 37).

[12] Dass ein Katalog von Inhalten und Zielen, selbst wenn er im Konsens der führenden Wissenschaftler erstellt wird, immer nur vorübergehend Gültigkeit behalten kann, erläutert BRUNER schon in der Einleitung seines Buches (Bruner 1970, S. 23).

bezeichnen „Leitideen“ einen von drei Aspekten Fundamentaler Ideen, der besonders Produkte der Mathematik umfasst (Tietze 1979, S. 145). Für HANS-JOACHIM VOLLRATH bezeichnen „Leitideen“ eine ganze Reihe prozesshafter Aspekte des Mathematiktreibens wie „Gedanken“, „Einfälle“ und „Fragestellungen“ (Vollrath 1978, S.29).

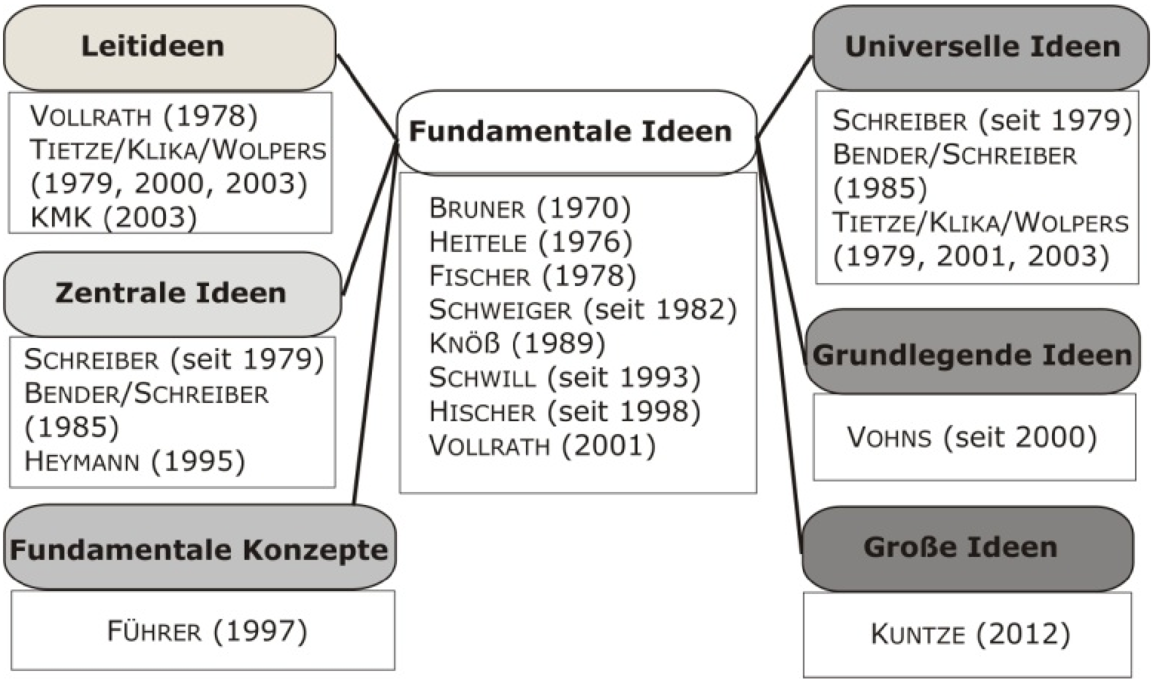

Abb. 3: Synonyme(?) für den Begriff „Fundamentale Idee“ in der deutschsprachigen Literatur

Gemeinsam ist allen Arbeiten jedoch, dass in der Theoriebildung zu Fundamentalen Ideen ein Vernetzungsgedanke, wenn auch oft nur implizit, präsent geblieben ist. Neben Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene, die schon BRUNER forderte, finden sich in der deutschsprachigen Literatur Forderungen nach Vernetzungen zum Alltagsdenken und -sprechen sowie zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematik (z. B. Schweiger 1992 bzw. Vohns 2007).

1.3 Exemplarische Aufarbeitung des Forschungsstandes

Im Folgenden werden exemplarisch die Ansätze von SCHREIBER und dabei auch von BENDER (Schreiber 1979, Schreiber 1983, Bender/Schreiber 1985), FRITZ SCHWEIGER (Schweiger 1992, Schweiger 2010) und ANDREAS VOHNS (Vohns 2007) vorgestellt.[13] Die drei erstgenannten Autoren wurden ausgewählt, da ihre Arbeiten zu den ersten und zu den gründlichsten und somit zu den überzeu-

[13] Diese Aufzählung enthält nur die Hauptwerke der genannten Autoren. Für die anderen in Abb. 3 aufgelisteten Autoren finden sich Literaturhinweise im Literaturverzeichnis dieser Arbeit.

gendsten gehören, die sich mit Fundamentalen Ideen beschäftigten. Sie wurden daher zur Grundlage vieler späterer Theorieansätze.[14] VOHNS betont darüber hinaus explizit einen Vernetzungsgedanken bei seinem Kriterienkatalog für Fundamentale Ideen und weist gleichzeitig auf deren bildungstheoretische Bedeutsamkeit hin. Diese Akzentuierung stellt eine Weiterentwicklung der Thematik zur unterrichtlichen Nutzung dar.

BRUNER folgend sieht SCHREIBER die Lernenden mit einer Stofffülle konfrontiert, die kaum zu überblicken ist. Durch eine Strukturierung der Unterrichtsinhalte mittels „Universeller Ideen" hofft er, der Stofffülle und -isolation entgegenzuwirken. Der Bezeichner „fundamental" wird bewusst abgelehnt, da dieser zu sehr auf verfälschende Interpretationen wie das psychogenetisch Frühe (nach JEAN PIAGET) oder auf Grundlagen der Mathematik (wie die Mengenlehre) abzielt (Schreiber 1979, S. 166). SCHREIBER versteht unter Universellen Ideen

> allgemeine Schemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess erst in Gang setzen oder weitertreiben.

(Schreiber 1979, S. 166)

SCHREIBER weist darufhin, dass eine „allgemeinverbindliche Explikation des Begriffs des unv. Schemas […] vermutlich nicht möglich [ist]", da sich der Begriff „Schema" nur vage umschreiben lässt (Schreiber 1979, S. 167).[15] In einer späteren Zusammenarbeit mit BENDER wurde SCHREIBERs Theorieansatz weiterentwickelt und auf den mathematischen Teilbereich der Geometrie angewendet. Dazu charakterisieren die Autoren Universelle Ideen als

> wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc. […] deren Universalität nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Anwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht. Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen, sie sind vielmehr begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theoriebildung. Sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Ent-

---

[14] Beispiele hierfür sind die Arbeiten von HORST HISCHER, der SCHWEIGERS Theorie stärker gliedert und der Kriterienkatalog von SCHWILL, welcher eine „Synthese" der Theorien SCHREIBERS und SCHWEIGERS bildet (Schwill 1993, S. 8).

[15] SCHEIBER schließt sich zur Erläuterung seines Verständnisses des Begriffs „Schema" ERICH WITTMANN an, der unter einem Schema ein „flexibl organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex-, Operations-, Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation des Individuums integriert ist und die Aktivitäten des Individuums steurt" versteht (Wittmann 1981, S. 63).

sprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwissenschaftlichen (nicht: unwissenschaftlichen) Denken an. Dabei stiften sie Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt; noch wichtiger ist ihre ordnende Funktion beim Eindringen in diese Struktur und beim Erschließen der Umwelt. Universelle Ideen zeichnen sich also aus durch

- Weite („logische" Allgemeinheit),
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen),
- Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).

(Bender/Schreiber 1985, S. 199)

Im Kriterienkatalog werden (neben Vernetzungen zwischen mathematischen Inhalten, erster und zweiter Punkt) Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit (dritter Punkt) betont. Damit geht SCHREIBER über die Forderungen von BRUNER hinaus.

SCHREIBER unterscheidet „Schemata" zunächst in Leitideen und Verfahren, welche erneut untergliedert werden in Findungsverfahren im Sinne PÓLYAS und Begriffsbildungsverfahren (Schreiber 1979, S. 167). Er gibt folgende Universellen Ideen der Mathematik an:

- *Leitideen*: Algorithmus, Exhaustion, Invarianz, Optimalität, Funktion, Charakterisierung,
- *Verfahren*: Rekursion, Abstraktion, Ideation.

Dieser Katalog wurde in (Schreiber 1983) teils reorganisert und teils erweitert. Dort wird eine Gliederung der Ideen in „Prozeduren", „Eigenschaften" und „Komponenten von Begriffsbuldungsprozessen" vorgenommen (vgl. Schreiber 1983, S 70):

- *Prozeduren*: Exhaustion, Iteration, Reduktion, Abbildung, Algorithmus,
- *Eigenschaften*: Quantität, Kontinuität, Optimalität, Invarianz, Unendlich,
- *Komponenten von Begriffsbildungsprozessen*: Ideation, Abstraktion, Repräsentation, Raum, Einheit.

Die Ideen „Unendlich", „Raum" und „Einheit" tauchen schon in (Schreiber 1983) auf, zielen allerdings auf die Diskusion „Zentraler Ideen" der Geometrie, die in (Bender/Schreiber 1985) dargestellt ist, ab. Die Autoren verstehen Zentrale Ideen als gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter Universeller Ideen, die sich durch „Repräsentation und Kombination universeller Ideen" ergeben (Bender/Schreiber 1985, S. 199). Ebenfalls als Zentrale Ideen der Geometrie werden „starre Körper“, „Homogenität“, gebietsspezifische Ausprägungen von „Exhaustion“ und „Ideation“ sowie „Passen“ (als (teilweise) Inzidenz von Flächen mit seinen drei Erscheinungsformen „eingeschränkte Beweglichkeit“, „Optimierung“ und „Messen“) betrachtet.[16]

Ebenfalls seit den 1980ern beschäftigt sich SCHWEIGER intensiv mit der Theorie Fundamentaler Ideen (Schweiger 1982, Schweiger 1988)[17]. Er übernimmt den Bezeichner „Fundamentale Idee“ von BRUNER und schreibt:

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, die
>
> 1. in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
> 2. tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
> 3. als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
> 4. den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
> 5. in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.

(Schweiger 1992, S. 207)

Wie bei BRUNER und SCHREIBER dienen Fundamentale Ideen auch bei SCHWEIGER dazu, Inhalte auf verschiedenen Ebenen zu vernetzen (Punkte 2. und 4.). Der letzte Punkt betont Vernetzungen von Mathematik und Wirklichkeit. Damit ähnelt SCHWEIGERs Kriterienkatalog dem SCHREIBERs, rückt aber den Mathematikunterricht stärker in den Fokus. Eine weitere Neuerung stellt die historische Verankerung von Fundamentalen Ideen und damit die Forderung von Vernetzung zwischen Inhalten und Genese der Mathematik dar (Punkt 1.). SCHWEIGER gibt in seinen beiden wichtigsten Arbeiten zum Thema (Schweiger 1992, Schweiger 2010) unterschiedliche Ideenkataloge an, die sich beide stark von den Universellen Ideen SCHREIBERs unterscheiden.

---

[16] Zu den genannten Zentralen Ideen der Geometrie (besonders zur Idee des Passens) finden sich wichtige Vorüberlegungen (u. a. deren mögliche unterrichtliche Umsetzung) in (Bender 1983).

[17] Da sich eine ausführliche Zusammenfassung seiner bisherigen Arbeiten in (Schweiger 1992) befindet, wird hier auf diese Hauptarbeit eingegangen. Zusätzlich wird der Ideenkatalog aus (Schweiger 2010) vorgestellt, da sich dieser, trotz unveränderter Theorie, stark vom ersten unterscheidet.

- SCHWEIGER 1992: Linearisierung, einfache Strukturen, Bifurkation, Ähnlichkeit, Stabilität, Unabhängigkeit von Störungen, Kraft des Formalen, Erweiterndes Umdefinieren, Dualität, Optimalität[18].
- SCHWEIGER 2010: Sprache und Muster, Testen und Bestätigen, Erweiterndes Umdefinieren, Ordnen, Reparieren, Rekursion und Iteration, Funktion, Abbildung, Modelle, Optimieren.

Während der erste Katalog eher durch mathematische Ideen geprägt ist, enthält der zweite eher Ideen, deren Unterrichtsrelevanz sofort ersichtlich ist. Diese Neuakzentuierung (die schon in (Schweiger 2006) anklingt) ist zweifach begründet. Eine Basis ist das „root sytem of mathematics“[19] von LYNN ARTHUR STEEN. SCHWEIGER leitet, aus den dort genannten „mathematical actions“ („represent, control, prove, discover, apply, model, experiment, classify, visualize, compute“) und „mathematical attitudes“ („wonder, meaning, beauty, reality“), einige Fundamentale Ideen ab (Schweiger 2006, S. 67). Zusätzlich wird der Ideenkatalog von Standardisierungen von Lehrplänen und Abschlussprüfungen beeinflusst. Schweiger nennt exemplarisch die „Principles and Standards of School Mathematics“[20] betont aber, dass „any list of such ‘standards’ clearly reflects some ideas of what is seen as ‘fundamental’“ (Schweiger 2006, S. 67).

Eine weitere Weiterentwicklung des Kriterienkatalogs von SCHWEIGER erarbeitete HISCHER (Hischer 1998). Er unterteilte die genannten Kriterien nach ihrem deskriptivem (Punkte 1., 3. und 5.) und normativem (Punkte 2. und 4.) Charakter. Dadurch wurde die vorhandene Theorie stärker gegliedert und genauer reflektiert, welche Erwartungen (für den Mathematikunterricht) an Fundamentale Ideen gestellt werden und welchen beschreibenden Charakter sie für die Mathematik haben.[21]

Als Synthese der Kriterienkataloge von SCHREIBER und SCHWEIGER ist die Theorie Fundamentaler Ideen SCHWILLS zu sehen. Er führt die Definitionen beider Autoren zusammen und beschreibt Fundamentale Ideen als „Denk-,

---

[18] Optimalität wurde im Dialog mit HANS SCHUPP dem Ideenkatalog hinzugefügt (Schweiger 1992, S. 206).

[19] (Steen 1990, S. 3).

[20] (NCTM 2000).

[21] HISCHERS Charakterisierung der Kriterien wird von SCHWEIGER in (Schweiger 2006) übernommen und bildet einen Ausgangspunkt für die Neustrukturirung des Ideenkatalogs in (Schweiger 2010).

Handlungs-, Beschreibungs- und Erklärungsschemata“ (Schwill 1993, S. 8). Zudem führt er für die einzelnen Kriterien SCHWEIGERs die Bezeichner „Zeitkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 1.), „Vertikalkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 2.) und „Sinnkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 5.) ein. In Anlehnung an SCHREIBERs Forderung nach „Weite“ einer Fundamentalen Idee, fügt SCHWILL SCHWEIGERs Katalog das „Horizontalkriterium“ hinzu, welches sicherstellen soll, dass eine Fundamentale Idee in verschiedenen Gebieten der Mathematik Anwendungen besitzt (Schwill 1993, S. 7). Im Unterschied zu HISCHER unterscheidet SCHWILL die genannten Kriterien nicht nach normativem bzw. deskriptivem Charakter, sondern nach ihrer Notwendigkeit für die Bezeichner „fundamental“ bzw. „Idee“. Demnach sind Horizontal- und Vertikalkriterium Bedingungen für die Fundamentalität und Zeit- und Sinnkriterium Bedingungen, damit von einer Idee gesprochen werden kann (Schwill 1993, S. 8). Um die philosophischen Überlegungen von IMMANUEL KANT zum Ideenbegriff zu berücksichtigen, fügt SCHWILL in einer späteren Arbeit seinem Katalog das „Zielkriterium“ hinzu (Schubert/Schwill 2004, S. 85). Es beinhaltet, dass eine Idee „zur Annäherung an eine gewisse idealisierte Zielvorstellung dient, die jedoch faktisch möglicherweise unerreichbar ist“ (Schubert/Schwill 2004; S. 85). Eine Orientierung an Fundamentalen Ideen kann demnach dazu dienen, sich dieser „idealisierten Zielvorstellung“ anzunähern.

Eine der neuesten Monografien zum Thema „Fundamentale Ideen“ stammt von VOHNS (Vohns 2007). Seine Intention ist, anhand „Grundlegender Ideen“[22] Unterrichtsinhalte mittels einer didaktisch orientierten Sachanalyse auf ihren stofflichen Kern zu untersuchen. Dabei interpretiert er Grundlegende Ideen als Metakonzepte, denen lokale Subkonzepte zugeordnet sind (Vohns 2007, S. 94 ff.). Metakonzepte fasst VOHNS als „Bündel spezifischer Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen“ auf (Vohns 2007, S. 87). Im Gegensatz zu früheren Arbeiten von SCHREIBER bzw. SCHWEIGER gibt VOHNS einen eher offenen Kriterienkatalog an.

> Eine grundlegende Idee ist mathematisch, bildungstheoretisch und pragmatisch bedeutsam, d. h., sie gibt partiell Aufschluss über Strukturen und Zusammenhänge innerhalb der Mathematik, zwischen Mathematik und „dem Rest der Welt“, zwischen

[22] Der Bezeichner „Grundlegend“ wird gewählt, da er „die Vorstellung einer Reichhaltigkeit bzw. Bedeutsamkeit“ einschließt. Diese wird innermathematisch, wissenschaftshistorisch und außermathematisch anwendungsbezogen verstanden (Vohns 2007, S. 87).

> Mathematik und ihren möglichen oder gewünschten Bildungswirkungen, zwischen mathematischen Inhalten und ihrer Lernbarkeit.

(Vohns 2007, S. 3)

Die Bedeutsamkeit einer Idee sieht er zweifach. Zum einen sind Grundlegende Ideen im alltäglichen Denken bedeutsam, da sie auf einer vorwissenschaftlichen Ebene nachweisbar sind. Zum andern sind sie innerhalb der Mathematik nachweisbar und erhalten somit Bedeutung im Bereich des fachwissenschaftlichen Denkens; ob eine Idee bedeutsam ist, hängt davon ab, ob sie „auf der Basis lokaler Subkonzepte“ hilfreich ist, neues Wissen zu erwerben und ob sie Möglichkeiten zur Reflexion über Mathematik bietet (Vohns 2007, S. 88). Für VOHNS dienen Grundlegende Ideen der Vernetzung von mathematischen Inhalten untereinander, aber auch von Mathematik und Wirklichkeit. Besonders betont er Vernetzungen zwischen Inhalten und Bildungszielen des Schulfaches Mathematik.

VOHNS sieht

> die Weiterentwicklung grundlegende Ideen als fachdidaktischer Kategorie […] forschungsmethodisch darin, diese – ohne ihren normativen Charakter aufzugeben oder zu missachten – vor allem als Leitkategorien der Analyse der Unterrichtsinhalte aufzufassen und erst in zweiter Linie als Leitkategorien der unterrichtspraktischen Ausgestaltung.

(Vohns 2007, S. 68)

Dieser Perspektivenwechsel, der sich aus dem analytischen Zugriff auf Grundlegende Ideen ergibt, ermöglicht eine Untersuchung von Unterrichtsgegenständen auf die ihnen zugrunde liegenden Ideen. Dadurch können Beziehungen zwischen „lokalen Subkonzepten“ und „Metakonzepten“ deutlich werden (Vohns 2007, S. 89). VOHNS Analysen richten sich also auf das, was BRUNER missverständlich mit Struktur eines Lerngegenstandes bezeichnet hat. Der Unterschied in ihren Herangehensweisen liegt darin, dass VOHNS als Basis konkrete Unterrichtsgegenstände wählt und nicht von übergeordneten Ideen ausgeht; also die Richtung invertiert.

Dieses Vorgehen setzt einen (konsensfähigen) Katalog grundlegender Ideen voraus. Als Grundlage nutzt VOHNS Ideenkataloge anderer Autoren (Vohns 2007, S. 89).[23] Er unterscheidet dabei zwei Ebenen Grundlegender Ideen. Auf

[23] Speziell (Heymann 1996), (KMK, 2003), (Schreiber 1979) und (Führer 1997).

einer übergeordneten allgemeineren Ebene wählt er zunächst „Ankerpunkte“, die ihm ein Suchfeld für speziellere Ideen eröffnen (Vohns 2007, S. 90). Diese Ankerpunkte sollen eher mathematische Objekte sein. Auf der zweiten Ebene nennt er dann speziellere Ideen, die nun eher mathematischen Tätigkeiten entsprechen sollen.

- *Ankerpunkte*: Zahl, Messen, Strukturieren in Ebene und Raum, funktionales Denken.
- *Spezielle Ideen*: Optimalität, Symmetrie, Ideation und Abstraktion, Exhaustion und Approximation, Algorithmus, Invarianz, Induktion, Repräsentation.[24]

VOHNS ist die begriffliche Heterogenität seines Katalogs bewusst und er begründet,

> ich [habe] bewusst keine einheitliche Formulierung der Ideen als Begriffe oder Handlungen angestrebt. Eine grundlegende Idee zu sein, beinhaltet für mich stets begriffliche, handlungsmäßige, technisch-methodische und heuristisch-strategische Elemente […]

(Vohns 2007, S. 91)

Zudem ist ihm die Interpretation der Ankerpunkte als Schnittstellen und deren Vernetzung wichtig, damit sie nicht zu oberflächlich als Überschriften von Themengebieten erscheinen (Vohns 2007, S. 92).

VOHNS Überlegungen bzgl. Vernetzungen zwischen Fundamentalen Ideen und deren Nutzung im Bereich von Metakonzepten bilden eine Basis für weitere Überlegungen dieser Arbeit. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Weiterentwicklung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen und bei Überlegungen zu deren unterrichtlichen Umsetzung.

1.4 Zwischenfazit

Die „Definitionen“ Fundamentaler Ideen der drei vorgestellten Autoren ähneln sich trotz verschiedener Akzentuierungen. Dennoch sind die angegebenen Ideenkataloge teilweise völlig unterschiedlich. Dies ist symptomatisch für die Debatte um Fundamentale Ideen. Viele Autoren geben bei gleicher (oder ähnli-

---

[24] VOHNS weist darauf hin, dass keine Ideen genannt werden, die spezifisch für das Gebiet Stochastik wären, da stochastische Themen in seinen Analysebeispielen unberücksichtigt bleiben (Vohns 2007, S. 90 f.).

cher) Theoriebasis ganz unterschiedliche Ideenkataloge an. Gemeinsam ist diesen aber stets, dass der Schwerpunkt auf (innermathematischen) Tätigkeiten und mathematischen Inhalten liegt. In den Arbeiten von SCHREIBER[25] werden (zumindest implizit) durch die Unterteilung der genannten Schemata in Leitideen und Verfahren (und deren Unterteilung in Findungs- und Begriffsbildungsverfahren) auch heuristische Strategien (z. B. Abstraktion) als Fundamentale Ideen genannt. Bei SCHWEIGER finden sich Strategien wie „Ordnen". Auch die von der KMK genannten allgemeinen Kompetenzen und Leitideen lassen sich mit den oben dargestellten Überlegungen zu Fundamentalen Ideen theoretisch begründen.

1.5 Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen

ANSELM LAMBERT weist in (Lambert 2012a) darauf hin, dass es neben den oben dargestellten Ideen noch andere gibt, die für die Mathematik ganz wesentlich sind und bisher kaum Berücksichtigung fanden. Um also Mathematik ganzheitlicher durch eine Theorie Fundamentaler Ideen zu fassen, wird eine Erweiterung des Begriffsverständnisses notwendig. Dazu geht LAMBERT von folgenden Ideenkategorien[26] aus.

- *Inhaltsideen*: Zahl, Maß, Raum und Form, Funktion, Zufall;
- *Schnittstellenideen*: Kommunizieren, Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Darstellen, Fragen;
- *Begriffsideen*: Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierung;
- *Prozessideen*: Strategien, Heuristiken, Handlungen;
- *Tätigkeitsideen*: Approximieren (insbesondere Optimieren), Algorithmisieren, Dualisieren, Vernetzen, Orden, Strukturieren, Formalisieren, Exaktifizieren, Passen[27], Verallgemeinern, Deduzieren;[28]
- *Theorieideen*: Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskulturen, Systeme und Sprache.

[25] Da VOHNS u. a. den Ideenkatalog SCHREIBERS übernimmt, finden sich bei ihm ebenfalls Heuristiken.

[26] Da die von LAMBERT vorgeschlagenen Kategorien zu einer Gliederung des Oberbegriffs „Fundamentale Ideen" beitragen sollen, wird der Bezeichner „Idee" in dieser Arbeit auch – noch – für die Unterkategorien verwendet.

[27] „Passen" umfasst hier (anders als bei BENDER, s. o.) meta-mathematische Aspekte, z. B. das „(An-)passen" eines Axiomensystems an einen Sachverhalt.

[28] Dies sind eher innermathematische Tätigkeiten, die in der Auflistung von mathematisch nach meta-mathematisch geordnet sind.

Weiterhin betont er, dass besonders der Bereich „Nichtkognitiver“ Ziele des Mathematikunterrichts von aktuellen Theorien Fundamentaler Ideen „nur unzureichend erfasst“ wird (Lambert 2012a, S. 4).[29] Auch bei BRUNER finden sich Überlegungen zu „Nichtkognitiven“ Aspekten von Unterricht. Obwohl er sich durchweg mit der Frage nach inhaltlichen Auswahlkriterien befasst, misst er ihnen eine wichtige Rolle in der Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen zu.

> Mastery of the fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but also the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, towards the possibility of solving problems on one's own […] To instill such attitudes by teaching requires something more than the mere presentation of fundamental ideas […] but it would seem that an important ingredient is a sense of excitement about discovery – discovery of regularities of previously unrecognized relations and similarities between ideas, with a resulting sense of selfconfidence in one's abilities.

(Bruner 1960, S. 20)

Um dem Ausblenden „Nichtkognitiver“ Ziele zu begegnen, wird hier eine weitere Ideenkategorie den anderen beigestellt. Die Kategorie der *„Nichtkognitiven“ Ideen*, die Interesse, Bereitschaft und Freude, Werthaltung, Kreativität und Geschmack sowie Motorik[30] umfassen sollte.

Weiter ist darauf hinzuweisen, dass viele der Prozessideen, Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen auch metakognitiv eine Rolle spielen. Diese Eigenschaft der Ideen ist für die später folgende unterrichtspragmatische Reduktion und für die im dritten Teil vorgestellten Beispiele von Bedeutung. So hat das Bewusstmachen von Heuristiken beim problemorientierten Arbeiten im Unterricht metakognitive Auswirkungen. Auf solche wurde in der didaktischen Literatur schon mehrfach hingewiesen.[31] Und die Ideen „Strukturieren“ und „Ordnen“ dienen nicht nur dem Erfassen und Bearbeiten mathematischer Situationen, sondern auch der (bewussten) Steuerung und Organisation eigener Denkprozesse.

---

[29] „Nichtkognitive“ Ziele des Mathematikunterrichts werden auch häufig in bildungspolitischen Debatten ausgeblendet. Diese Problematik wird in (Führer 2009, besonders S. 26 ff.) kritisch diskutiert.

[30] Motorik gehört zu wesentlichen Zielen besonders des Geometrieunterrichts, der unteren Klassenstufen und weiter in nicht-gymnasialen Schulformen, sperrt sich allerdings etwas einer Erfassung in dieser Liste als „Idee“.

[31] Vgl. (Führer 1997, S. 68 ff.).

Dies wird auch hier genutzt: Zusätzlich zur Erweiterung des Begriffsverständnisses scheint (deren unterrichtliche Nutzung im Blick habend) eine stärkere Strukturierung der Ideenkategorien angebracht. Es fällt auf, dass die oben genannten Ideen im Grad ihrer Konkretisierung differieren. Daher ist ihre Aufteilung in eine abstrakt(er)e Ebene und eine konkret(er)e Ebene sinnvoll.

Auf einer abstrakt(er)en Ebene können folgende Ideenkategorien geordnet werden …

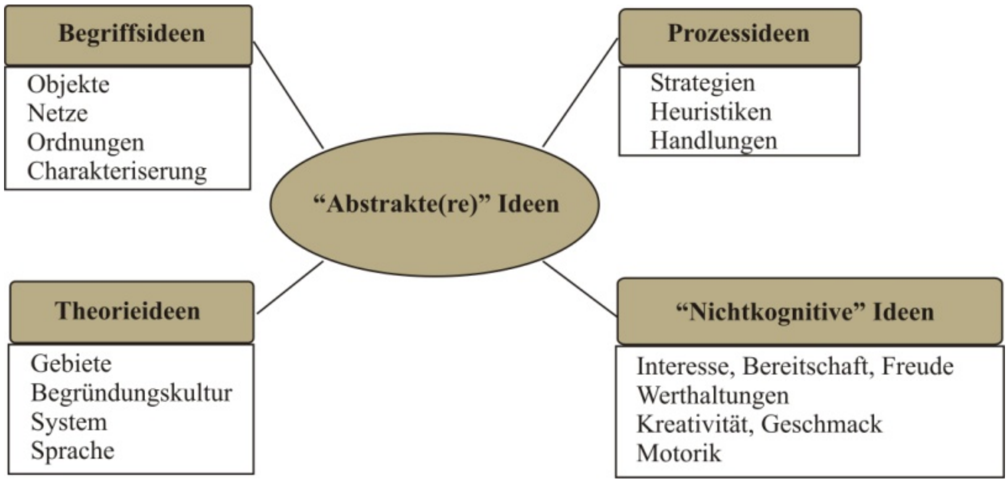

Abb. 4: Abstrakte(re) Ideen

… und auf einer konkret(er)en Ebene diese:

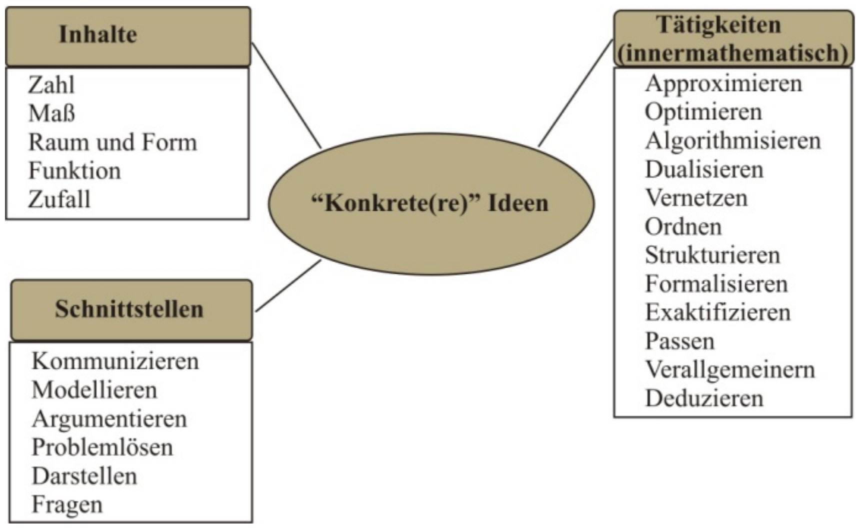

Abb. 5: Konkrete(re) Ideen

Die Auflistung der Ideen zeigt, dass die Ideen der zweiten Ebene nicht immer Konkretisierungen der abstrakten Ideen sind. Auf Entsprechungen bzw. Unterschiede zwischen den Ideen der beiden Ebenen wird bei der später vorgestellten unterrichtspragmatischen Reduktion eingegangen.

Neben den fehlenden Ideenkategorien in einer Theorie Fundamentaler Ideen ist es bis jetzt noch nicht gelungen, das Konzept für die Unterrichtspraxis wirksamer zu machen. Zwar nutzt VOHNS Grundlegende Ideen zur Analyse von Unterrichtsinhalten, gibt aber (bewusst) keine Hinweise, wie mithilfe der Ideen Inhalte für den Unterricht begründet gewonnen und aufbereitet werden können. Der Problematik, eine Brücke zwischen Theorie und Praxis zu bauen, wird im folgenden Kapitel nachgegangen.

2. Vernetzungen im Unterricht durch Fundamentale Ideen

2.1 Brücken-Charakter des Vernetzungsbegriffs

Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, spielen Vernetzungen bei der Theoriebildung für Fundamentale Ideen eine herausragende Rolle. Für die vorgestellten Autoren[32] müssen Fundamentale Ideen verschiedene Aspekte (z. B. verschiedene Inhalte oder historische Entwicklungen der Mathematik) miteinander verknüpfen können. Auf der Seite der Praxis nehmen Überlegungen zu unterrichtsrelevanten Vernetzungen eine wichtige Stelle in (fach-)didaktischen und bildungstheoretischen Diskussionen ein, ohne dass dabei explizit über Fundamentale Ideen gesprochen wird. Dabei geht es nicht nur um inhaltliche Vernetzungen sondern auch um Vernetzungen im Bereich von Metakognition und Metatätigkeiten (s, o.). Vernetzungen können somit eine Brücke zwischen einer Theorie Fundamentaler Ideen auf der einen Seite und ihrer Nutzung in der Unterrichtspraxis auf der anderen Seite bilden. Daher wird hier von Fundamentalen Ideen gefordert, dass sie möglichst reichhaltige Vernetzungen im Unterricht zulassen, insbesondere zwischen den Knoten

Inhalt, Repräsentation, Tätigkeit, Genese, „Nichtkognitive“ Ziele.

Diese Eigenschaft Fundamentaler Ideen soll „*Vernetzungskriterium*“ heißen und bildet einen Beitrag der vorliegenden Arbeit zu den mathematikdidaktischen Diskussionen über und durch Fundamentale Ideen.

2.2 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie

Ausgehend vom oben aufgezeigten erweiterten und geschärften Begriffsverständnis soll nun gezeigt werden, wie durch eine unterrichtspragmatische Re-

---

[32] Diese Autoren bilden dabei keine Ausnahmen sondern die Regel.

duktion der Theorie Fundamentaler Ideen Einblicke in Vernetzungen im Unterricht ermöglicht werden.

Als Basis dienen die zwei Ebenen Fundamentaler Ideen.

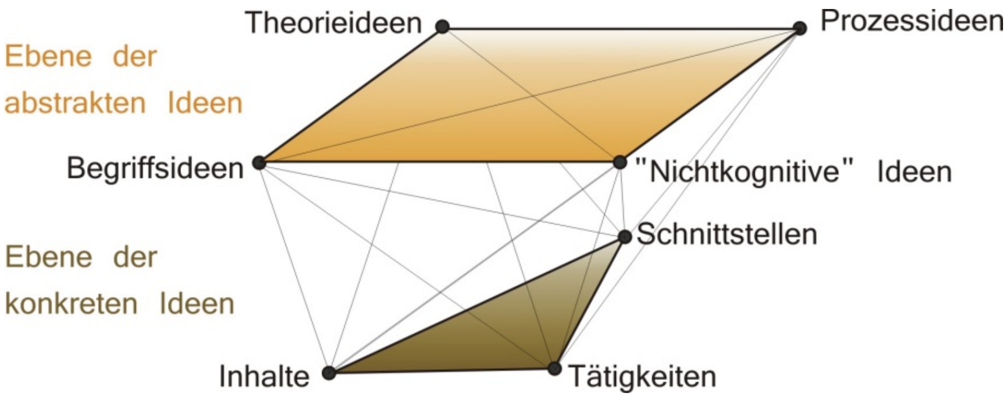

Abb. 6: Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien

Wichtig erscheint hier, dass nicht nur mittels Fundamentaler Ideen vernetzt wird, sondern dass auch die Ideenkategorien untereinander vielfältig vernetzt sind.

Für den Unterricht ist ein solch differenziertes Modell zunächst weniger zweckmäßig. Es bedarf einer Ordnung, Zusammenfassung und teilweise einer Konkretisierung der Ideen. Dies wird durch eine Reduktion der Ideenkategorien auf einen unterrichtspragmatischen Kern erreicht. Dabei ergeben sich neben Konkretisierungen auch Verschiebungen der Ideenkategorien. Die Reduktion ist in der folgenden Abbildung durch Pfeile[33] angedeutet.

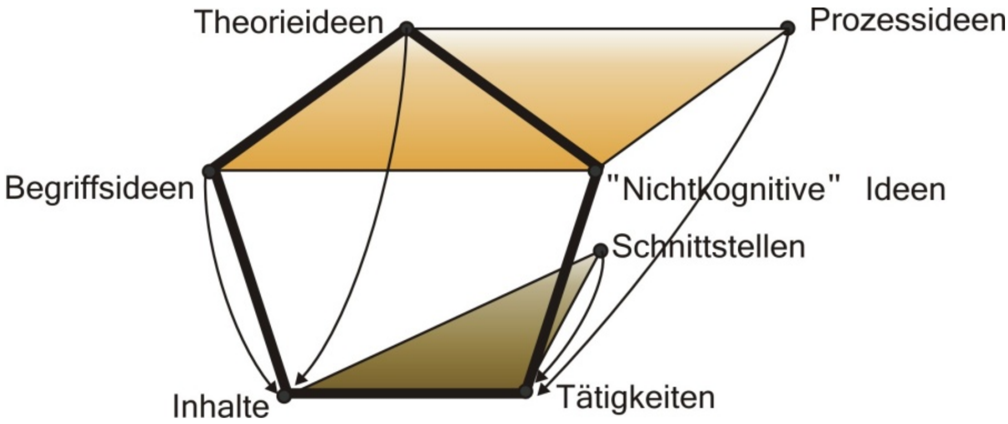

Abb. 7: Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen

[33] Zum Beispiel bedeutet der Pfeil von Theorieideen zu Inhalten, dass sich die Theorieideen im Unterricht in den Inhalten widerspiegeln.

(Selbst-)Tätigkeiten der Schüler[34] spielen im Unterricht eine zentrale Rolle. In ihnen konkretisieren sich obige Prozessideen. Heuristiken und Strategien manifestieren sich im Unterricht beispielsweise als Tätigkeiten wie Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten oder gezieltes Termumformen. Andere Strategien wie Visualisieren spielen nicht nur als Tätigkeiten eine Rolle im Unterricht, sondern können auch zum Knoten der Repräsentationen gezählt werden. Weiterhin sind, ausgehend vom eingenommenen pragmatischen Standpunkt, Schnittstellenideen und die im Modell eher innermathematischen Tätigkeitsideen zusammenzufassen.

Unter dem Oberbegriff „*Inhalte*“ können im Unterricht die mathematischen Gebiete der Theorieideen sowie Objekte und Ordnungen der Begriffsideen gefasst werden. Sie konkretisieren sich in den klassischen Bereichen der Schulmathematik (Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie und Stochastik) und bei deren inhaltlicher Bearbeitung. Ordnungen werden zwar selten im Unterricht explizit behandelt, sie tauchen dennoch als Metatätigkeit (s. o.) und als Ordnungsrelationen auf.[35] Begründungskulturen und Sprachen der Theorieideen sind wieder zweifach bedeutsam. Zum einen gehören Beweise zu den Inhalten der Schulmathematik. Zum anderen sind sie durch unterschiedliche Darstellungsformen für die Repräsentationen im Unterricht wichtig.

Neben, den oben angesprochen Ideen, die sich in den Knoten „*Repräsentationen*“ einordnen lassen, sind hier auch unterschiedliche Darstellungsformen von Objekten und Begriffen enthalten. Neben unterschiedlichen Darstellungen (mit denen hier auch verschiedene Lösungswege gemeint sind) sind ebenfalls verschiedene Aspekte von Begriffsbildung enthalten.[36]

Den historischen Entwicklungen von Theorie- und Begriffsideen, zumindest soweit sie bekannt sind,[37] wird hier mit dem Knoten *„Genese“* Rechnung getra-

---

[34] Im Rahmen dieser Arbeit wird zur besseren Lesbarkeit im Sinne des generischen maskulinum stets nur ein Geschlecht genannt. Die Autorin weist darauf hin, dass an den jeweiligen Stellen stets an beide Geschlechter gedacht wurde.

[35] Als „Anordnungssymbole“ schon in Klasse 5 (MKBW 2003, S. 3).

[36] Zum Beispiel die Unterscheidung zwischen Vorstellung und Darstellungen, zwischen den verschiedenen kognitiven Präferenzen oder den Darstellungsebenen (Stichwort E-I-S). Auf diese Aspekte kann hier nicht näher eingegangen werden, vgl. dazu (Lambert 2003 und Lambert 2012b).

[37] Die mangelnde Darlegung des methodischen Vorgehens beim Forschen veranlasste schon ADOLF DIESTERWEG 1833 zu der Forderung, dass Mathematiker (wie auch von

gen. Zu ihm gehören u. a. Betrachtungen historisch bedingter unterschiedlicher Begründungskulturen und Darstellungen von Objekten.[38] Bleiben historische Entwicklungen im Unterricht unberücksichtigt, kann ein statisches Bild von Mathematik als fertigem Produkt entstehen (vgl. Fischer/Malle 1985; S. 147 ff.). Entwicklungsprozesse, das Ringen um Beweise und auch historische Irrwege bleiben den Schülern verborgen. Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren Genese eingegangen werden.

Als letzter Knoten werden „Nichtkognitive" Ideen als *„Nichtkognitive" Ziele* des Unterrichts beibehalten. Sie werden hier als gleichwertiger Vernetzungsaspekt betont, da sie (besonders) im Mathematikunterricht häufig vernachlässigt werden.

So begründet sich folgender Vernetzungspentagraph:

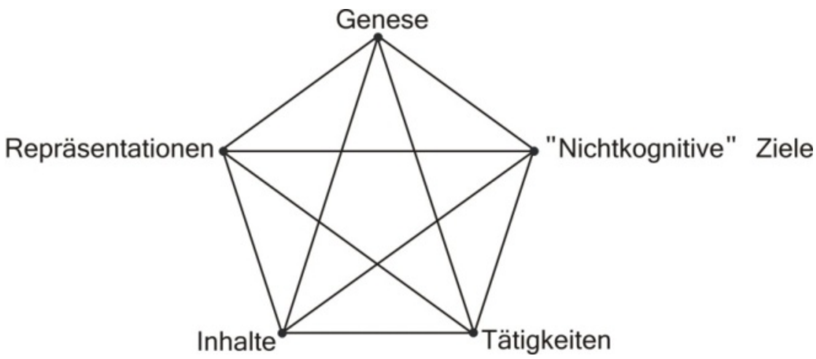

Abb. 8: Vernetzungspentagraph

3. Optimierung in der Geometrie und darüber hinaus

„Optimieren ist fundamental" lautet die Überschrift des Leitartikels von HANS SCHUPP, in dem von ihm herausgegebenen „mathematik lehren"-Themenheft „Optimieren".[39] Hierin belegt er, dass „Optimieren" den von SCHWEIGER (s. o.) genannten Kriterien für Fundamentale Ideen genügt.[40] Dass „Optimierung" auch

---

Schülern verlangt wurde) die „Wege, die sie wandeln, genau bezeichnen." (z. n. von Sallwück 1899; S. 300 f.).

[38] Vgl. dazu auch Abschnitt 3.1 der vorliegenden Arbeit.

[39] (Schupp 1997, S. 4-10).

[40] Ausführlichere Überlegungen zur Fundamentalität von „Optimierung", die u. a. auch einen Vorschlag zur Ausgestaltung einer Leitlinie „Optimieren" enthalten, finden sich in (Schupp 1992). Auch hier wird der Kriterienkatalog von SCHWEIGER genutzt, denn „Schupp selbst hat sich nicht eigentlich um die Konzeption fundamentaler Ideen bemüht,

obiges Vernetzungskriterium erfüllt, wird nun an verschiedenen Optimierungsaufgaben illustriert. Alle Aufgaben sind mit Methoden der Schulmathematik zu lösen. Allerdings wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine ausführliche Lösung verzichtet und auf entsprechende Literatur verwiesen. Die vier Aufgaben sind aus verschiedenen Bereichen der Mathematik gewählt, um die Reichhaltigkeit von Optimierungskontexten anzudeuten.

3.1 Isoperimetrische Probleme in der Ebene

Isoperimetrische Probleme gehören zu den berühmtesten Problemen der Mathematik, ihr Ursprung geht wahrscheinlich mehrere Tausend Jahre zurück. Das Potenzial dieser Aufgaben liegt vor allem in ihren vielfältigen Lösungsmöglichkeiten. So ist das isoperimetrische Problem für Rechtecke „Welches unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat maximalen Flächeninhalt?“ schon über einen direkten Vergleich verschiedener Konkurrenten Schülern der 5. Klasse zugänglich.[41] Die Aufgabe kann aber auch geometrisch (durch einen Flächenvergleich) oder algebraisch-funktional (mithilfe einer Mittelwertungleichung oder durch Interpretation des Funktionsgraphen oder durch Infinitesimalrechnung) gelöst werden.[42]

Vernetzungsmöglichkeiten auf inhaltlicher Ebene

Obige (knappe) Aufzählung verschiedener Lösungsmöglichkeiten zeigt, dass die klassischen Gebiete der Schulmathematik Arithmetik und Algebra, Geometrie und Analysis (ohne und mit Infinitesimalrechnung) durch die Aufgabe vernetzt werden. Lediglich stochastische Inhalte bleiben hier unberücksichtigt. Sowohl bei den geometrischen als auch bei den algebraisch-funktionalen Lösungen ist der Einsatz eines DGS hilfreich, wodurch die Thematisierung diskreter mathematischer Inhalte ermöglicht wird. Dies scheint besonders wichtig, da trotz ihrer enormen Bedeutung für aktuelle mathematische Forschung, Diskrete Mathematik bisher noch keinen Einzug in die Schulmathematik gefunden hat. Das isoperimetrische Problem für Rechtecke eignet sich auch gut, um zu erläutern, wie diskrete Fragestellungen und im Speziellen Inhalte aus dem Bereich der Nume-

---

als vielmehr Überlegungen zum Optimieren vorgelegt, die eine der wenigen Ausarbeitungen einer einzelnen ausgewählten fundamentalen Idee darstellt“ (Vohns 2000, S. 17).

[41] Vgl. (Lambacher Schweizer 2004, S. 195; Nr. 4) Aufgabenteil b) untersucht sogar die duale Aussage.

[42] (Schupp 1992, S. 1-5).

rik in natürlicher Weise bei seiner Bearbeitung auftreten können. Eine Möglichkeit dazu ergibt sich aus folgender Konstruktion:

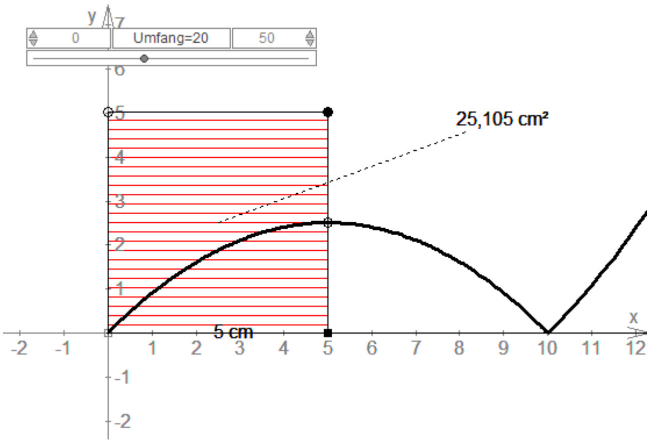

Abb. 9: Konstruktion zum isoperimetrischen Problem für Rechtecke (erstellt mit Euklid Dynageo)

Für die Grafik sollte unter allen Rechtecken mit Umfang 20 cm jenes mit maximalem Flächeninhalt gefunden werden. Das gesuchte Objekt ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm. Allerdings liefert obige Konstruktion im Maximalpunkt einen Flächeninhalt von 25,105cm^2. Hier sollte mit den Schülern der Grund für diese scheinbare Ungenauigkeit des Programms diskutiert werden.[43]

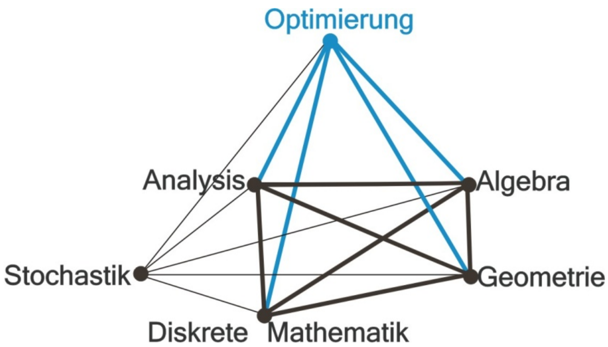

Abb. 10: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene durch das isoperimetrische Problem für Rechtecke

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Das Vernetzungspotenzial dieser Aufgabe geht über die Inhaltsvernetzungen hinaus. Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten fordern unterschiedliche Dar-

[43] Entscheidend für den „Fehler“ ist, dass die gezeichnete Ortslinie kein kontinuierliches, sondern ein diskretes Objekt ist. Die Darstellung der Ortslinie als Kurve suggeriert das unendlich viele Rechtecke verglichen werden, obwohl dies nur für endlich viele Kandidaten geschieht. Streng genommen ist diese Lösungsmethode nur eine ausführlichere Variante des direkten Flächenvergleichs, wie er sich im oben zitierten Schulbuch befindet.

stellungen. Die Reichhaltigkeit isoperimetrischer Probleme kann sich im Unterricht daher durch die Bearbeitung verschiedener Repräsentationen des Problems und seiner Lösung zeigen. Auf der anderen Seite ermöglichen verschiedene Repräsentationen des Inhalts vielfältige (Selbst-)Tätigkeiten der Schüler. Beispielsweise verlangt die Aufgabe von den Schülern, gerade weil sie unterschiedliche Repräsentationen zulässt, eine sachgerechte Modellierung, die Kommunikation und Argumentation erfordert.[44] Nachdem ein geeignetes Modell gewählt wurde, müssen die Schüler innermathematisch arbeiten. Tätigkeitsideen wie Approximieren (einerseits als Optimieren, andererseits als numerisches Nähern), Formalisieren und Dualisieren (vgl. Fn. 41) spielen hier eine Rolle. Die Reichhaltigkeit der Tätigkeiten kann hier nur angedeutet werden, da die auszuführenden Tätigkeiten maßgeblich vom Einsatz der Aufgabe im Unterricht abhängen.[45] Durch unterschiedliche Darstellungen (oder durch die Tätigkeit des Darstellens) kann eine Vernetzung von Inhalten nicht nur explizit, sondern auch auf einer Metaebene.

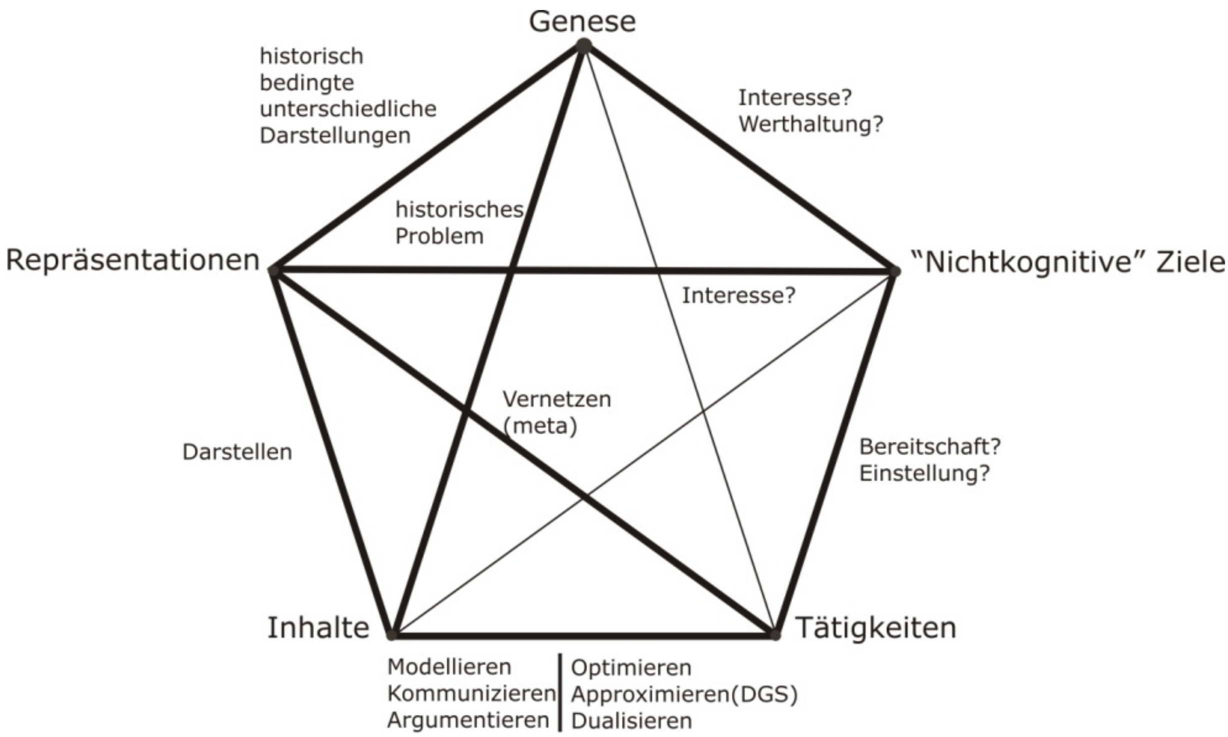

Abb. 11: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung des isoperimetrischen Problems für Rechtecke

---

[44] Das Modell sollte von den Schülern, mit den ihnen zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln, ausgehandelt werden.

[45] Denkbar wäre auch eine Öffnung der Aufgabe durch Verallgemeinerung, die zur Frage führt, welches unter allen Umfangsgleichen n-Ecken maximalen Flächeninhalt hat.

Vernetzungen zur Genese der Mathematik sind zweifach möglich. Einmal über die Thematisierung von historisch bedingt unterschiedlichen Darstellungen und zum anderen über die historische Einbettung des Probleminhalts. Das Einbeziehen der Genese in den Unterricht ist an dieser Stelle besonders sinnvoll, da das klassische isoperimetrische Problem schon in der Antike bekannt war, aber bis ins 19. Jahrhundert kein Existenzbeweis für den Kreis als dessen Lösung existierte.[46] Neben möglichen motivationalen Aspekten durch einen hohen Selbsttätigkeitsanteil beim Bearbeiten der Aufgabe stellt der Bezug zur Genese eine Chance dar, Interesse der Schüler an Mathematik zu fördern und damit „Nicht-kognitive" Ziele von Unterricht zu erreichen. Ihre Erreichbarkeit hängt vom individuellen Umgang des Lehrers und seiner Schüler mit dieser Aufgabe im Unterricht ab.

3.2 Isoperimetrische Probleme im Raum

Optimierung zeichnet sich u. a. dadurch aus, dass es unkompliziert in bestehende Unterrichtsinhalte eingebettet werden kann. Dies soll an einer Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards demonstriert werden, die zunächst keinem Optimierungskontext hat. Es handelt sich um die Riesenfass-Aufgabe, bei der den Schülern ein Bild gegeben wird, auf dem einige Männer zu sehen sind, die ein übergroßes Fass rollen. Gefragt ist nach dem Volumen des Fasses.[47]

Abb. 12: Foto zur Riesenfass-Aufgabe aus (KMK 2004, S. 16)

---

[46] Erst durch die Interpretation des Problems als Variationsproblem und der damit verbundenen Einsicht, dass Variationsprobleme im Allgemeinen keine Lösung haben müssen, konnte WEIERSTRAß einen vollständigen Beweis angeben. Für einen historischen Abriss des klassischen isoperimetrischen Problems und einem Beweis der Optimalität des Kreises siehe (Näher 2006, S. 5 ff. und S. 16 ff.).

[47] Eine kritische Diskussion der Aufgabe und ihrer Musterlösung findet sich in (Führer 2005).

Durch Aufgabenvariation im Sinne von SCHUPP[48] (hier Anwendung des Extremalprinzips) entsteht ein räumliches isoperimetrisches Problem. Die Fragestellung lautet nun: Welches unter allen oberflächengleichen Fässern hat maximales Volumen? Dazu muss zunächst „Fass“ mathematisch modelliert werden. Der neue Optimierungskontext der Aufgabe kann durch kulturhistorische Einbettung zur Keplerschen Fassregel leiten. So wird aus der KMK-Aufgabe, die zur Vernetzung von Inhalten und Tätigkeiten gedacht war, ein Problem, das ebenso reichhaltig vernetzt, wie das isoperimetrische Problem für Rechtecke.[49]

3.3 Kürzeste-Wege-Probleme

Nachdem zwei Optimierungsprobleme dargestellt wurden, die klassischen Inhalten der Schulmathematik entstammen, soll nun eine Aufgabe der Kombinatorischen Optimierung vorgestellt werden.[50] Speziell handelt es sich dabei um ein (zunächst einfach klingendes) Problem der Graphentheorie: Welcher ist der kürzeste Weg von einem Ort A zu einem anderen Ort B? In (Lutz-Westphal 2006) ist diese Aufgabe anhand eines Berliner U-Bahn-Plans mit Schülern verschiedener Klassenstufen im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Kombinatorischen Optimierung behandelt worden. Neben der Frage, wie man einen solchen Weg findet, wurde dabei sehr ausführlich diskutiert, was denn überhaupt ein kürzester Weg sein soll. Es kommen mehrere Modelle in Betracht: der zeitlich schnellste Weg, der Weg, der am wenigsten U-Bahnstationen durchläuft, der Weg auf dem die Züge erfahrungsgemäß (was bedeutet das überhaupt?) die geringste Verspätung haben usw.

Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Auch dieser Problemtyp bietet durch seine reichhaltigen Lösungsmöglichkeiten eine Vielzahl von inhaltlichen Vernetzungsmöglichkeiten. Ist ein Modell für den kürzesten (den optimalen) Weg erarbeitet (s. o.), ist eine Lösungsmethode das Abzählen aller möglichen Wege und ihr Vergleich. Allerdings ist ein solches Vorgehen für einen komplexen U-Bahn-Plan sehr mühsam oder (ohne Compu-

---

[48] Vgl. (Schupp 2003).

[49] Die Vernetzungspentagraphen sind daher auch im Wesentlichen identisch.

[50] Wie oben schon erwähnt, haben Inhalte der Diskreten Mathematik (zu der auch die Kombinatorische Optimierung gehört) noch keinen festen Platz in Lehrplänen. Eine Ausnahme bildet das Bundesland Berlin. Hier gehören ausgewählte Inhalte der Graphentheorie zum Wahlbereich (SBJS 2006, S. 58-59). In Hamburg wurden Inhalte der Graphentheorie nach einer kurzweiligen Aufnahme als Wahlpflichtbereich 2004 schon wieder aus den Rahmenlehrplänen entfernt (BBS 2007, S. 13).

ter) gar unmöglich. Dieses zunächst arithmetisch-algebraische Verfahren birgt aber bereits eine Hauptschwierigkeit der Aufgabe in sich. In einem komplexen U-Bahn-Netz dauert das Abzählen aller möglichen Wege selbst mit Computerunterstützung sehr lange (Stichwort: kombinatorische Explosion). Um an dieser Stelle effizientere Methoden zu finden, sollte im Unterricht ein Exkurs über Graphen eingebaut werden, in dem die Schüler einige grundlegende Eigenschaften von Graphen kennenlernen.[51] Mit diesem Wissen lässt sich der U-Bahn-Plan zu einem Graphen abstrahieren und kann auf diese Weise als diskretes geometrisches Objekt interpretiert werden. Auf seinen mathematischen Kern reduziert, wird der Graph weiter untersucht, bis eine formale Vorschrift zum Finden eines kürzesten Weges gefunden ist. Formal bedeutet hier nicht die Angabe eines ausformulierten Quellcodes in einer Programmiersprache, sondern kann auch eine (noch alltagssprachliche) Schritt-für-Schritt-Anleitung sein. Wichtig ist, dass sie allgemeingültig formuliert ist und jeden Schritt berücksichtigt. Dies stellt für viele Schüler eine schwierige Aufgabe dar, ermöglich aber (fast schon nebenbei) Einblicke in die Arbeits- und Funktionsweise von Computern. Interessieren bei der Streckenplanung nicht nur die einzelnen U-Bahn-Stationen, sondern vielleicht auch häufige Verspätungszeiten oder persönliche Präferenzen (manche planen einen längeren Fußweg[52] an der frischen Luft zu einzelnen Stationen, anderen geht die Bequemlichkeit vor und sie fahren soviel Bahn wie möglich), so ergeben sich im Unterricht inhaltliche Bezugspunkte zur Stochastik. In diesen Fällen müssen Daten gesammelt und ausgewertet werden und auch der Zufall sollte Berücksichtigung finden.

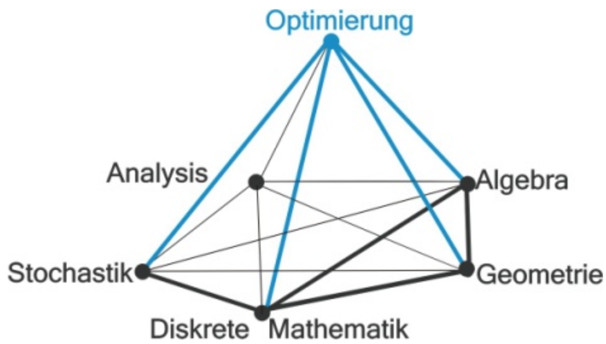

Abb. 13: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

[51] Viele wichtige Fachbegriffe der Graphentheorie sind Schülern aus der Alltagssprache bekannt und mittlerweile gibt es didaktisch aufbereitete Materialien für einen Exkurs in die Graphentheorie (z. B. Lutz-Westphal 2005).

[52] Dazu kann zusätzlich zum U-Bahn-Plan ein Stadtplan betrachtet und analysiert werden.

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Kürzeste-Wege-Probleme lassen ebenfalls Vernetzungen über die Inhalte hinaus zu. Ähnlich wie bei den oben vorgestellten isoperimetrischen Problemen, sind auch hier verschiedene Repräsentationen denkbar (U-Bahn-Plan, Graph, Schritt-für-Schritt-Anleitung, Quellcode). Der offene experimentelle Zugang, der sich bei dieser Aufgabe anbietet, verlangt den Schülern ein hohes Maß an (Selbst-)Tätigkeit ab. Sie müssen eine komplexe reale Situation modellieren[53] und zu deren Lösung kreativ forschend vorgehen. Bei der Arbeit innerhalb des Modells stehen mathematische Tätigkeiten wie Algorithmisieren und Formalisieren im Vordergrund. Beim Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen des Problems und seiner Lösung können diese, wie bei den isoperimetrischen Problemen, vom Schüler auf einer Metaebene vernetzt werden. Weiter fordern sie die Schüler zur zweifachen Strukturierung auf. Zum einen wird, z. B. durch die Darstellung des Netzplans als Graph, die reale Situation strukturiert. Zum anderen dienen sie wiederum, damit die Schüler sie sinnvoll einsetzen können, einer Meta-Strukturierung. Das bedeutet, im Idealfall tragen die Kenntnis verschiedener Darstellungsformen und deren Nutzen zur Strukturierung des eigenen Denkens bei. Bezüge zur Genese der Mathematik ergeben sich hier vor allem über die relative Neuzeitlichkeit und Aktualität des Problems.[54] Häufig überraschen die vielen offenen Forschungsfragen der Graphentheorie die Schüler. So ist beispielsweise obiges Kürzeste-Wege-Problem durch den Dijkstra-Algorithmus effizient lösbar[55]. Doch schon das Finden einer kürzesten Rundreise (Problem des Handelsreisenden) innerhalb des Netzplans ist meist selbst mit Computereinsatz nicht effizient möglich. Eine solche Erweiterung des ursprünglichen Problems führt zur berühmten P-NP-Problematik. Vereinfach gesprochen geht es dabei darum, ob für die heute noch nicht effizient lösbaren Probleme eine effiziente Lösung existiert, die nur noch nicht entdeckt wurde oder ob tatsächlich keine existiert. Die Beantwortung dieser Frage ist von so großer Bedeutung

---

[53] Es sei nochmals daran erinnert, dass damit nicht nur die Auswahl eines Modells für den U-Bahn-Plan gemeint ist, sondern schon vorher ein Modell für den kürzesten Weg ausgehandelt werden muss.

[54] Zwar bildet LEONARD EULERS Beweis der Nichtexistenz eines Rundwegs über alle Brücken in Königsberg von 1736 den Anfang graphentheoretischer Überlegungen. Dennoch konnte sich die moderne Graphentheorie erst parallel zur Entwicklung leistungsfähigerer Computer ab der Mitte des 20. Jahrhunderts durchsetzen.

[55] „Effizient lösbar“ bedeutet in diesem Kontext, dass ein Lösungsalgorithmus in polynomieller Zeit abläuft.

für die moderne Mathematik (und Informatik), dass das Clay Mathematics Insituts of Cambrigde Massachusetts (CMI) es zu seinen sieben Millennium-Problemen zählt und dessen Lösung mit einer Million Dollar dotiert (CMI 2006).[56] Diese Überlegungen bieten einen Ansatzpunkt zum Erreichen „Nicht-kognitiver“ Ziele von Unterricht. Neben der Einbeziehung der Lebenswelt der Schüler bei der Behandlung von Kürzeste-Wege-Problemen (z. B. indem ein Netzplan gewählt wird, auf dem die Schüler ihre tägliche Route von ihrem Wohnort zur Schule planen können), kann mithilfe von Exkursen zur Historie oder verwandten Inhalten das Interesse der Schüler am Stoff geweckt werden. Eventuell entsteht dadurch Bereitschaft, sich weiterhin mit der Thematik zu beschäftigen und eine positive Einstellung zum Fach kann gefördert werden.

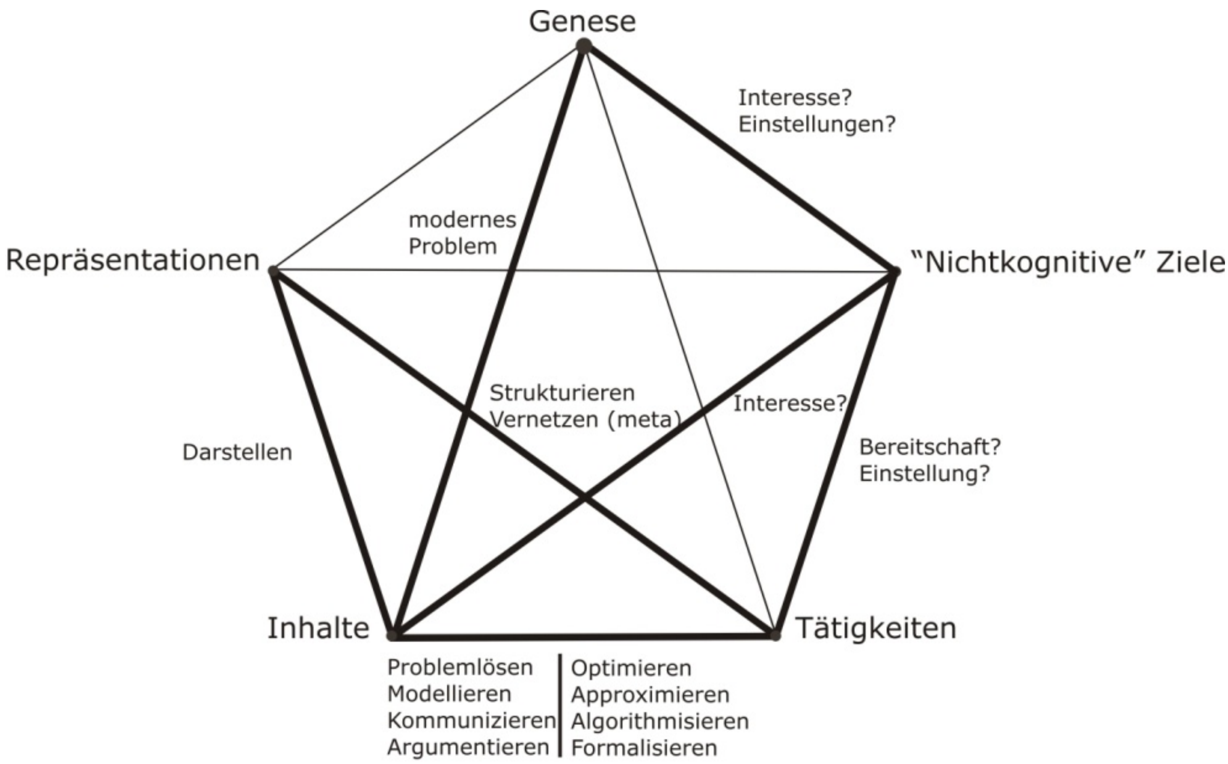

Abb. 14: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung von Kürzeste-Wege-Problemen

[56] Auch hier ist eine historische Einbettung möglich. Die Millennium-Probleme sind an einen Vortrag von DAVID HILBERT am 8. August 1900 angelehnt, in dem er 23 bis dahin ungelöste mathematische Probleme vorstellte. Die meisten damaligen Probleme gelten heute als (zumindest teilweise) gelöst. Die Riemannsche Vermutung gehört aber zum Beispiel nach wie vor zu den offenen Problemen und befindet sich ebenfalls auf der Liste des CMI.

3.4 Das Crap-Spiel

Das letzte Beispiel, das sogenannte Crap-Spiel, entstammt der Stochastik. Es handelt sich um ein Würfelglücksspiel, welches besonders in den USA in Kasinos weit verbreitet ist. Die Spielregeln lauten:

Zwei Würfel werden geworfen und deren Augensumme S' gebildet. Ist diese Summe
a) 7 oder 11, so hat man sofort gewonnen,
b) 2 oder 3 oder 12, so hat man sofort verloren.

In allen anderen Fällen wird erneut gewürfelt und wieder die Augensumme der beiden Würfel gebildet. Diese soll nun S heißen. Ist die Summe S
a) 7, so hat man verloren,
b) gleich der Augenzahl des 1.Wurfes, also S=S', so hat man gewonnen.

In allen anderen Fällen wird wieder weiter gespielt.

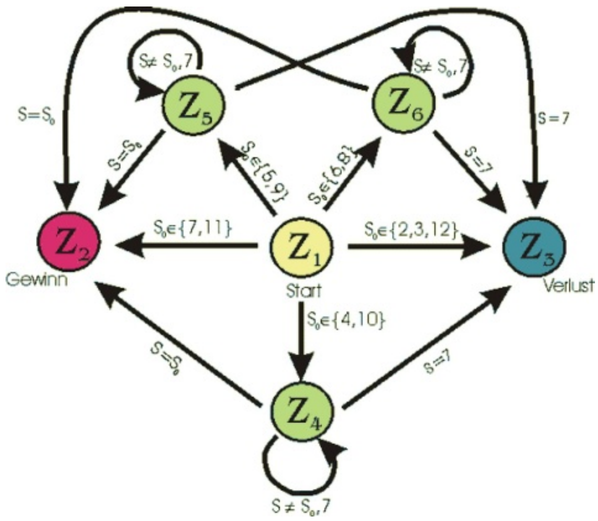

Abb. 15: Spielregeln (nach Lehmann 2005) bzw. Spielgraph[57] (Hischer/Lambert 2007) von Crap

Beim üblichen Einsatz der Aufgabe im Unterricht sollen die Schüler entscheiden, ob das Spiel fair ist (Initialaufgabe). Die Antwort vorweg: Das Spiel ist nicht fair. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Spieler liegt bei ca 49,2929 % und die des Kasinos damit bei 50,7171 %. Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit liegen überraschend nah zusammen. Diese Feststellung bietet einen Ansatzpunkt für die Einbettung in einen Optimierungskontext. Durch die Untersuchung weiterer Kasinoglücksspiele (beispielsweise Roulette mit einfacher Chance) erfahren die Schüler, dass ihre Feststellung kein Zufall ist. Die meisten Glücksspiele des Kasinobereichs sind so ausgelegt, dass sich Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit des Spielers nur minimal zum Vorteil der Kasinos unterscheiden. Dass damit dem Spieler Chancengleichheit suggeriert werden soll, liegt auf der Hand. Anders als bei klassischen Optimierungsaufgaben gilt es hier nicht Chancengleichheit zu erreichen (als Optimalpunkt), sondern Ziel ist die Konstruktion eines Spiels, dessen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit nur minimal von 50 % abweichen. So wird ein optimaler Ausgleich zwischen Ani-

---

[57] Das Aufstellen des Spielgraph erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden modellierend die Spielregeln graphisch dargestellt, die dann anschließend durch Wahrscheinlichkeiten mathematisiert werden.

mation des Spielers und Gewinn des Kasinos gefunden. Als mögliche Erweiterung der Initialaufgabe könnten die Schüler aufgefordert werden diese neue Typ Optimierungsaufgaben zu bearbeiten, indem sie ein Spiel entwickeln, bei dem Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit möglichst nah bei 50 % liegen.

Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Auf die inhaltlichen Vernetzungen beim Lösen dieser Aufgabe wird in (Lehmann 2005) sehr ausführlich eingegangen.[58] Es werden Vernetzungen zwischen stochastischen Inhalten, Linearer Algebra (Lösung durch Potenzieren von Übergangsmatrizen) und Analysis (Lösung durch unendliche Reihen) vorgestellt. Darüberhinaus soll hier auf Vernetzungen durch diskrete und geometrische Aspekte der Aufgabe hingewiesen werden. Beispielsweise lässt sich schon der oben dargestellte Spielplan als Graph (Knoten sind die verschiedenen Zustände des Spiels und Kanten stellen die Übergänge zwischen den Zuständen dar) auffassen. Somit kann er als diskretes geometrisches Objekt verstanden werden. Die Untersuchung des Crap-Spiels ermöglicht daher die Integration aller oben vorgeschlagenen mathematischen Gebiete.

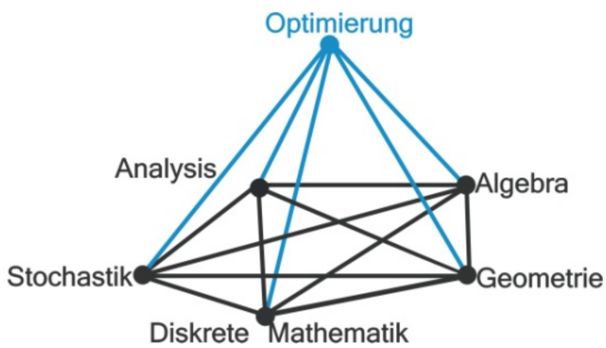

Abb. 16: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Neben inhaltlichen Vernetzungen sind auch solche zu verschiedenen Repräsentationsformen und (Selbst-)Tätigkeiten der Schüler beim Bearbeiten der Initialaufgabe in (Lehmann 2005) dargestellt. Sie finden sich im Vernetzungspentagraphen (s. u.). Die Arbeit an der Optimierungsaufgabe verlangt von den Schülern, dass über das Ergebnis der Initialaufgabe hinaus Nachforschungen (Fragen, Kommunizieren) angestellt werden. Das Konstruieren eines eigenen Glücksspiels erfordert ein hohes Maß an Kreativität. Im Zusammenspiel der Inhalte, Repräsentationen und Tätigkeiten also eine sehr anspruchsvolle Weiter-

[58] Dort finden sich auch verschiedene Modelle für Simulationen des Spiels.

entwicklung der Initialaufgabe. Dafür bietet diese Thematik weitere Vernetzungen zur Genese der Mathematik und zu „Nichtkognitiven“ Zielen des Unterrichts. Die Tradition von Glücksspielen zu Unterhaltungszwecken reicht bis in die Antike, ihre mathematische Analyse einige Hundert Jahre zurück. Durch massenmediale Vermarktung (zum Beispiel TV Total Pokernacht[59] oder pokerstars.de[60]) und häufige Berichterstattung über Glücksspielsucht ist das Thema zudem hochaktuell. Über diese Bezüge kann Interesse und damit Bereitschaft der Schüler geweckt werden, sich intensiver mit der Glücksspielthematik auseinanderzusetzen. Der sich anbietetende experimentelle Zugang im Unterricht kann ebenso Interesse und Einstellungen der Schüler positiv beeinflussen. Glücksspiele selbst zu spielen hilft nicht nur den Erfahrungsschatz im Bezug auf wahrscheinlichkeitstheoretische Phänomene zu erweitern,[61] sondern ermöglicht auch einen Einblick in die Gefahren der Glücksspielsucht. Faszination und Nervenkitzel beim Spielen, aber auch wie schwer es sein kann, sich vom Spiel wieder zu lösen, können hier verantwortungsvoll im geschützten Rahmen erfahren werden. Dadurch ergeben sich fächerübergreifende Bezüge zur Psychologie (Warum sind Glücksspiele überhaupt so spannend für den Menschen und wie nutzen Kasinos diesen Sachverhalt?) und zur Sozialkunde (Frage nach der Verantwortung der Gesellschaft; Verbot von Glücksspielen; Jugendschutz bei online Glücksspielen[62]). Zum abschließenden Überblick dient erneut der Vernetzungspentagraph.

---

[59] http://www.pokerstars.de/tvtotal/ Abruf am 05.12.12.

[60] http://www.pokerstars.de Abruf am 05.12.12.

[61] Im Sinne von (Wolny 2008): Erfahrungen sammeln, darstellen, austauschen, systematisieren und erklären.

[62] Auf die Gefahren für Jugendliche beim Online Poker weist die Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung besonders hin (vgl. BZgA 2012). Problematisch ist dabei die Einhaltung des Jugendschutzes zu sehen, da bei der Anmeldung bei vielen Online Poker Portalen (so auch beim oben genannten pokerstars.de) die vom Nutzer angegebenen Daten (z. B. ob der Nutzer volljährig ist) nicht vom Betreiber des Portals geprüft werden. Es genügt meist ein Internetzugang und eine gültige Email-Adresse, um dort online zu spielen.

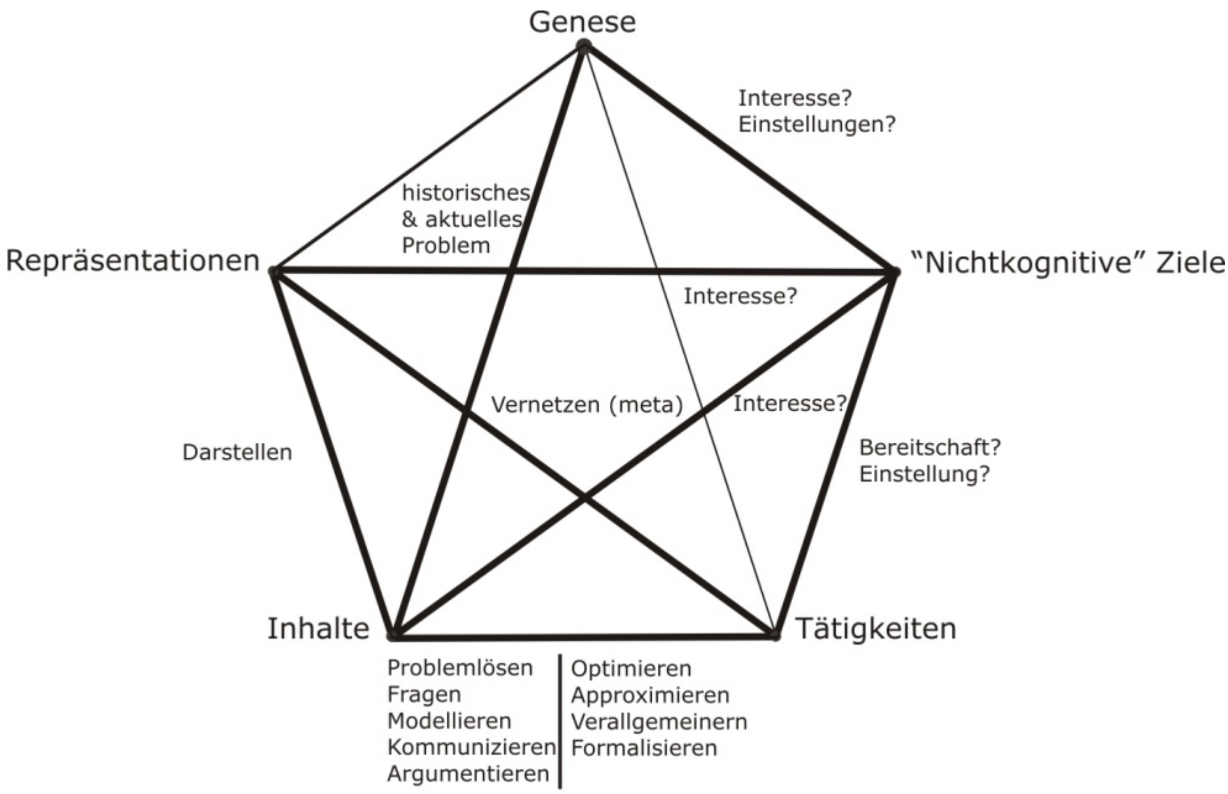

Abb. 17: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung des Crap-Spiels und seiner Erweiterung zum Optimierungsproblem

4. Zusammenfassung und Fazit

Ausgehend von einer kritischen Darstellung exemplarischer Forschungspositionen zur Theorie Fundamentaler Ideen, wurde zunächst auf bestehende Auslassungen im Begriffsverständnis hingewiesen, die durch die ursprünglich rein an der Mathematik orientierten aber ohne umfassenderen Unterrichtsbezug gedachten Ideenkataloge zu erklären sind. Diese Lücken bestehen vor allem im Ausblenden von „Nichtkognitiven" Ideen. Durch eine stärkere Strukturierung Fundamentaler Ideen auf zwei Ebenen wurde der Begriff zunächst weiter gefasst, um neben den bisher als fundamental angesehenen Inhalts- und Tätigkeitsideen auch Theorie-, Begriffs-, Prozess- und „Nichtkognitive" Ideen zu fassen.

Die so entstandene Theorie ist allerdings für den unterrichtlichen Einsatz zu komplex. Daher wurde sie mittels unterrichtspragmatischer Reduktion auf obigen Vernetzungspentagraphen überführt. Dessen Nutzung konnte beispielhaft an vier Optimierungsaufgaben demonstriert werden. Alle vier Beispiele belegen, wie Optimierungskontexte in bestehende Unterrichtsinhalte integriert werden können und diese über inhaltliche Aspekte hinaus bereichern, insbesondere Gebiete der Mathematik vernetzen helfen.

Abschließend bleibt zu betonen, dass der vorgestellte Vernetzungspentagraph keine Aussage über einen möglichen Unterrichtsgang macht. Er soll auch nicht als Checkliste dienen, in der alle möglichen Vernetzungen bei der Behandlung einer Aufgabe abgehakt werden können. Die dargestellten Vernetzungen sollen als Anregung verstanden sein, individuell über Potenziale von Aufgaben nachzudenken. Dabei kann der Vernetzungspentagraph helfen, Unterrichtsinhalte zu analysieren und so einen Beitrag leisten, im Unterricht Aspekte, die für Mathematik ganz wesentlich sind, nicht auszublenden.

Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Lutz Führer und Anselm Lambert für ihre konstruktiven Anregungen und Kommentare bei der Entstehung dieser Arbeit.

Literatur

Bender, P., Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie. Wien.

Bruner, J. (1960). The Process of Education. Cambridge Massachusetts.

Bruner, J. (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin.

Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. BIFIE (2012). Kompetenzen und Modelle. https://www.bifie.at/node/49 Abruf vom 07.01.13.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2004). Lehrplan Mathematik für die AHS Oberstufe. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf Abruf vom 07.01.12.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2011). Die kompetenzorientierte Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22076/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf Abruf vom 07.01.13.

Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. BzgA (2012). Online Poker. Wie hoch ist die Gefahr einer Sucht? http://www.spielen-mit-verantwortung.de/gluecksspiele/uebersicht/online-poker/index.php?overview=46 Abruf vom 05.12.12.

Clay Mathematics Institute, Cambridge, Massachusetts (Hg.) (2006). The Millennium Prize Problems. http://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf Abruf vom 20.10.12.

Fischer, R. (1976). Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8, S. 185-192.

Fischer, R., Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim.

Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport. BBS (Hg.) (2007). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan achtstufiges Gymnasium Sekundarstufe I. http://www.hamburg.de/contentblob/2536224/data/mathematik-gy8-sek-i.pdf Abruf vom 20.10.2012.

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts. Göttingen.

Führer, L. (2005). Kleine Revue sozialer Aspekte der Schulgeometrie. In: Der Mathematikunterricht 2/3, S. 70-85.

Führer, L. (2009). Was könnte zeitgemäßer Mathematikunterricht zur naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung beitragen? In: Ludwig, M., Oldenburg, R., Roth, J. (Hg.). Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. Hildesheim, S. 11-52.

Heymann, H.-W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. In: Educational Studies in Mathematics 6, S. 187-205.

Heitele, D. (1976). Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. Dortmund.

Hischer, H. (1998). Fundamentale Ideen und Historische Verankerung dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: mathematica didactica 21, S. 3-21.

Hischer, H. (1994). Neue Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen – Erörterung zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 23. bis 26. September in Wolfenbüttel. Hildesheim, S. 92-97.

Hischer, H. (2012). Grundbegriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Wiesbaden.

Hischer, H., Lambert, A. (Hg.) (2007). Virtuelles Praktikum Taschencomputer. http://hischer.de/uds/lehr/vum/TC/Voyage/Arbeiten/Einsatz/Crap/Crap1.html Abruf vom 20.10.12.

Knöß, P. (1989). Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Kultusministerkonferenz. KMK (2003). Beschluss über die Bildungsstandards für den Mittleren Bildungsabschluss vom 4.12.2003. (http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf) Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2004). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2012). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012.

http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf Abruf vom 26.10.12.

Kuntze, S., Kurz-Milcke, E. (2011). Professionelles Wissen von Lehrkräften zu mathematikbezogenen „großen Ideen". In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 507- 510.

Lambacher Schweizer (2004): Klasse 5, Klett-Verlag, 2. Auflage. Stuttgart.

Lambert, A. (2003). Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik" vom 27. bis 29. September in Soest. Hildesheim, S. 91-104.

Lambert, A. (2004). Bildung und Standards im Mathematikunterricht – oder: Was schon beim alten Lietzmann steht. In: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Neue Medien und Bildungsstandards. Bericht über die 22. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik" vom 17. bis 19. September in Soest. Hildesheim, S. 70-80.

Lambert, A. (2012a). Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-) Unterricht. Eingangsstatements zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes. http://www.uni-saarland.de/fileadmin/user_upload/Einrichtungen/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_f%C3%BCr_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf Abruf vom 06.11.12.

Lambert, A. (2012b). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Vernetzung und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Bericht über die 28. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie" vom 9.-11. September in Marktbreit. Hildesheim, S. 5-32.

Lehmann, E. (2005). Das Crap-Spiel. Lineare Algebra – Stochastik – Analysis. Kurzvortrag auf dem Bundeskongress MNU in Kiel. http://home.snafu.de/mirza/MNU-Kiel-2005-Vortrag-kurz.pdf Abruf vom 20.10.12.

Lietzmann, W. (1925). Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in Preußen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 56, S. 193-207.

Lutz-Westphal, B. (2005). Wie komme ich optimal zum Ziel? Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen. In: mathematik lehren 129, S. 56-61.

Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation. http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf Abruf vom 26.10.12.

Ministerium für Bildung und Kultur. MBK (2012). Lehrplan Mathematik. Gymnasium Klassenstufe 5. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ma_Gym_5_Juni_2012.pdf Abruf vom 20.01.13

Ministerium für Kultur, Bildung und Wissenschaft Saarland. MKBW (Hg.) (2003). Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 5.

http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/MA_5_2011.pdf Abruf vom 26.10.12.

Näher, H. (2006). Existenz isoperimetrischer Gebiete in einer Klasse von unbeschränkten Mengen unter besonderer Berücksichtigung des Paraboloids. Dissertation. http://scidok.sulb.uni-saarland.de/volltexte/2011/3522/pdf/Naeher_Holger.pdf Abruf vom 07.01.13.

Schmidt, S. (1976). Lernziele des affektiven Bereichs im Mathematikunterricht. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 11, S. 548-568.

Schreiber, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 2(3), 165-171.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 6, S. 65-76.

Schupp, H. (1992). Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Mannheim (u. a.).

Schupp, H. (1997). Optimieren ist fundamental. In: mathematik lehren 81, S. 4-10.

Schupp, H. (2003). Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim.

Schweiger, F. (1982). Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 103-111.

Schweiger, F. (1988). Mathematik als Wissenschaft „interessanter Objekte“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 295-298.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13(2/3), S. 199-214.

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In: Maasz, J., Schoeglmann, W. (Hg.). New Mathematical Research and Practice, S. 63-73.

Schweiger, F. (2010). Fundamentale Ideen. Aachen.

Schubert, S., Schwill, A. (2004). Didaktik der Informatik. München.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. http://www.wipsce.org/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf Abruf vom 01.01.13.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin. SBJS (Hg.) (2006). Rahmenlehrpläne für die Sekundarstufe I. Mathematik. http://www.berlin.de/imperia/md/content/sen-bidung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf?start&ts=1150101857&file=sek1_mathematik.pdf Abruf vom 20.10.2012.

Steen, L. A. (1990). Patterm. In: Steen, L. A. (Hg.). On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy, S. 1-10.

Titze, U.-P. (1979). Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie – Aspekte der Curriculumsentwicklung im Mathematikunterricht der SII. In: mathematica didactica 2, S. 137-164.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.-H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1, Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig.

Vohns, A. (2000). Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I, vorgelegt dem Staatlichen Prüfungsamt Dortmund. Siegen (unveröffentlicht).

Vohns, A. (2007). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Norderstedt.

von Sallwück, E. (1899). Adolf Diesterweg. Dastellung seines Lebens und seiner Lehre und Auswahl aus seinen Schriften. 1. Bd. Langensalza.

Vollrath, H. J. (1978). Rettet die Ideen! In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 31, S. 449-455.

Vollrath, H. J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg.

Whitehead, A. N. (1913). Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts. Deutsche Übersetzung von Alexander Wittenberg. In : Neue Sammlung (2) 1962, S. 257-266.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der GDM 61. http://www-math.uni-paderborn.de/~martine/Veranstaltungen/WS0607/muundallgemeinbildung.pdf Abruf vom 05.11.12.

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematiunterrichts. 6., neu bearb. Auflage. Braunschweig (u. a.).

Wolny, D. (2008). Glück oder Strategie? Die Entwicklung von Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Spiels „Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!“. In: mathematik lehren 43, S. 44-46.