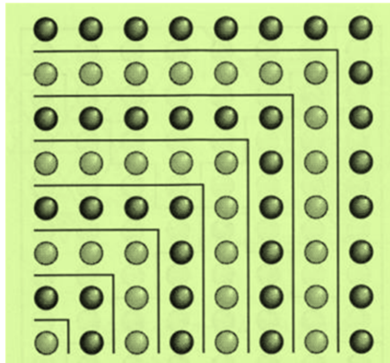
Figurierungen - konstruktiv-geometrische Argumente nicht nur in der Arithmetik

Bekanntlich schlagen **Figurierungen** eine fruchtbare **Brücke zwischen formal-algebraischen und konstruktiv-geometrischen symbolischen Darstellungen** beim Begründen in der **Arithmetik**, etwa dabei, zu sehen, dass die Summe der n ersten ungeraden Zahlen stets eine Quadratzahl ist - oder etwas aufwändiger, dass die Differenz der Quadrate zweier Dreieckzahlen stets eine Kubikzahl ist, ebenso wie die Summe zentrierter Sechseckzahlen …



Weniger verbreitet, obwohl eigentlich naheliegend, ist es, Figurierungen in der **Stochastik** zu nutzen, etwa bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten von Würfelereignissen, die als Figurierungen im Wahrscheinlichkeitsraum identifiziert werden können.

Was Sie im Vortrag erwartet:

- Ein wichtiges historisches Vorbild: Michael Stifel
- Figurierung
  - diskret oder kontinuierlich
  - als Idee, Prozess und Produkt
- Darstellungsvielfalt
  - Zeichen und Symbole: konstruktiv-geometrisch, verbal-begrifflich und formal-algebraisch
  - Darstellungsebenen: enaktiv-ikonisch-symbolisch
- Neu?: Figurierung in der Stochastik
  - … in der Kombinatorik
  - … in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein wichtiges historisches Vorbild: Michael Stifel

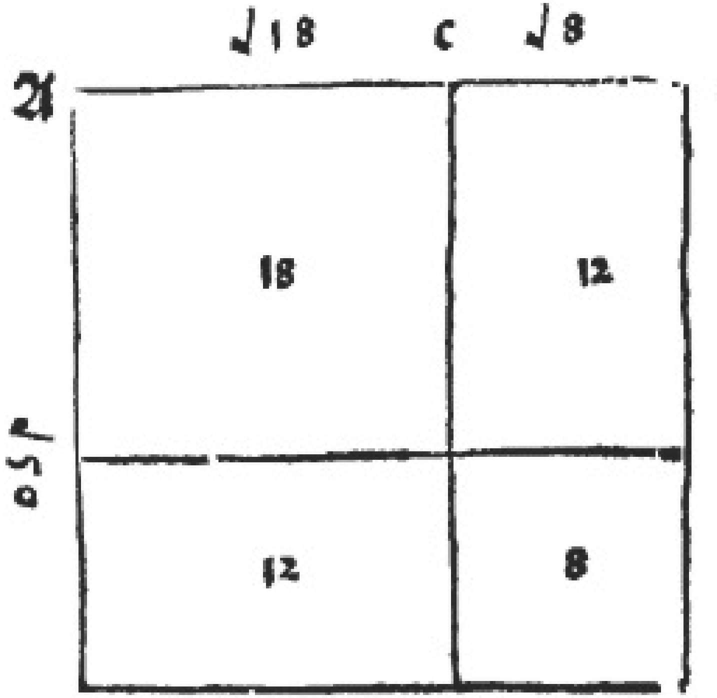
I Konstruktiv-geometrische Argumentationen über Rechteckflächen

Binomische Worte
und Bilder
statt binomische Formeln ☺

Stifel 1553

Es lautet aber die gemeldete propoſition alſo. Weñ ein lini geteylet wirt in zwen teyl/ſo macht das quadrat der gantzen linien/ ſo vil / als yedes teyls quadrat in ſonderheyt / ſampt dem das da kompt auß einem teyl in den andern/zwey mal.

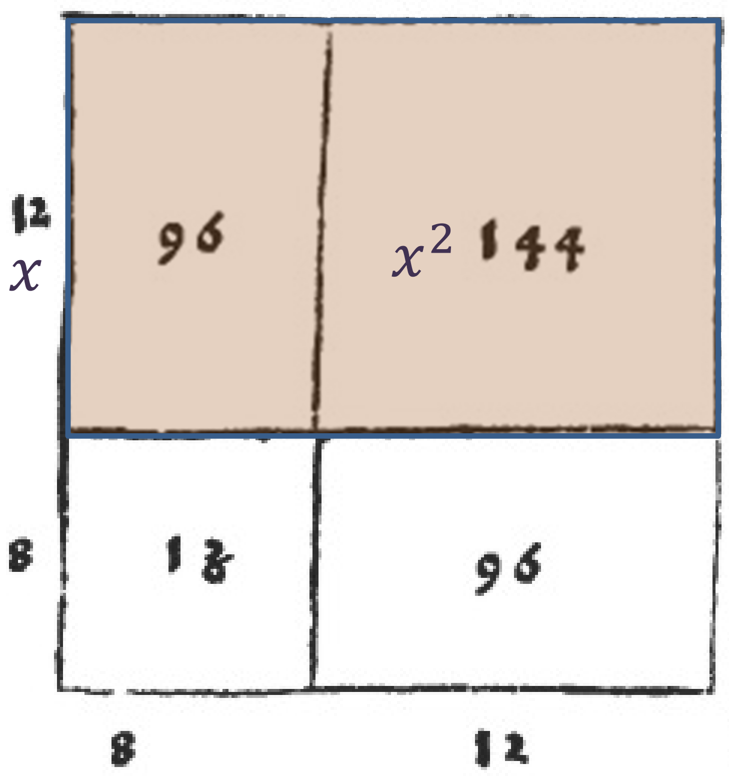
Als die lini ſey A B vnd ſey geteylet in A c vnd c B. ſo iſt leychtlich zu ſehē/ wie das quadrat der gantzē linie ſey ſo vil/ als die zwey quadrata, der zweien teylen in ſonderheit ſāpt dem das da kōpt auß A c in c B zwey mal.



Die Binomischen „Formeln“ damals

… auch mit Variablen

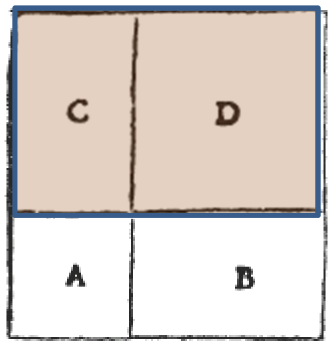
STIFEL 1553



Item
So ich das A vñ B zusamē neme. so find ich auch (auffs aller schlechtest) ein equation/ der andern Regel Christophori. also 1ʒ + 96 gleich 160. Oder auch der ersten Regel. also. 1ʒ gleych 20 𝔯.

¶ So ich aber das A vnd B zusamen nem also. 1ʒ + 12𝔯 ist gleych 160

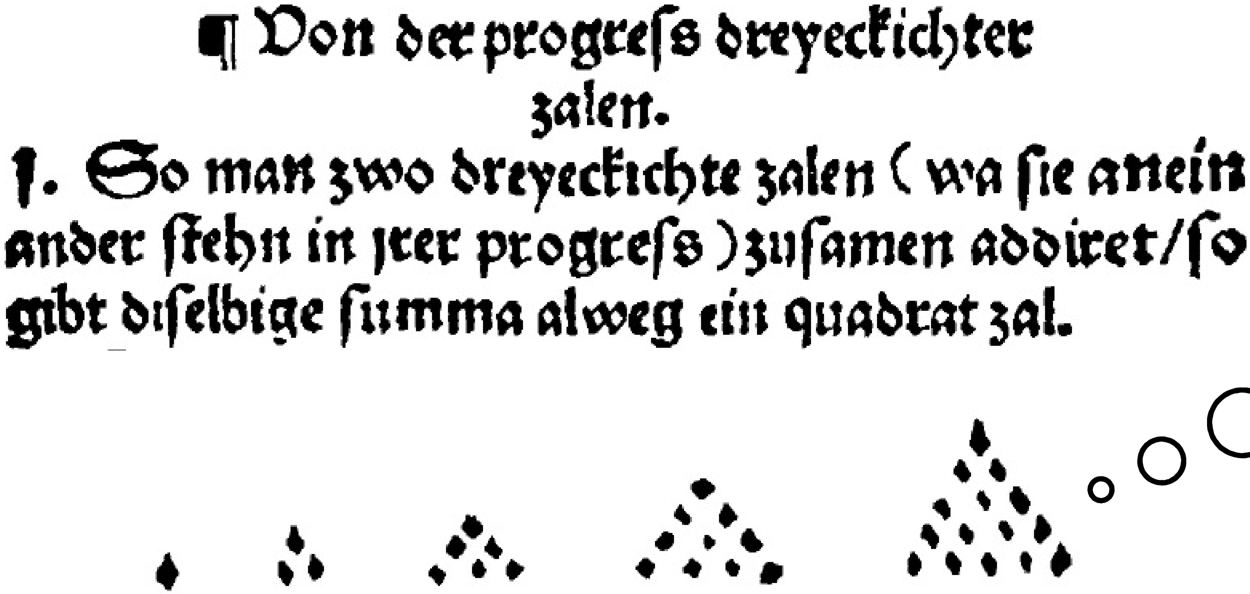
Oder das C. vnd D. zusamen nem also. 1ʒ + 8𝔯 gleych 240. so fallen solliche equationes in die funffte Regel Christophori.



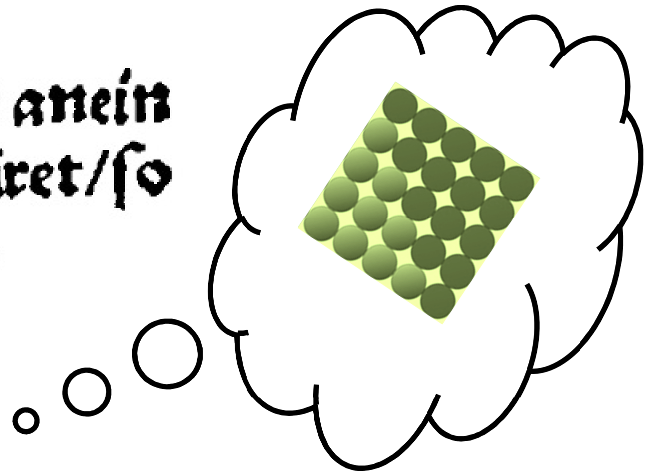
STIFEL 1553

Ein wichtiges historisches Vorbild – zum Zweiten

II Konstruktiv-geometrische Argumentationen über Punktemuster



¶ Von der progreſs dreyeckichter
zalen.
1. So man zwo dreyeckichte zalen (wa ſie anein
ander ſtehn in jrer progreſs) zuſamen addiret/ſo
gibt diſelbige ſumma alweg ein quadrat zal.



Stifel 1553

Quadrate ungerader Zahlen sind Differenzen von Dreieckzahlen?

MICHAEL STIFEL geht schnell in die Tiefe des Raums

¶ Von der progreſs dreyeckichter zalen.

1. So man zwo dreyeckichte zalen (wa ſie aneinander ſtehn in jrer progreſs) zuſamen addiret/ſo gibt diſelbige ſumma alweg ein quadrat zal.

2 So man zwo dreyeckichte zalen nympt (die an einander ſtehn) vnd jre quadrat von einander ſub
trahirt

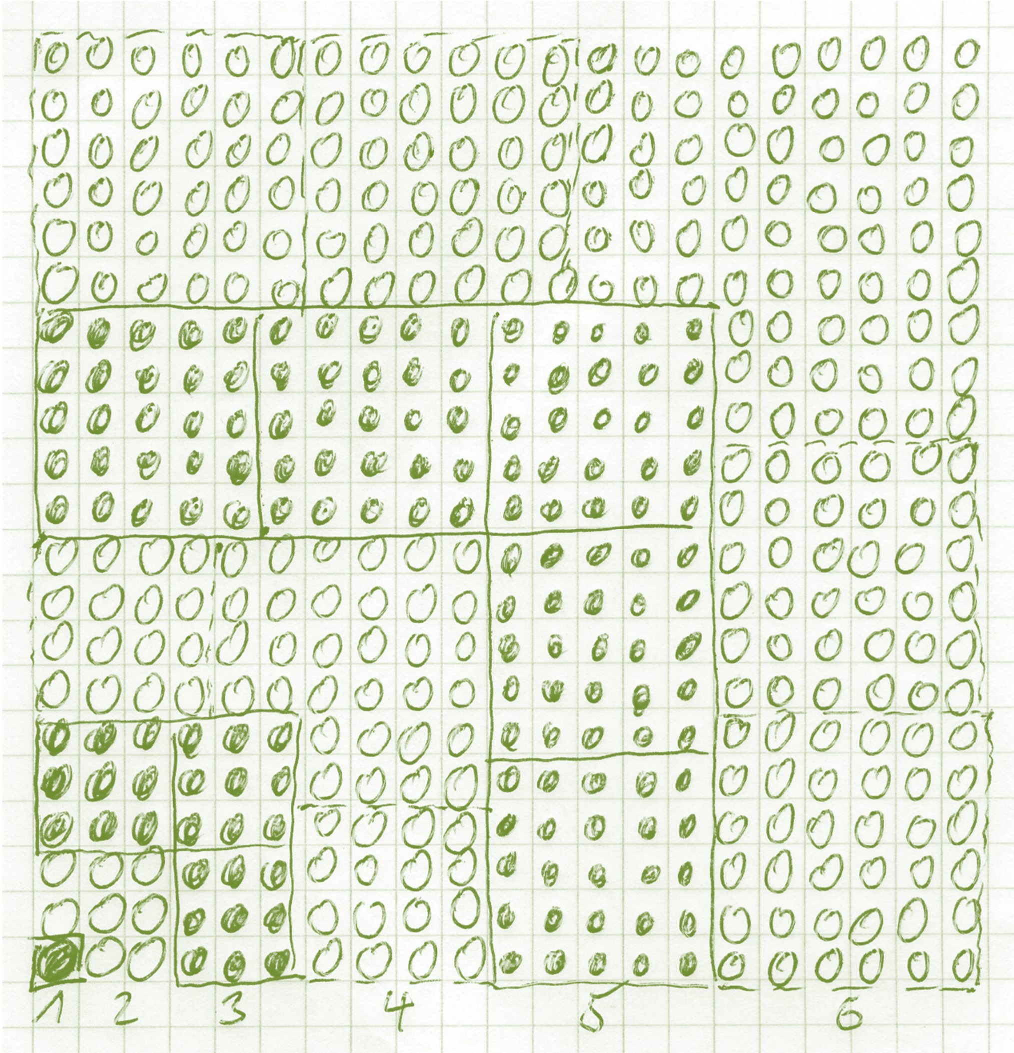
trahirt/ſo bleibt alweg ein cubic zal. Als ſo ich nim 10 vnd 15. ſind jre quadrat 100 vnd 225. ſubtrahir ich die von einander/ſo bleiben 125. das iſt ein cubic zal. Jſt jr cubic würtzel 5.

STIFEL 1553

Die 2.(!) Aufgabe zu Dreieckzahlen bei MICHAEL STIFEL:

- Die Differenz
- der Quadrate
- zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen
- ist stets eine Kubikzahl?

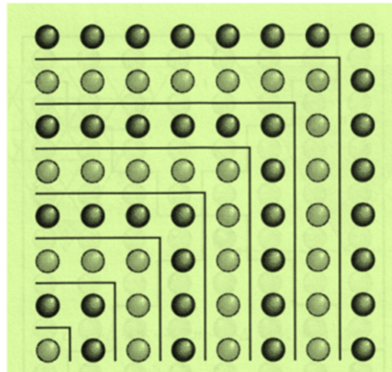
„…/so bleibt alweg ein cubic zal.“:



Doppelsinnig

Aha: ähnliche Hakenmuster!

→ Gnomone



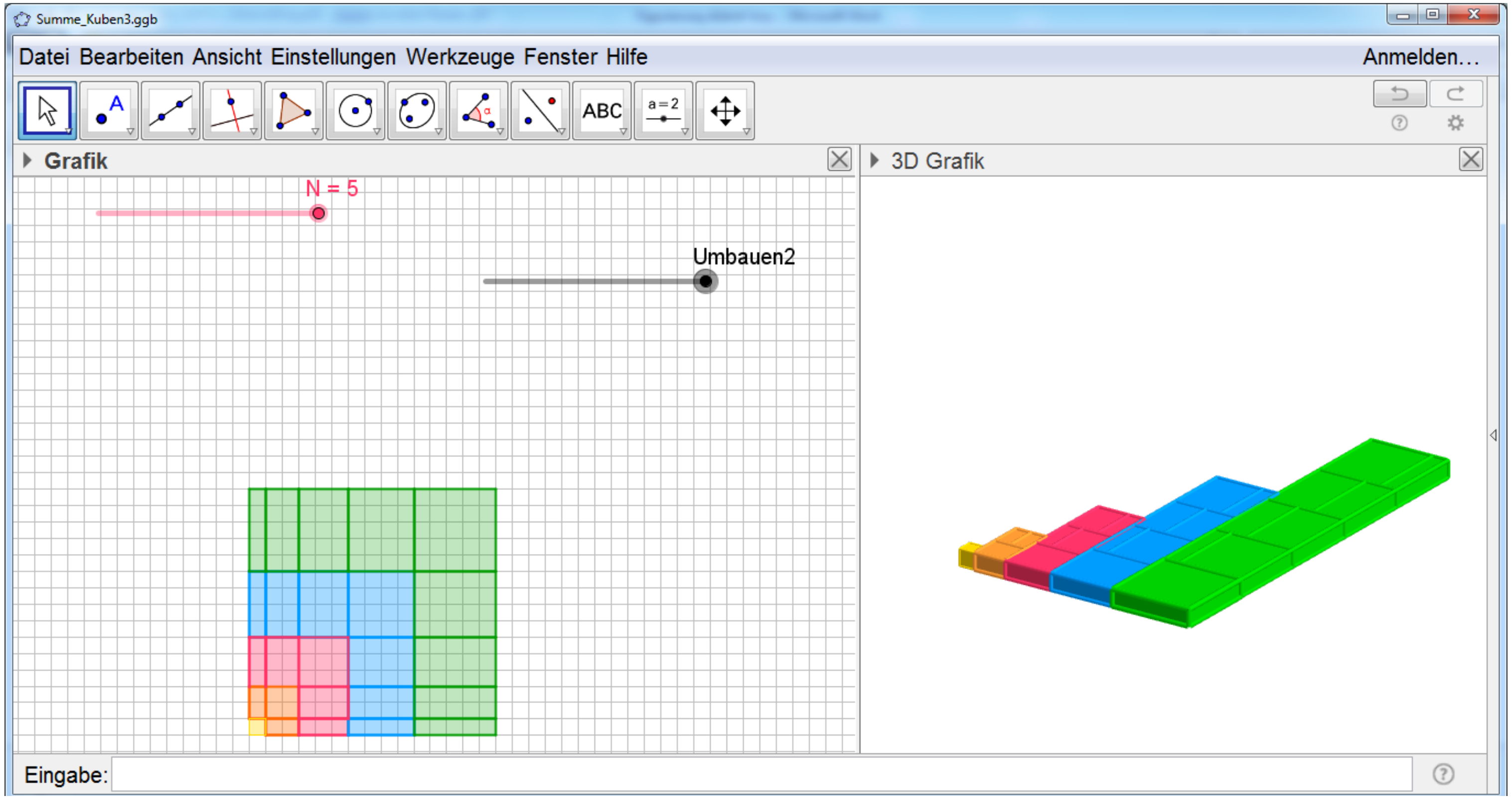
Aha: Dreieckzahlen können auch so aussehen!

Epistemologische Unterscheidung von mathematischen Sprachformen

ikonisch	**symbolisch – ergänzt um**
Wort	verbal-begriffliche Regeln (VB)
Bild	konstruktiv-geometrische Regeln (KG)
	Kohärenz herstellen ⇳ durch Figurierung
Formelzeichen	formal-algebraische Regeln (FA)

Bewegliche 3D-Visualisierung mit DGS

Äquivalente Formulierung der Aussage von Aufgabe 2: Das Quadrat der n-ten Dreieckszahl ist die Summe der n ersten Kubikzahlen.



Geogebra-Datei: SCHWINDLING 2016

Gnomone – Differenz ähnlicher Figuren

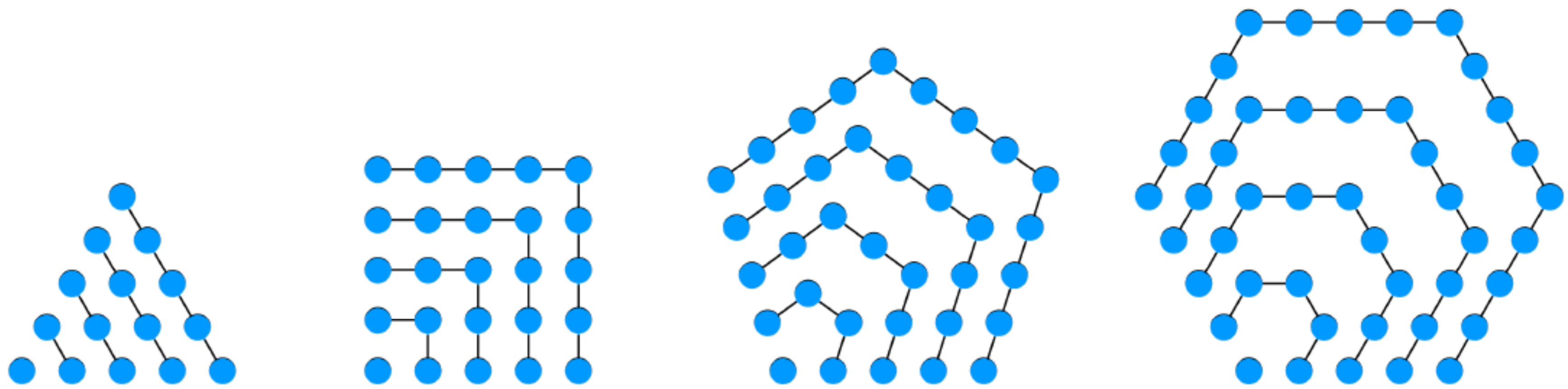


Abb.: SCHWINDLING 2016

Der Bezeichner „Gnomon“
geht auf den schattenwerfenden „Stab“ der Sonnenuhr zurück.

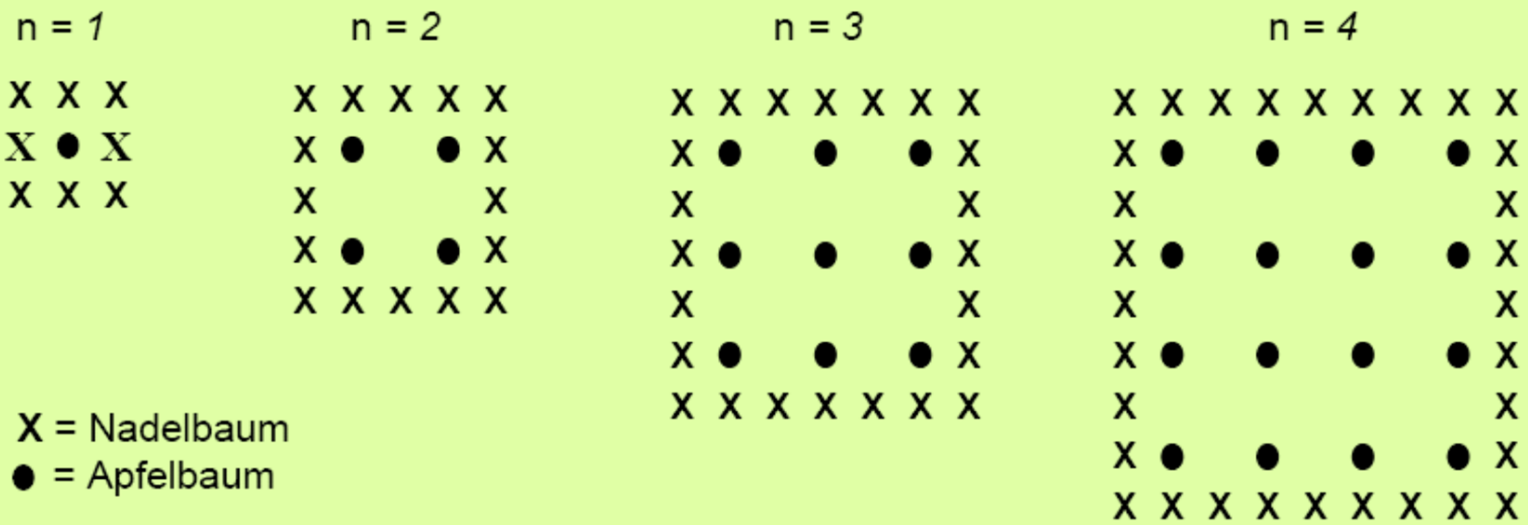
vgl. HISCHER & SCHEID 1995

Renaissance von Figurierungen im MU durch PISA

ÄPFEL

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.

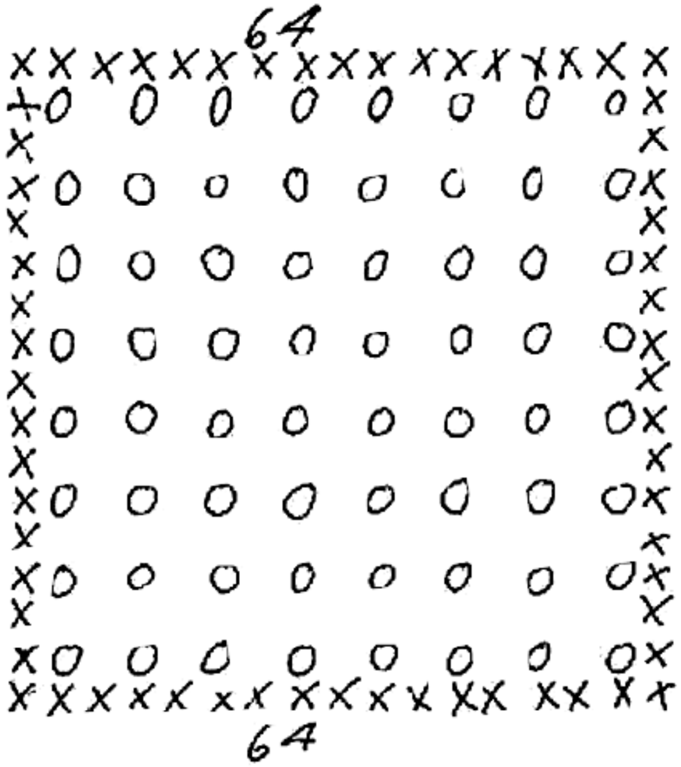
Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (*n*) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



Pisa 2000

Früher beginnen – und ohne n

Lösungen aus Klassenstufe 3



	Apf.	Tann
1.	1	8
2.	4	16
3.	9	24
4.	16	32
5.	25	40
6.	36	48
7.	49	56
8.	64	64
9.		
10.		

	A	T
	1	8
+3	4	16
+5	9	24
+7	16	32
+9	25	40
+11	36	48
+13	49	56
+15	64	64

Abb.: Küppers 2002

Figurierung diskret – bzw. kontinuierlich

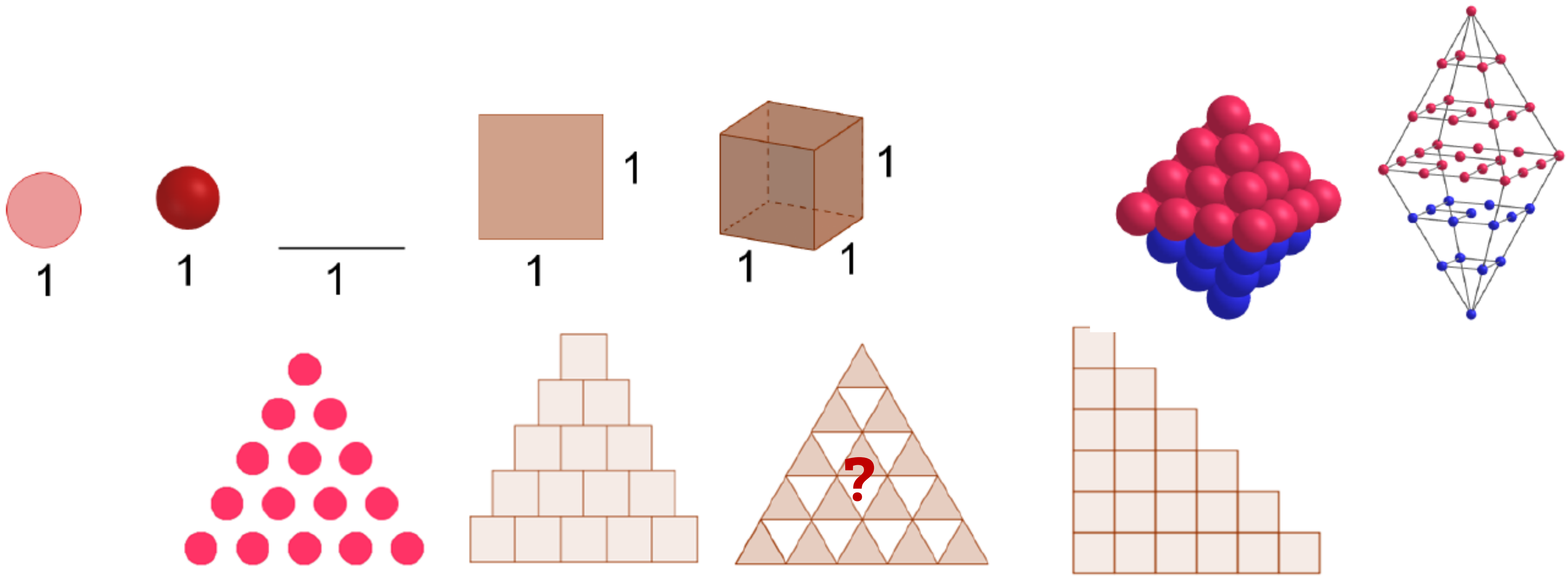
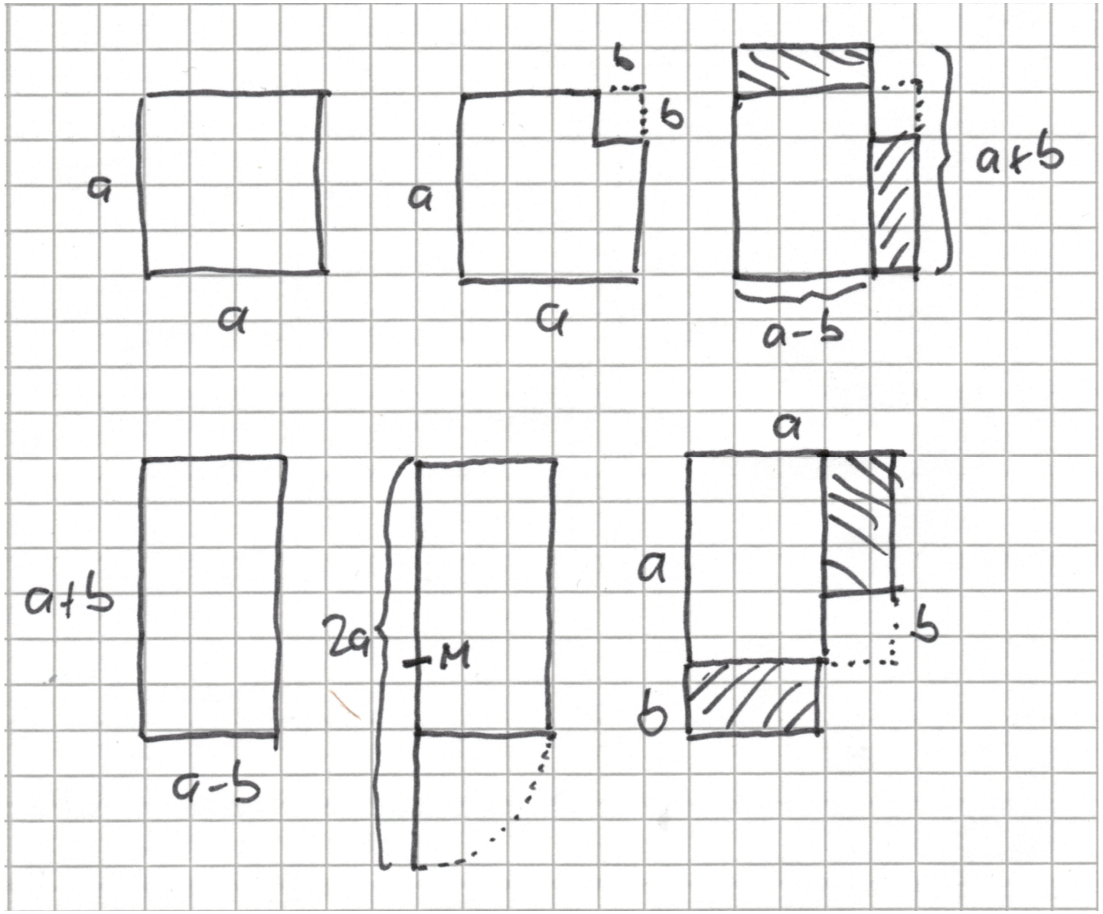


Abb.: SCHWINDLING 2016

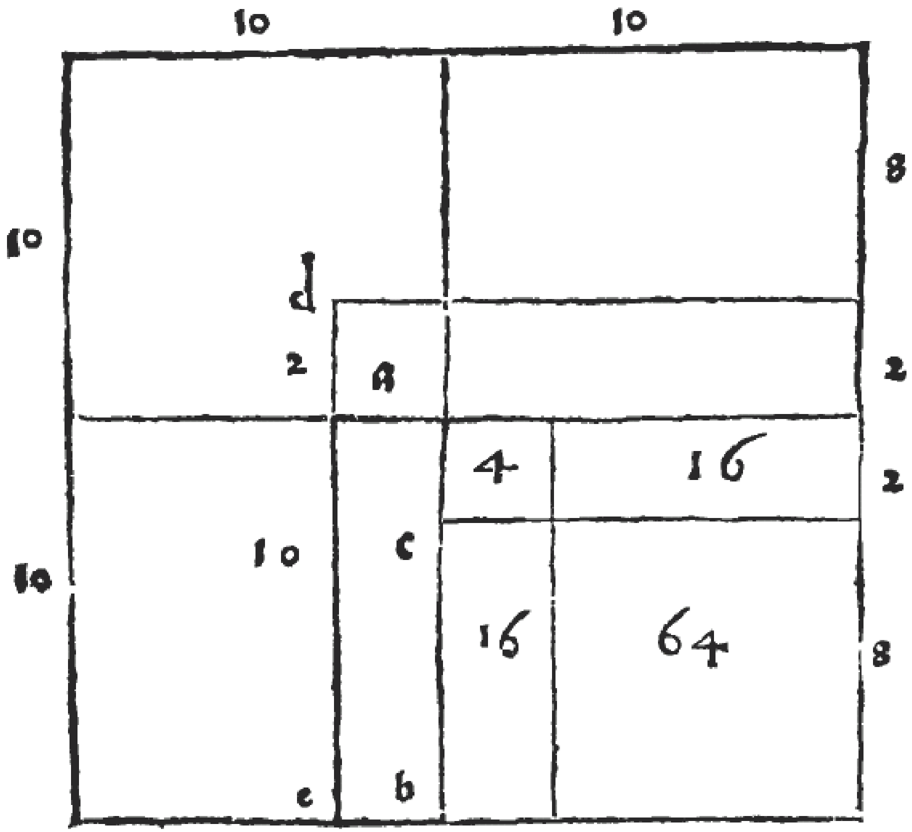
Figurierung: Idee, Prozess und Produkt

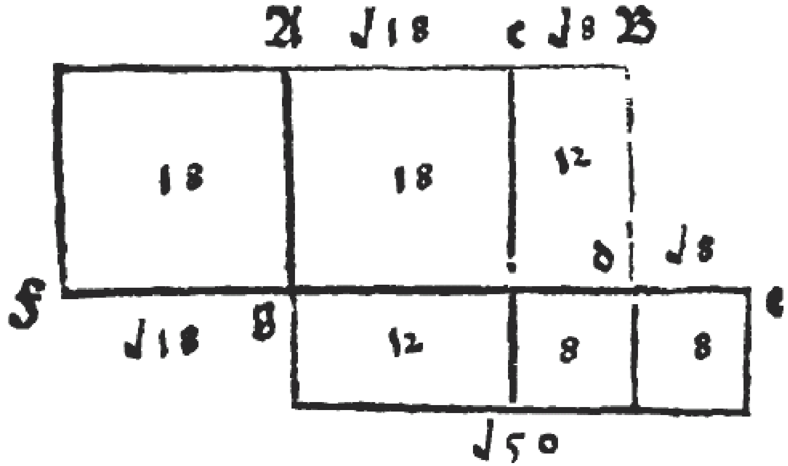
z.B. dritte binomische Formel

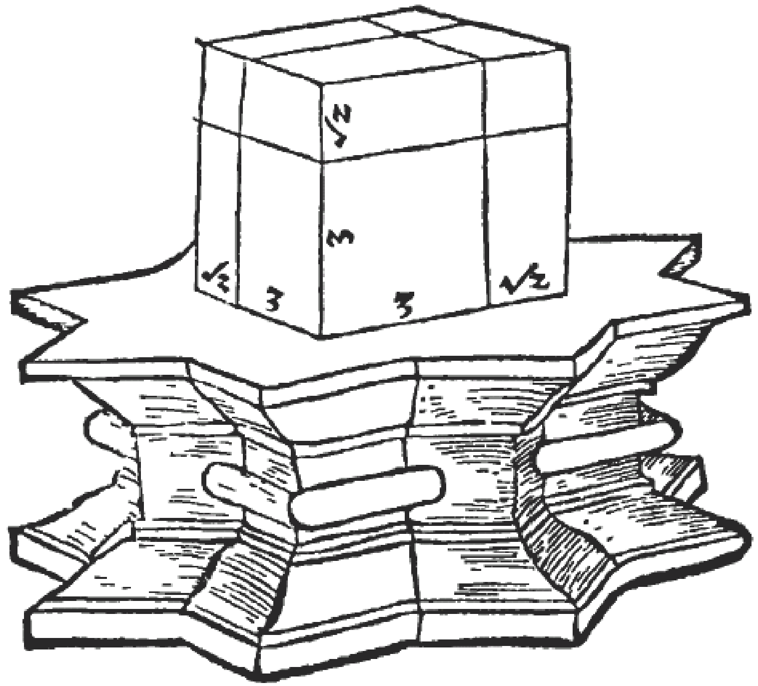
Idee	Produkte zweier positiver Zahlen sind Rechtecke, Quadrate sind Quadrate!
Produkt	$(a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$
Prozess*e*	Gleichung von rechts *oder* von links lesen und übersetzen



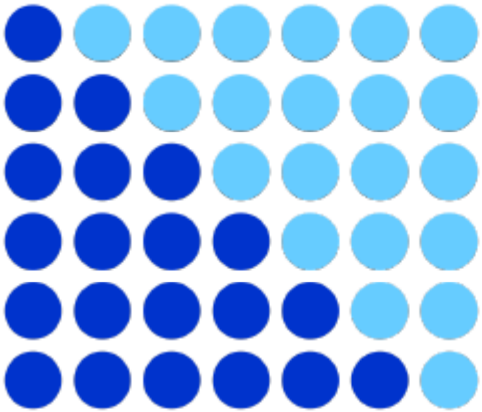
Bei MICHAEL STIFEL wurde konstruktiv-geometrisch symbolisch „gerechnet“ …



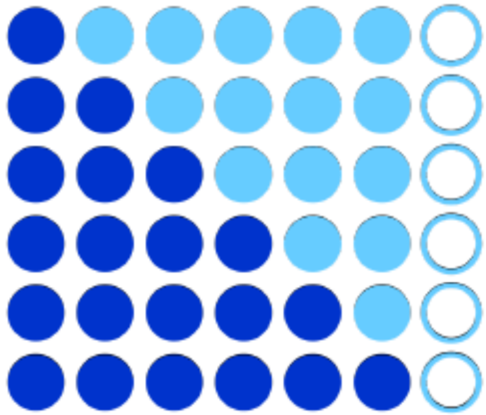




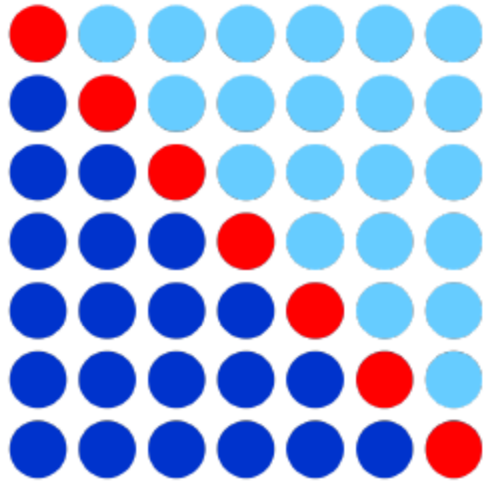
3 Formelzeichen und 3 Bilder symbolisch kohärent!



$$\mathrm{F}_3(n) = \frac{(n+1)n}{2}$$



$$\mathrm{F}_3(n) = \frac{n^2+n}{2}$$



$$\mathrm{F}_3(n) = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}$$

Abb.en: SCHWINDLING 2016

Liefert konkrete konstruktiv-geometrische Motivationen zu formal-algebraischen Termumformungen

Eine(!) Zerlegung der n-ten k-Eckzahl $F_k(n)$ …

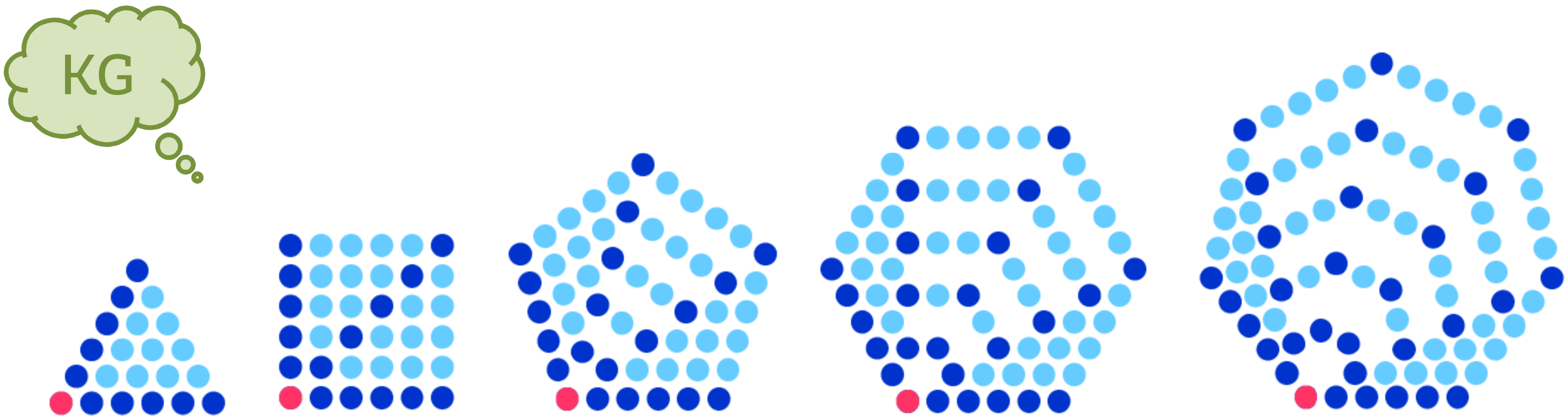


Abb: SCHWINDLING 2016

VB

… in

- ✓ $k-2$ $(n-2)$-te Dreieckzahlen $F_3(n-2)$ und
- ✓ $k-1$ $(n-1)$-te Linearzahlen $F_2(n-1)$ und
- ✓ 1 Einheit $F_k(1)$.

← ein wenig Rekursion

FA

Also: $F_k(n) = (k-1)F_2(n-1) + (k-2)F_3(n-2) + 1 = \cdots$

Noch eine Zerlegung der $\boldsymbol{n}$-ten $\boldsymbol{k}$-Eckzahl $\boldsymbol{F_k(n)}$ …

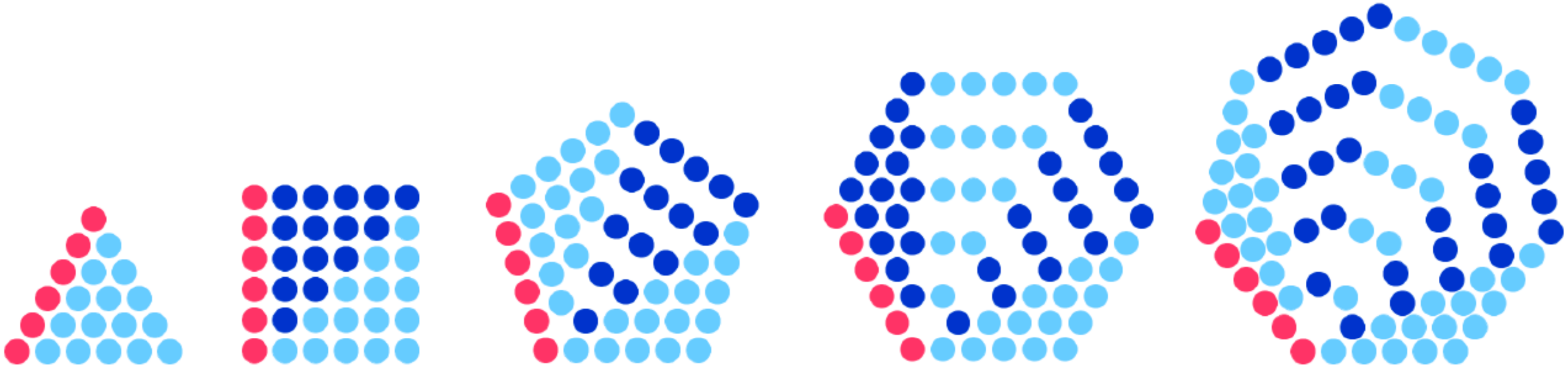


Abb: SCHWINDLING 2016

… in

- ✓ 1 Linearzahl $F_2(n)$.
- ✓ $k-2$ $(n-1)$-te Dreieckzahlen $F_3(n-1)$ und

Also: $F_k(n) = (k-2)F_3(n-1) + F_2(n) = \cdots$

Aller guten Dinge sind drei: Noch einmal $\boldsymbol{F_k(n)}$ …

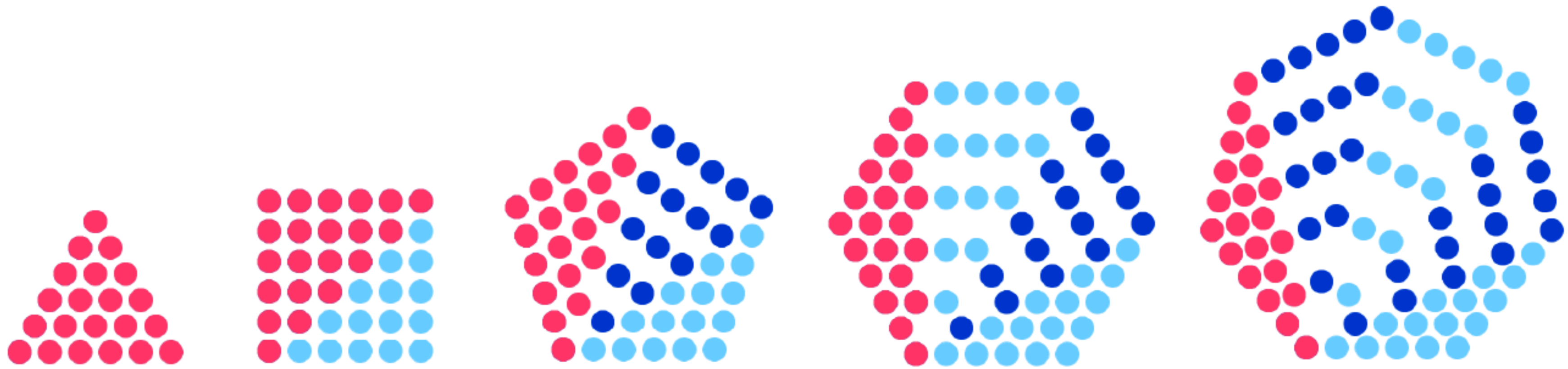


Abb: SCHWINDLING 2016

… in

- ✓ $k-3$ $(n-1)$-te Dreieckzahlen $F_3(n-1)$ und
- ✓ n-te Dreieckzahl $F_3(n)$.

← etwas mehr Rekursion!

③ Also: $F_k(n) = (k-3)F_3(n-1) + F_3(n) = \cdots$

"Die Formel" lässt sich auch über „Ausrollen" der Gnomone und symmetrische Ergänzung zum Rechteck bestimmen.

Korollar: Jede Sechseckzahl ist eine Dreieckzahl

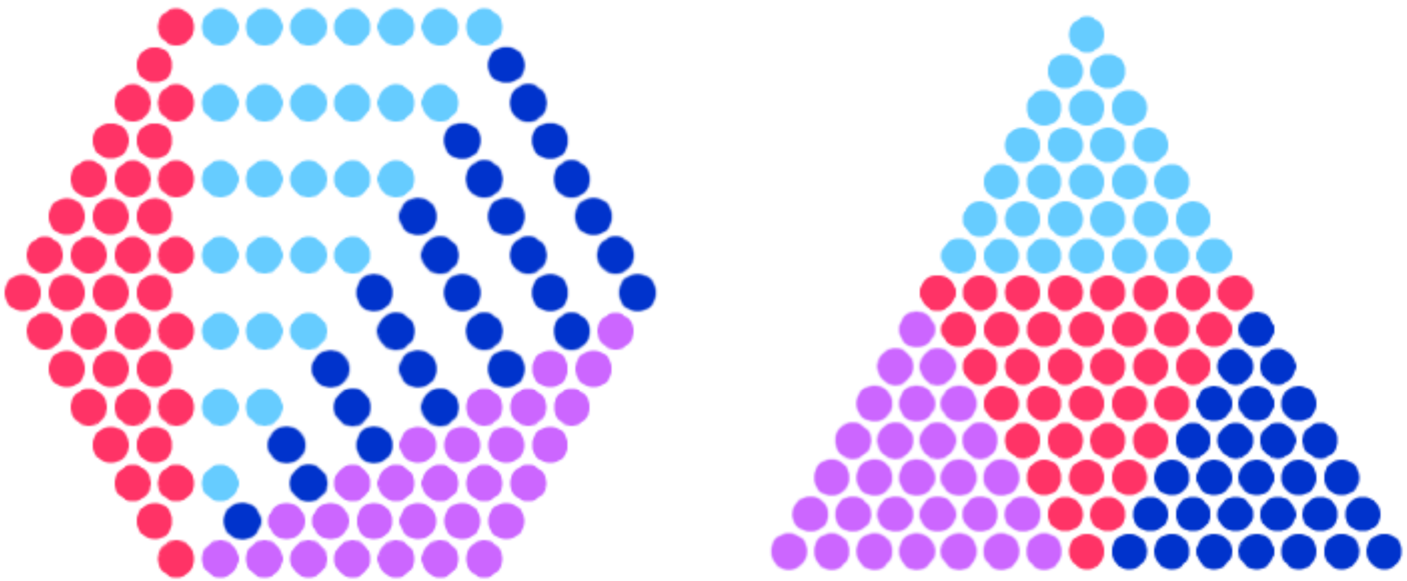


Abb: SCHWINDLING 2016

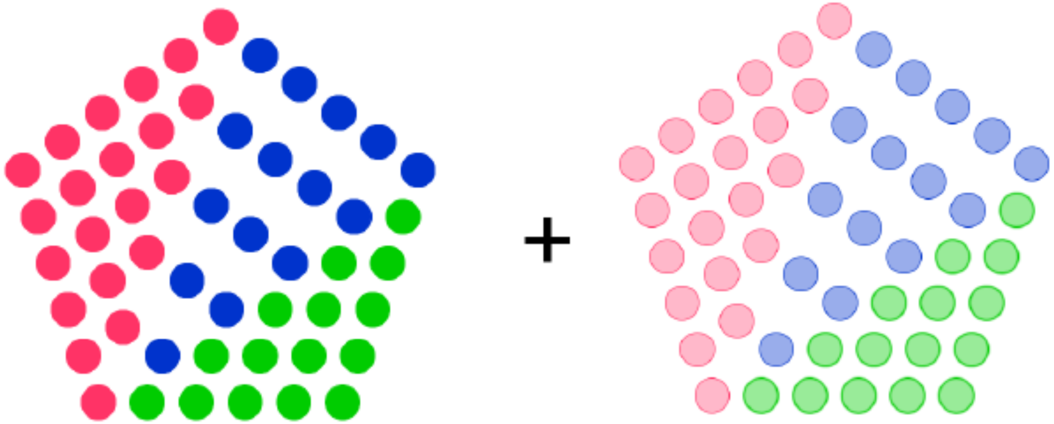
Ein nicht so offensichtlicher, aber immer noch figurierbarer Satz:

Die Summe der ersten n Potenzen von 9
ist die $\sum_{\nu=0}^{n} 3^{\nu}$-te Dreieckszahl.

Alina & Nelsen 2013

Umgekehrt (D): Ist $F_k(n) = \frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}$ zu sehen?

Ja! Auf Basis der
③. Zerlegung



Hier exemplarisch für $k = 5$ und $n = 6$ figuriert

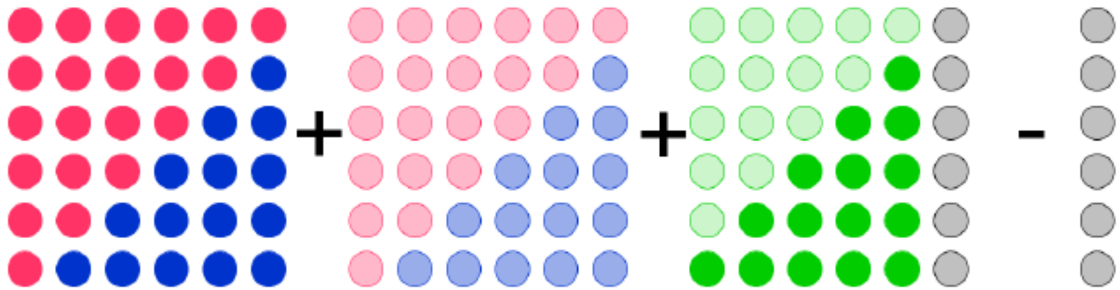


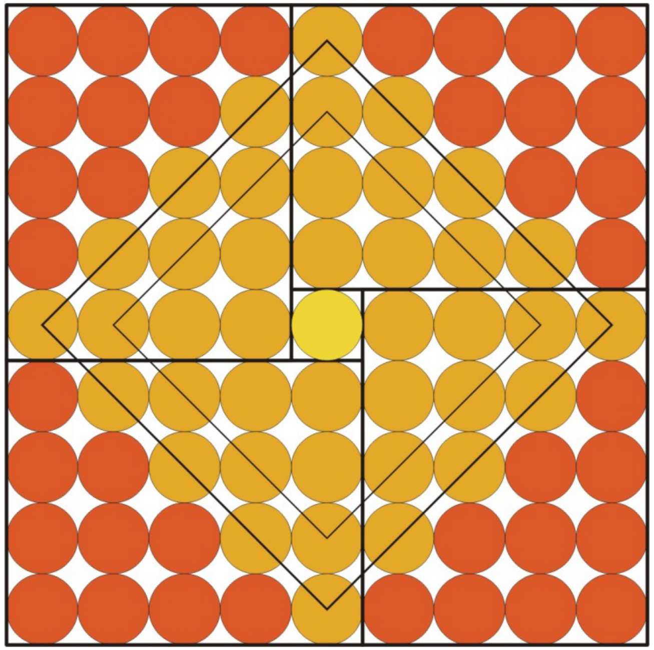
Abb: SCHWINDLING 2016

Umgekehrt (I): Dreieckswurzel

Weil’s so „lustlich und lieblich“ ist:

Aber aus der Trigonal zal finde ich jr trigonal würtzel durch diſe Regel.

Ich multiplicir die Trigonal zal mit 8 zum product/addir ich ein vniter. Daraus extrahir ich radicem quadratam/ſo ich die hab/ſo ſubtrahir ich davon ein vniter/ſo iſt denn der halbe theil/ die geſuchte trigonal würtzel..



Stifel 1553

Den Zusammenhang beschrieben schon Plutarch von Chäronea und Diophant.

In diesem *Punktebild* ist auch $4F_3(k) + 1 = F_4(k+1) + F_4(k)$ zu sehen und damit zentriert figurierte Zahlen.

Zentriert figurierte Zahlen

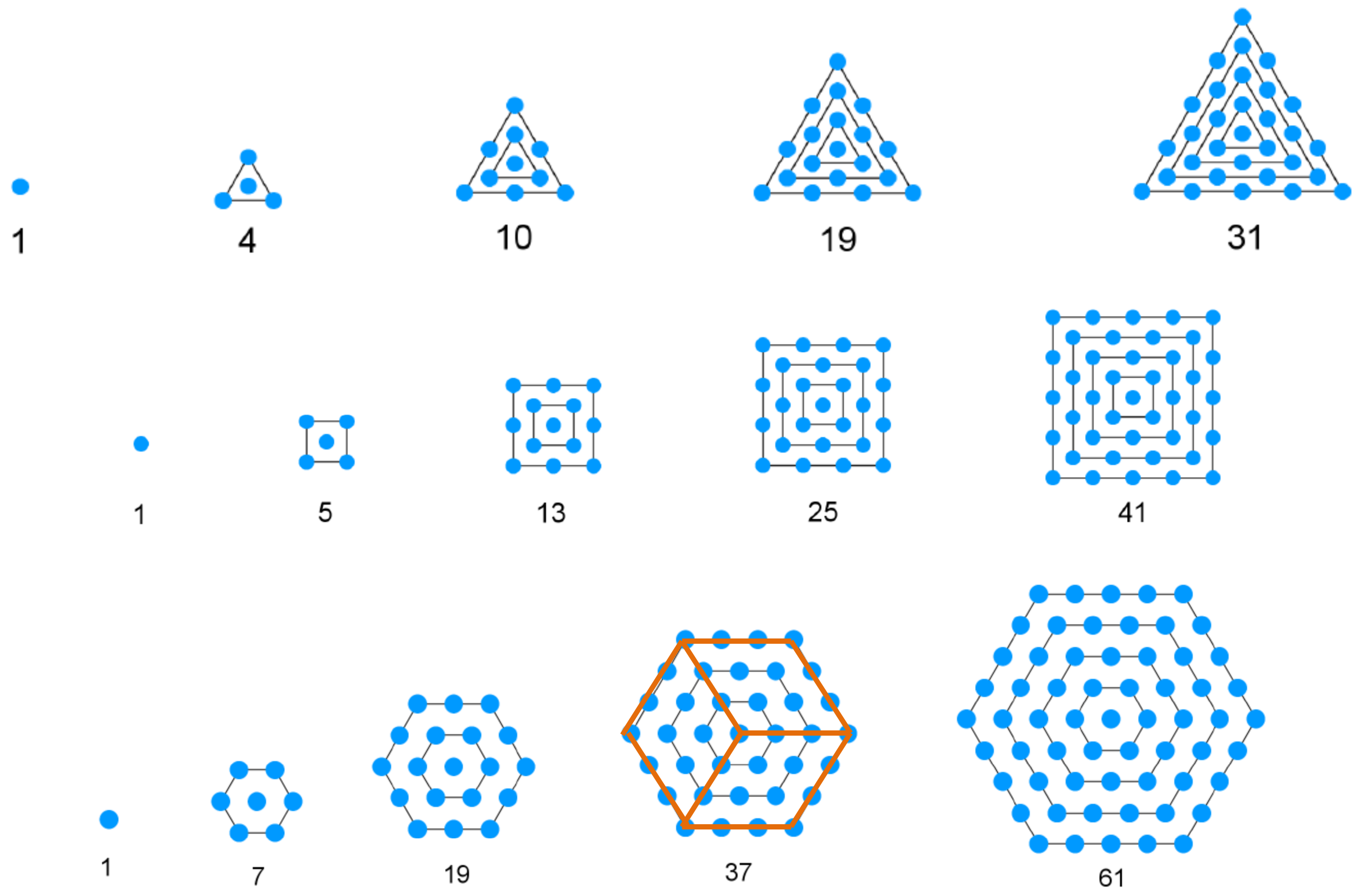


Abb: SCHWINDLING 2016, ergänzt

Räumliche Figurierungen

Summe von …

Zentrierte Sechseckpyramidenzahlen sind Würfelzahlen

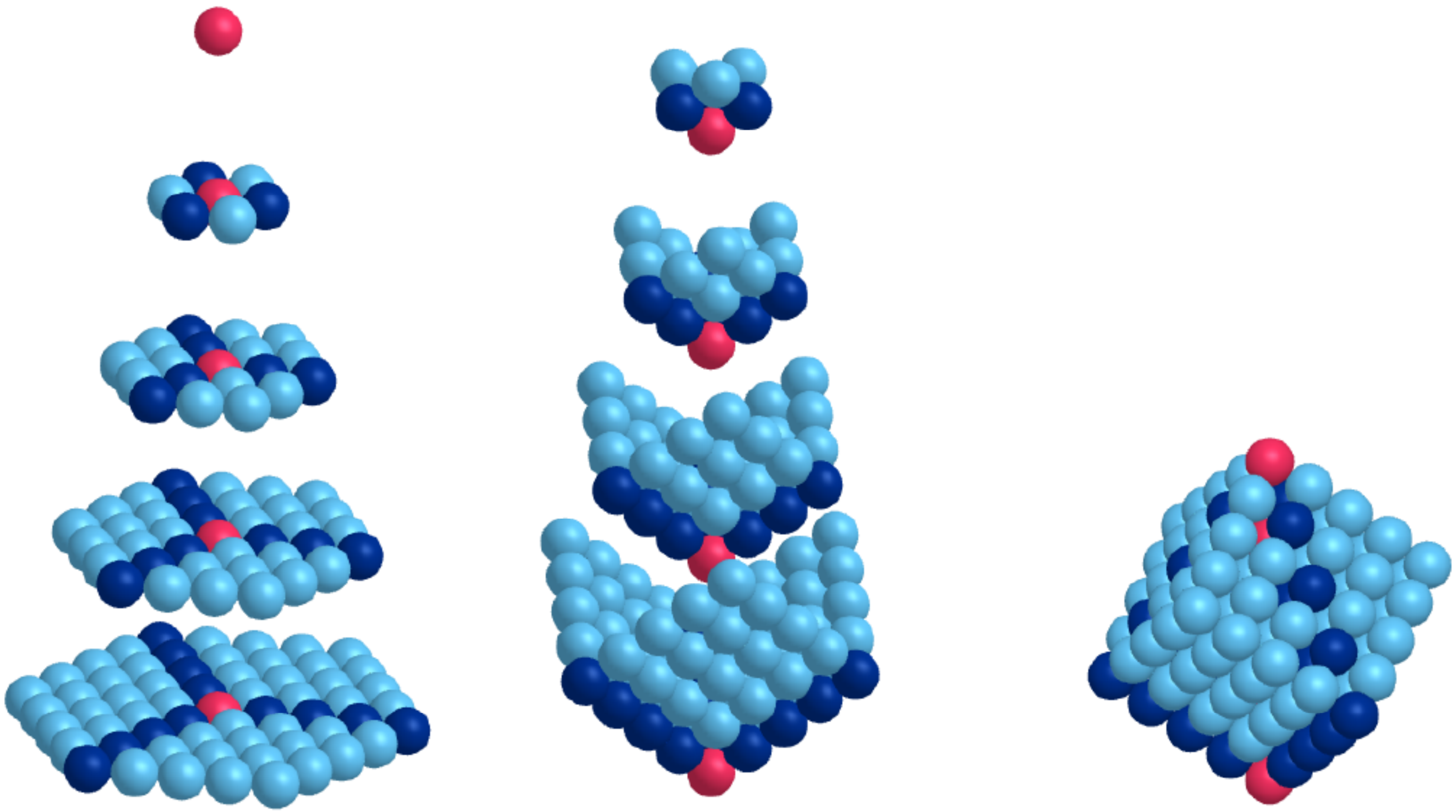


Abb: Schwindling 2016

Darstellungsebenen und Übergänge

Ebenen und Übergänge

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol (als Zeichen mit Spielregeln) und Operation</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes“</td><td>„Gesagtes“</td><td>„Gehörtes“</td><td>„Aufgefasstes“</td></tr>
</table>

Handlungen, Zeichen und Symbole sind didaktische Medien zur vernetzenden Beziehung von Lernenden mit dem Stoff.

Probleme selbst lösen – mit Material, mit Bildern ;-)

Operativer Beweis „Händeschüttelproblem“

Reducieren …

Reduzieren …
Durch**spielen** …
Modellieren …
Abstrahieren …

Doppeltes Abzählen!

OHA: $\binom{n}{2} = F_3(n-1)$

Pascaldreieck als Dreieckzahlendreieck

$$F_3^0(1)$$

$$F_3^0(2) \quad F_3^1(1)$$

$$F_3^0(3) \quad F_3^1(2) \quad F_3^2(1)$$

$$F_3^0(4) \quad F_3^1(3) \quad F_3^2(2) \quad F_3^3(1)$$

$$F_3^0(5) \quad F_3^1(4) \quad F_3^2(3) \quad F_3^3(2) \quad F_3^4(1)$$

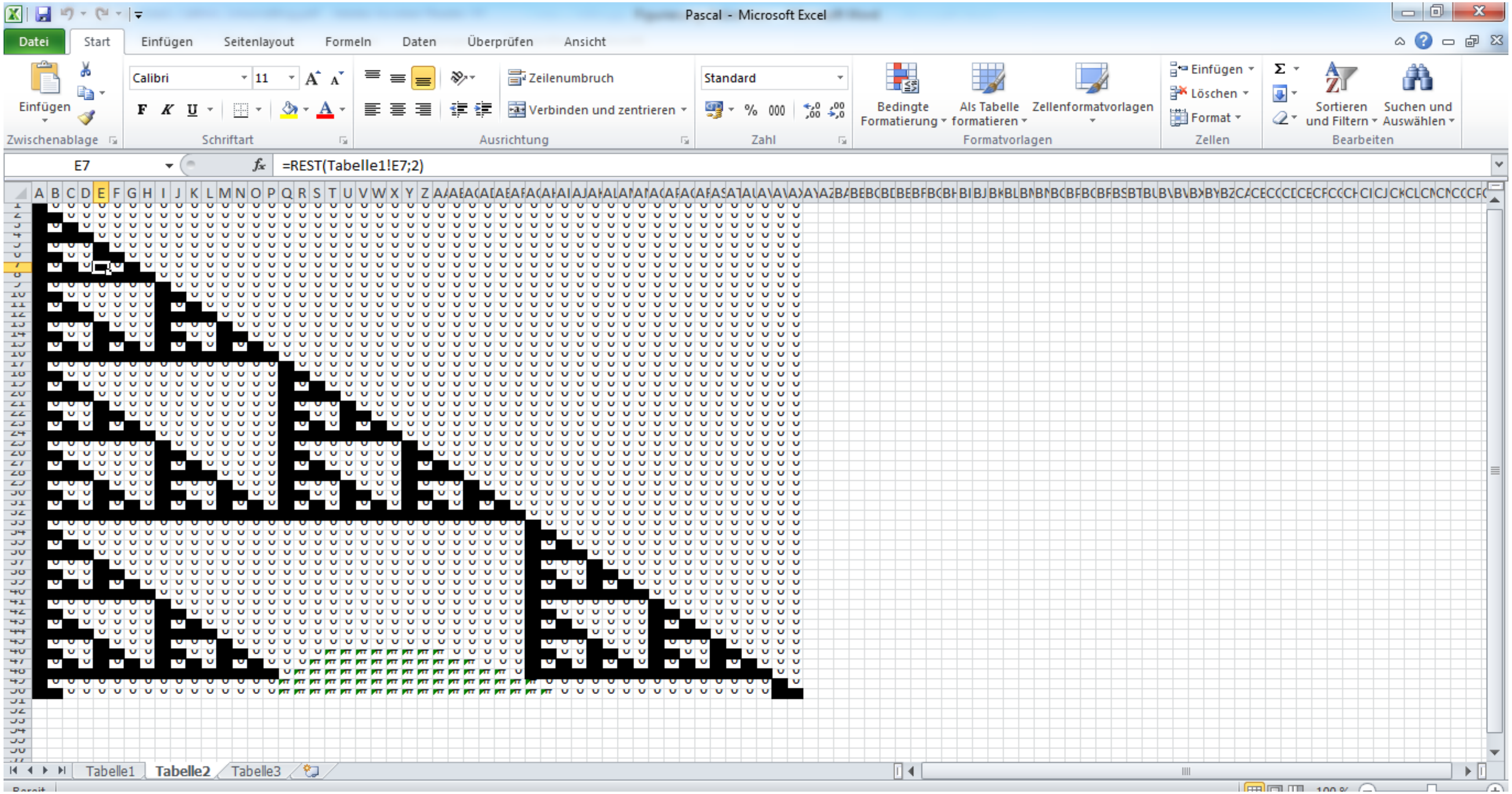
$$F_3^0(6) \quad F_3^1(5) \quad F_3^2(4) \quad F_3^3(3) \quad F_3^4(4) \quad F_3^5(1)$$

Und was wird hier ausgewählt?

Tetraederzahlen & zuvor

Nebenbemerkung:
Als Summen flacher Diagonalen sind Fibonaccizahlen enthalten.

Exkurs: Pascaldreieck mod 2 – als fraktale Figur



Figurierungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$y = -x + 5$

⚅	7	8	9	10	11	12
⚄	6	7	8	9	10	11
⚃	5	6	7	8	9	10
⚂	4	5	6	7	8	9
⚁	3	4	5	6	7	8
⚀	2	3	4	5	6	7
+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅

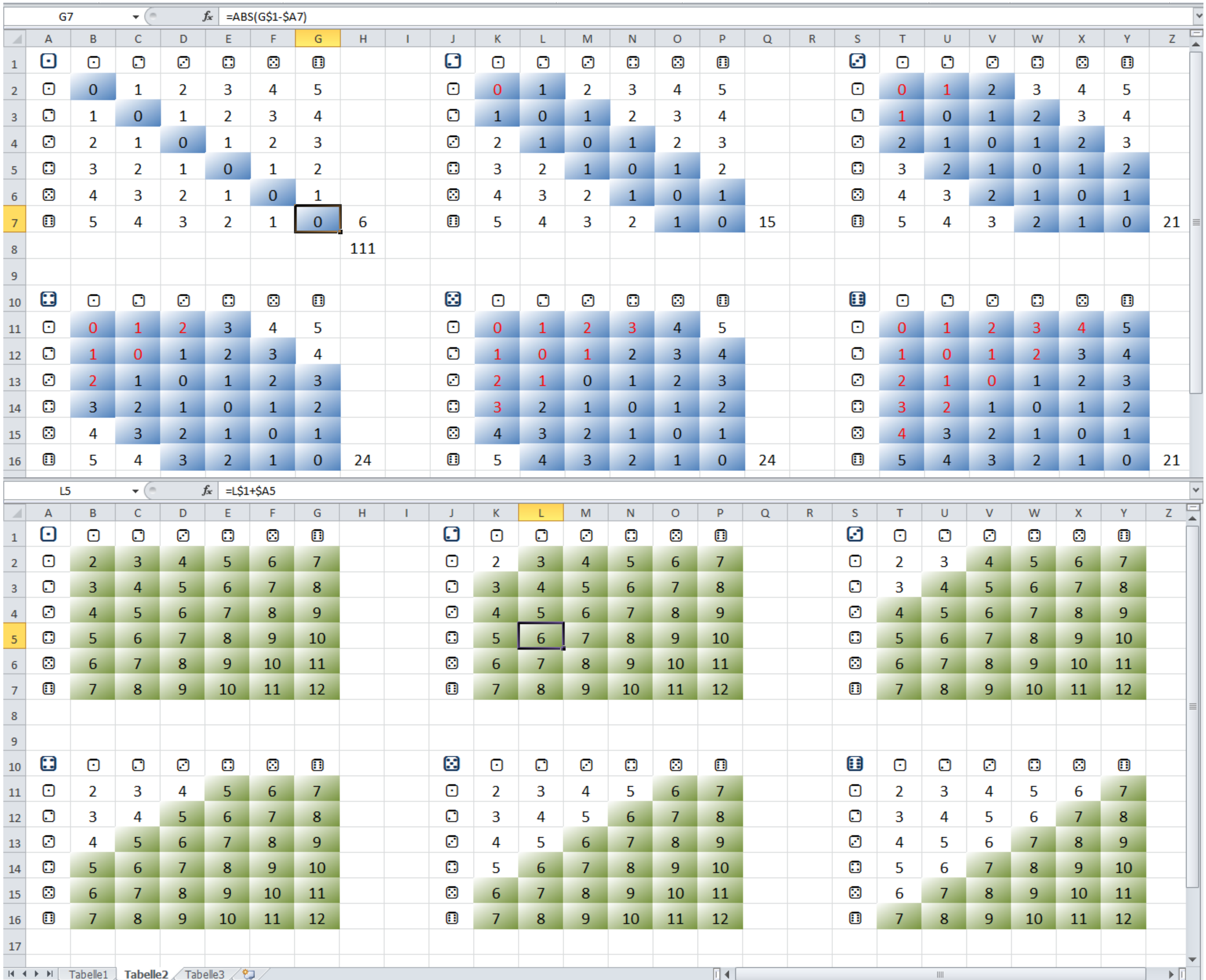
Tabelle analog zu schulüblichem Koordinatensystem angelegt!

Wahrscheinlichkeit für „Würfelsumme höchstens 5“: $\frac{F_3(4)}{F_4(6)} = \frac{\Delta(4)}{6^2}$

Wahrscheinlichkeit für „Beide Würfel zeigen mind. ⚃“: $\frac{F_3(3)}{F_4(6)} = \frac{3^2}{6^2}$

Dreiecke würfeln mit drei Würfeln

Der Schnitt der beiden dargestellten Fälle beschreibt die konstruierbaren gewürfelten Dreiecke ☺



G7 =ABS(G$1-$A7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	⚀	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚁	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚂	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	
2	⚀	0	1	2	3	4	5			⚀	0	1	2	3	4	5			⚀	0	1	2	3	4	5	
3	⚁	1	0	1	2	3	4			⚁	1	0	1	2	3	4			⚁	1	0	1	2	3	4	
4	⚂	2	1	0	1	2	3			⚂	2	1	0	1	2	3			⚂	2	1	0	1	2	3	
5	⚃	3	2	1	0	1	2			⚃	3	2	1	0	1	2			⚃	3	2	1	0	1	2	
6	⚄	4	3	2	1	0	1			⚄	4	3	2	1	0	1			⚄	4	3	2	1	0	1	
7	⚅	5	4	3	2	1	0	6		⚅	5	4	3	2	1	0	15		⚅	5	4	3	2	1	0	21
8								111																		
9																										
10	⚃	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚄	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚅	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	
11	⚀	0	1	2	3	4	5			⚀	0	1	2	3	4	5			⚀	0	1	2	3	4	5	
12	⚁	1	0	1	2	3	4			⚁	1	0	1	2	3	4			⚁	1	0	1	2	3	4	
13	⚂	2	1	0	1	2	3			⚂	2	1	0	1	2	3			⚂	2	1	0	1	2	3	
14	⚃	3	2	1	0	1	2			⚃	3	2	1	0	1	2			⚃	3	2	1	0	1	2	
15	⚄	4	3	2	1	0	1			⚄	4	3	2	1	0	1			⚄	4	3	2	1	0	1	
16	⚅	5	4	3	2	1	0	24		⚅	5	4	3	2	1	0	24		⚅	5	4	3	2	1	0	21

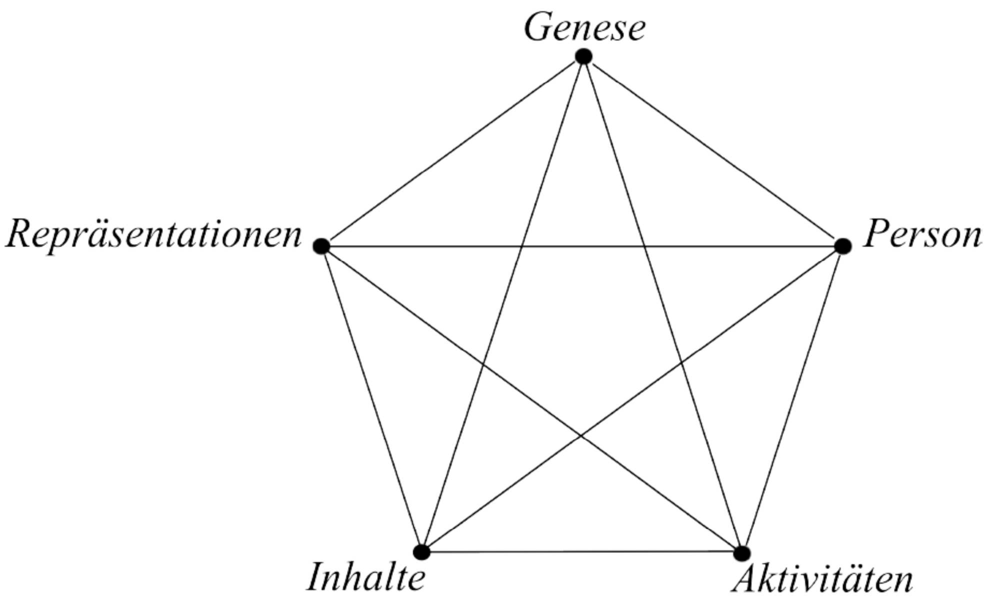
L5 =L$1+$A5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	⚀	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚁	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚂	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	
2	⚀	2	3	4	5	6	7			⚀	2	3	4	5	6	7			⚀	2	3	4	5	6	7	
3	⚁	3	4	5	6	7	8			⚁	3	4	5	6	7	8			⚁	3	4	5	6	7	8	
4	⚂	4	5	6	7	8	9			⚂	4	5	6	7	8	9			⚂	4	5	6	7	8	9	
5	⚃	5	6	7	8	9	10			⚃	5	6	7	8	9	10			⚃	5	6	7	8	9	10	
6	⚄	6	7	8	9	10	11			⚄	6	7	8	9	10	11			⚄	6	7	8	9	10	11	
7	⚅	7	8	9	10	11	12			⚅	7	8	9	10	11	12			⚅	7	8	9	10	11	12	
8																										
9																										
10	⚃	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚄	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅			⚅	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	
11	⚀	2	3	4	5	6	7			⚀	2	3	4	5	6	7			⚀	2	3	4	5	6	7	
12	⚁	3	4	5	6	7	8			⚁	3	4	5	6	7	8			⚁	3	4	5	6	7	8	
13	⚂	4	5	6	7	8	9			⚂	4	5	6	7	8	9			⚂	4	5	6	7	8	9	
14	⚃	5	6	7	8	9	10			⚃	5	6	7	8	9	10			⚃	5	6	7	8	9	10	
15	⚄	6	7	8	9	10	11			⚄	6	7	8	9	10	11			⚄	6	7	8	9	10	11	
16	⚅	7	8	9	10	11	12			⚅	7	8	9	10	11	12			⚅	7	8	9	10	11	12	
17																										

Tabelle1 Tabelle2 Tabelle3

Kurzes Fazit

Figurierung trägt Lernumgebungen potentiell vielversprechend …



von der Bank 2016

Herzlichen Dank fürs Verfolgen des Vortrags ☺