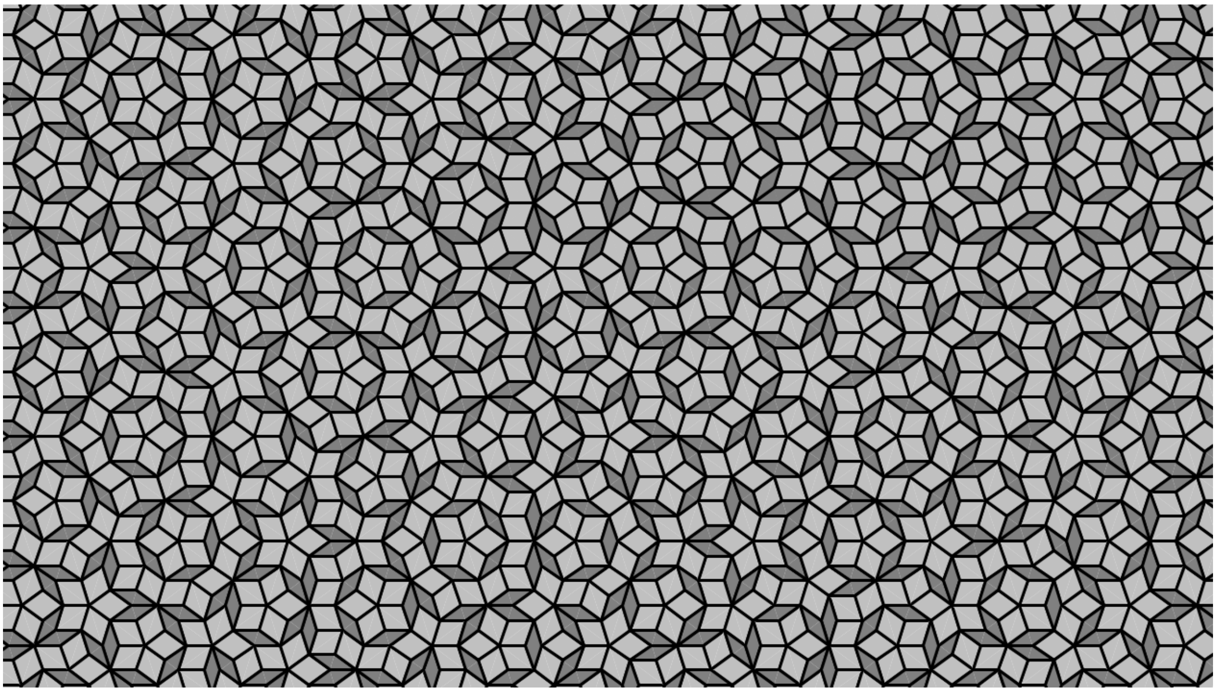
Jörg Meyer, Hameln

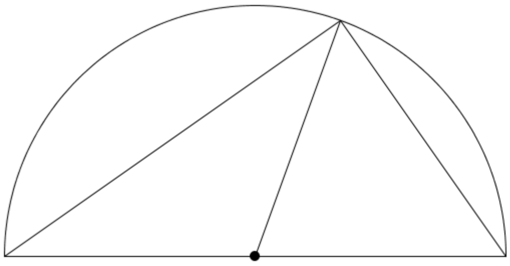
Symmetrie

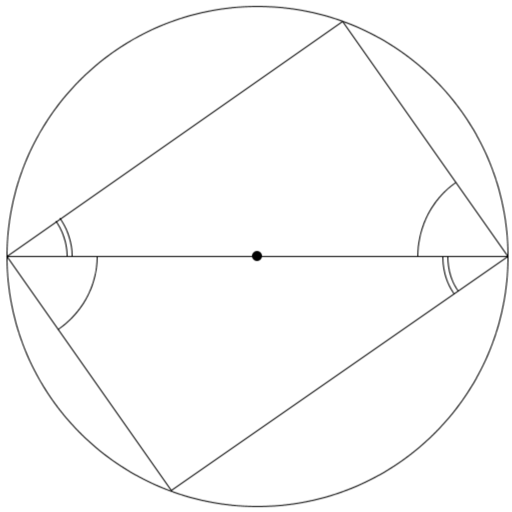


Inhalt:

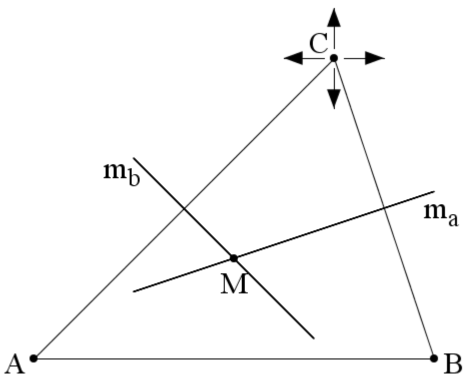
1. Fast alle Beweise der Sek I-Geometrie benutzen Symmetrie (oder deren Brechung)

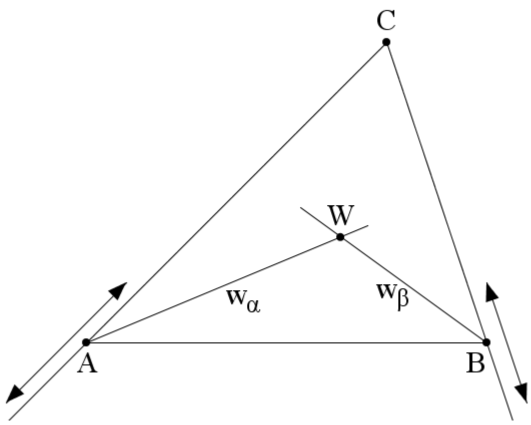
Die beiden Standard-Beweise zum Satz des *Thales* schaffen symmetrische Sub- oder Superstrukturen:



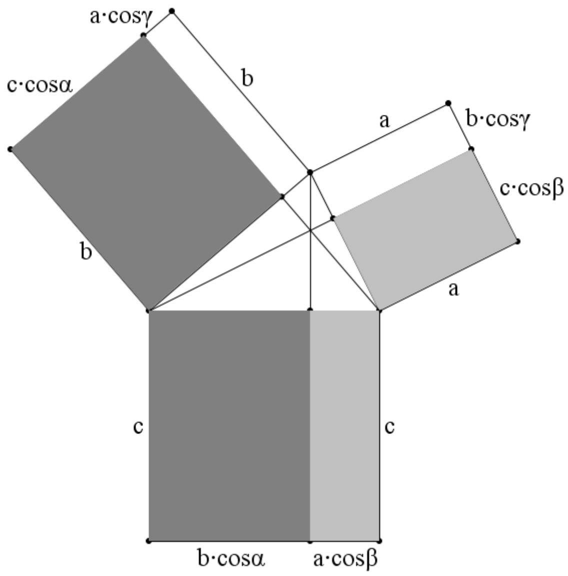


Die üblichen *Kopunktalitätsbeweise* der Dreiecksgeometrie brechen hingegen die Symmetrie auf:

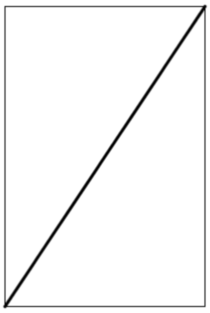


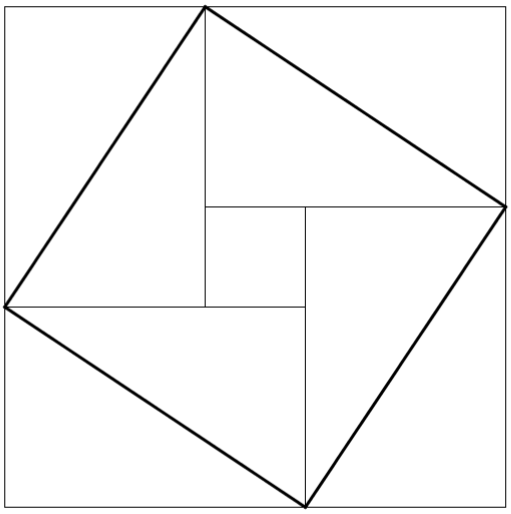


Der Beweis zum *Cosinussatz* hingegen geht von einer symmetrischen Figur aus und gewinnt daraus durch Symmetriebrechung eine asymmetrische Aussage.

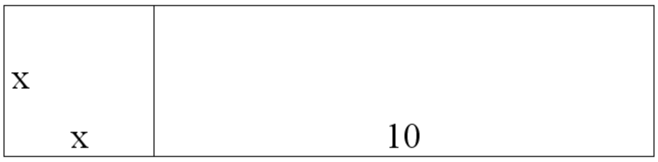


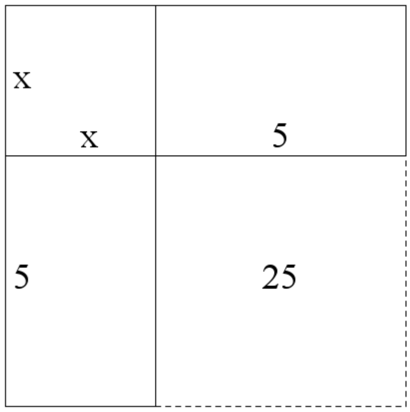
Bei einem der möglichen Beweise zum Satz des *Pythagoras* hingegen wird eine wenig symmetrische Figur symmetrisiert:





Eine Symmetrisierung geschieht auch bei der arabischen Lösung von *quadratischen Gleichungen*, wie man etwa bei $x^2 + 10 \cdot x = 30$ sieht:





Aber hier verdeckt die offensichtliche Symmetrie den Zugang zum Kern des Problems!

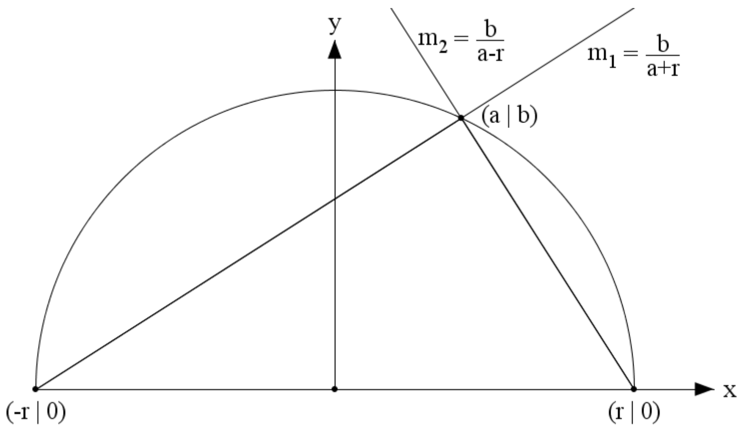
Offensichtlich ist: Der Begriff der Symmetrie spielt schon in der herkömmlichen Sek I-Mathematik eine Rolle, die allerdings nicht immer explizit benannt wird.

2. Symmetrie als Begriff erweitern

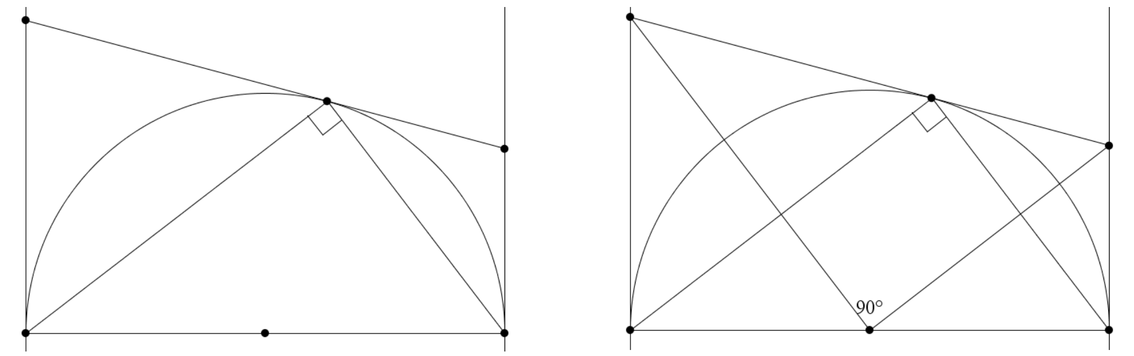
Abgesehen von der engen Bedeutung von „Symmetrie" als gemeinsames Maß lässt sich dieser Begriff auch weiter fassen: Man tut etwas, und jenseits der Spiegelachse tut sich Analoges. Man spricht über etwas, und in einer anderen Sprache bedeuten die Sätze etwas Analoges.

So kann man fragen: Was bedeutet der Satz des *Thales* in der Koordinatengeometrie?

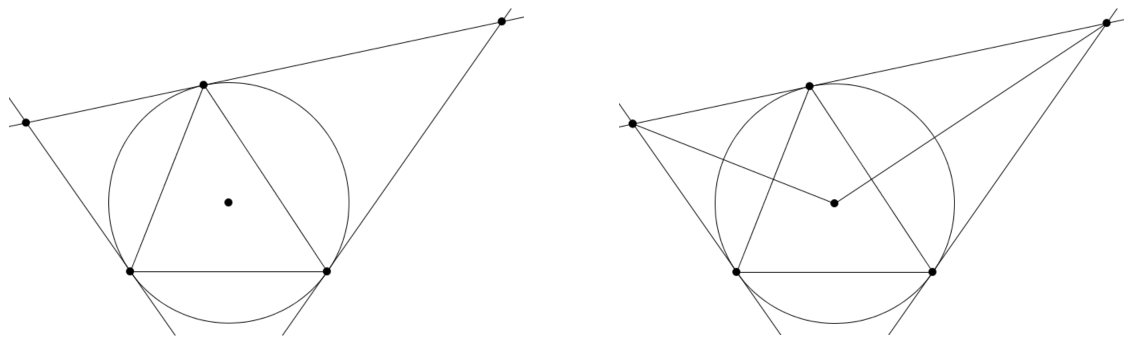
Die beiden Katheten stehen aufeinander senkrecht, also ist $m_1 \cdot m_2 = -1$, was zu $a^2 + b^2 = r^2$, also dem Satz des *Pythagoras* (in einem anderen Dreieck) führt.



Auch anderen Übersetzungen sind möglich: Was passiert mit dem Satz des *Thales*, wenn man Punkte und Geraden miteinander vertauscht? Aus drei Kreispunkten werden drei Kreistangenten, und beim Kreismittelpunkt ergibt sich stets ein rechter Winkel:

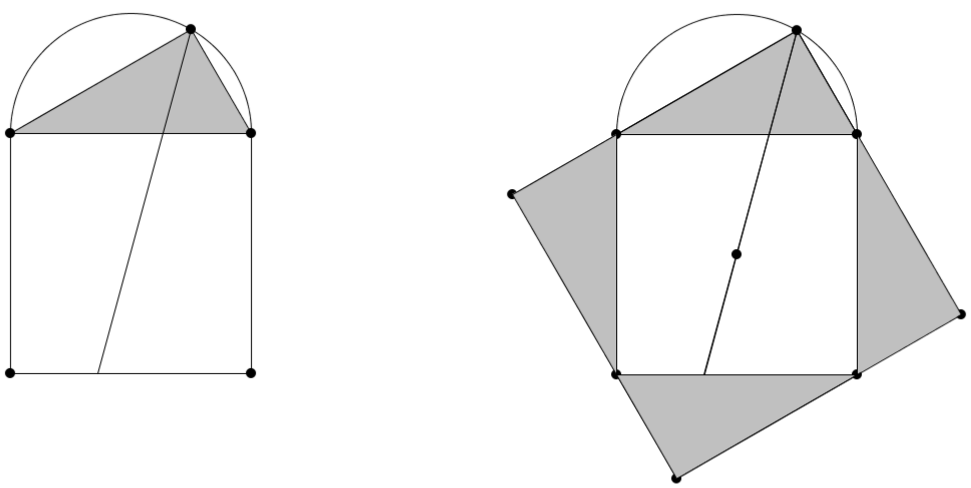


Analoges stellt man bei der *Dualisierung des Umfangswinkelsatzes* fest: Der Winkel beim Kreismittelpunkt ist unabhängig von der Lage des Peripheriepunktes.



3. Symmetrie beim Problemlösen

Hierzu gibt es viel Literatur; als nicht so bekanntes Beispiel sei hier auf den Satz von *Eddy* verwiesen: Die innere Winkelhalbierende des rechten Winkels in einem rechtwinkligen Dreieck teilt das Hypotenusenquadrat in zwei gleich große Teile. Durch Symmetrisierung zu einer Superstruktur ergibt sich der einfache Beweis:



4. Symmetrie in einem geometrisierbaren Kontext: Potenzsummen

Lässt sich der „Trick des kleinen Gauß“ auf *Quadratsummen* verallgemeinern? Die Antwort lautet „ja!“, wie man hier auf zwei Arten sieht:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 5 & & \\
 & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & \\
1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 5 & & 3 & & 1 & & \\
 & 7 & & 5 & & 3 & & 1 & \\
9 & & 7 & & 5 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

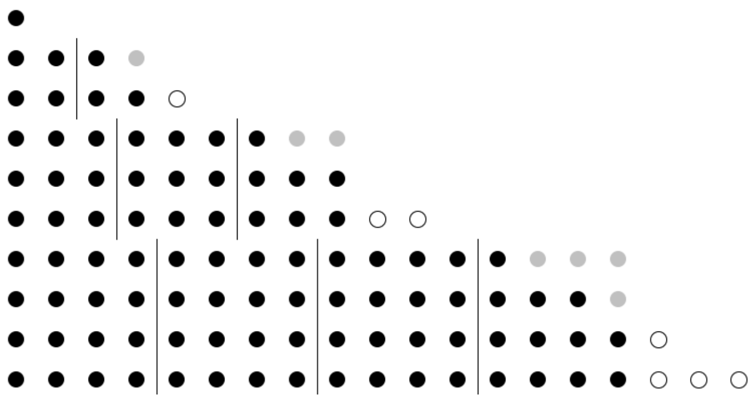
$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 9 & & & & \\
 & & & 7 & & 7 & & & \\
 & & 5 & & 5 & & 5 & & \\
 & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}
$$

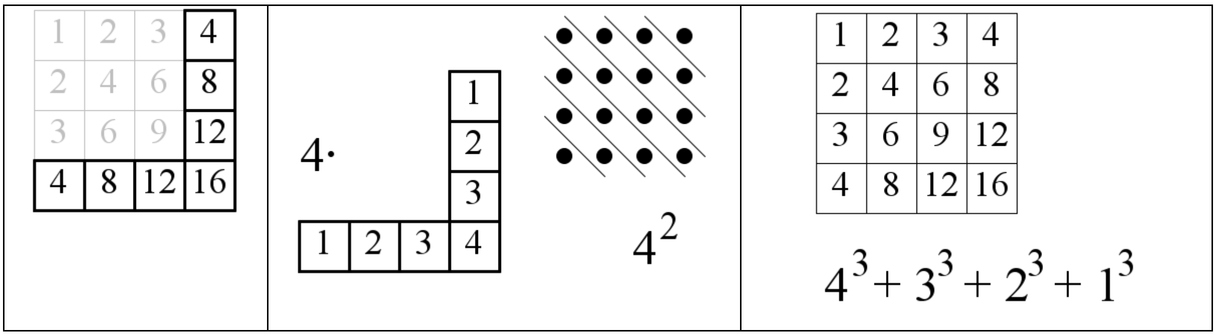
$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & = 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & & & & = 4 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & = 9 \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & = 16 \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & = 25 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
=4 & 3 & 4 & 5 & & \\
=9 & 4 & 5 & & & \\
=16 & 5 & & & & \\
=25 & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrrl}
5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
 & 5 & 4 & 3 & 2 & =1 \\
 & & 5 & 4 & 3 & =4 \\
 & & & 5 & 4 & =9 \\
 & & & & 5 & =16 \\
 & & & & & =25
\end{array}
$$

Erstaunlicherweise ist der Zugang zu *Kubensummen* leichter, wie man wiederum auf mehrere Arten einsehen kann:

$$
\underbrace{1}_{1}\quad \underbrace{3\ \ 5}_{8}\quad \underbrace{7\ \ 9\ \ 11}_{27}\quad \underbrace{13\ \ 15\ \ 17\ \ 19}_{64}\quad \underbrace{21\ \ 23\ \ 25\ \ 27\ \ 29}_{125}
$$





Ordnet man die Einträge der 1*1-Tafel zeilenweise, bekommt man

$$1\cdot(1+2+3+4)+2\cdot(1+2+3+4)+3\cdot(1+2+3+4)+4\cdot(1+2+3+4).$$

5. Unvermutete Symmetrien bei magischen Quadraten

Magische Quadrate liefern schöne Anlässe zu nichttrivialen linearen Gleichungen:

Vervollständige die Figur zu einem magischen Quadrat mit der magischen Summe 15.

4	9	2
x		

4	9	2
11-x	13-x	2x-9
x		

4	9	2
11-x	13-x	2x-9
x	x-7	22-2x

Man sieht hier: Die Operationszeichen werden in der Algebra zu Bestandteilen eines Zahlnamens.

Zurück zu Symmetrien!

8	1	6
3	5	7
4	9	2

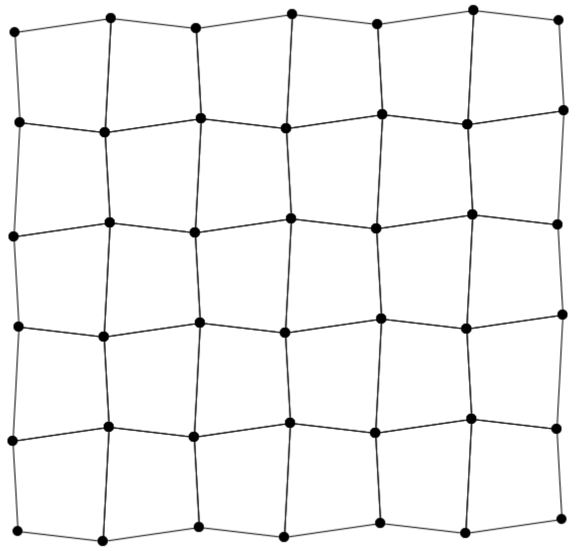
8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2
8	1	6	8	1	6
3	5	7	3	5	7
4	9	2	4	9	2

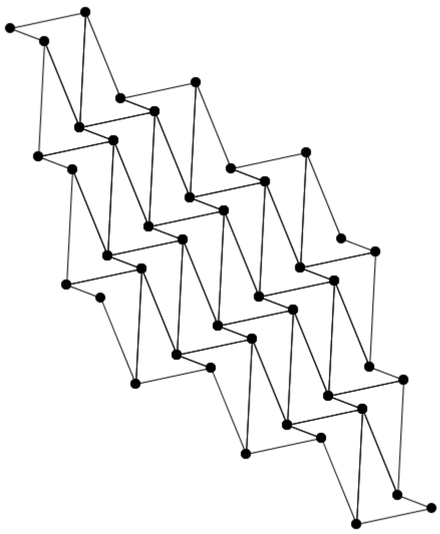
Fünfreihige magische Quadrate weisen eine analoge Struktur auf.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

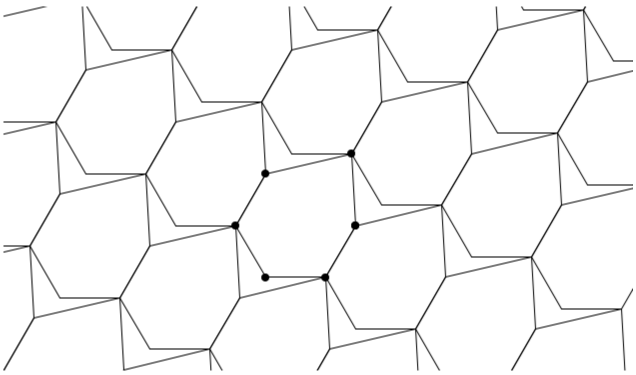
6. Symmetrien erzeugen Muster

Man kann mit einem *beliebigen Viereck* (das gar nicht konvex zu sein braucht) die Ebene pflastern, indem man das Ausgangsviereck jeweils an den Mittelpunkten seiner Seiten spiegelt. Die Begründung führt zu einer fruchtbaren Wiederholung bekannten geometrischen Wissens und führt zur Frage, ob es mit beliebigen Sechsecken auch geht.





Bei *Sechsecken* geht es nicht mehr!

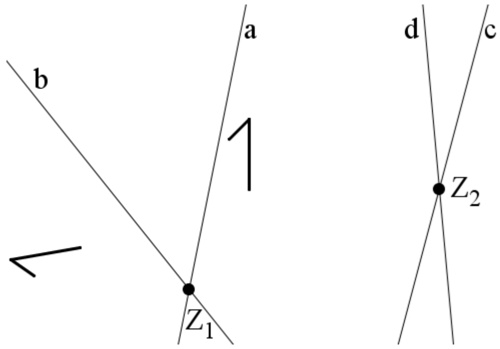


7. Zusammensetzung von Symmetrieabbildungen

Die Kombination von Achsenspiegelungen sind in manchen Ländern noch Standardstoff; der Dreispiegelungssatz wohl nirgendwo mehr. Auch früher schon wurde die folgende Frage selten behandelt: Was ist, wenn man zwei *Drehungen* (mit verschiedenen Drehzentren) *kombiniert*? Hier ist die Verwendung „neuer“ Technologien sehr hilfreich.

Die „1“ wird erst um Z_1 gegen den Uhrzeigersinn gedreht, d.h. erst an a und dann an b gespiegelt. Das Endresultat wird dann um Z_2 gegen den Uhrzeigersinn gedreht, d.h. erst an c und dann an d gespiegelt.

Man bekommt das (im Bild nicht gezeigte) Endresultat durch die (von rechts nach links zu lesende) Spiegelungsfolge $Sp_d \circ Sp_c \circ Sp_b \circ Sp_a$.

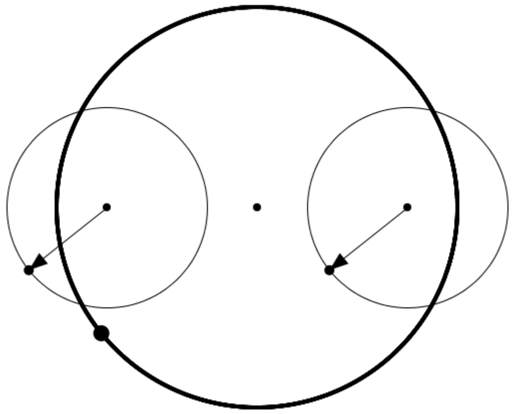


Wählt man b und c so, dass beide miteinander übereinstimmen, so hat man nur noch die Spiegelungsfolge $Sp_d \circ Sp_a$ und mithin eine Drehung. Die beiden Geraden b und c stimmen genau dann überein, wenn b durch Z_1 und c durch Z_2 geht. Das Drehzentrum ist der sich dann ergebende Schnittpunkt von a und d. Weitere Überlegungen führen auch zum Drehwinkel.

8. Zusammensetzung von Kreisbewegungen

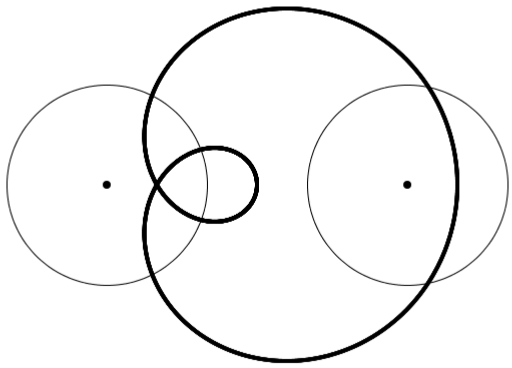
Was passiert, wenn man zwei (gleichförmige) Bewegungen auf zwei verschiedenen Kreisen addiert?

Das Resultat ist noch wenig überraschend; es ergibt sich ein großer Kreis. Ändert man den Abstand beider Ausgangskreise, ändert sich am Ergebnis nichts. Ändert man den Radius von einem der Ausgangskreise, so bleibt das Resultat ein großer Kreis (mit allerdings anderem Radius).

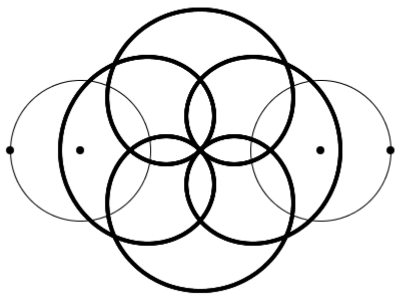


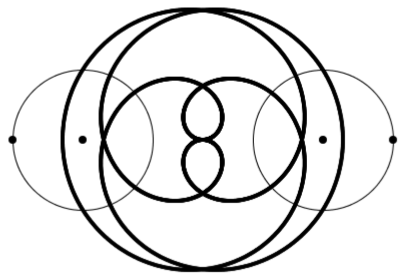
Interessanter ist der Fall, dass sich der Punkt auf dem einen Ausgangskreis doppelt so schnell bewegt wie der der Punkt auf dem anderen Ausgangskreise.

Wieder ist der Abstand beider Ausgangskreise irrelevant. Ändert man den Radius des einen Ausgangskreises, so kann die Schleife zu einer Spitze entarten bzw. ganz verschwinden.

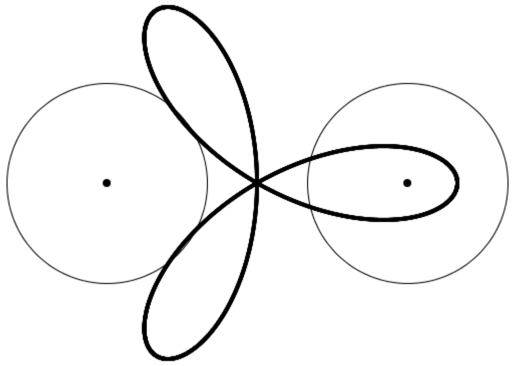


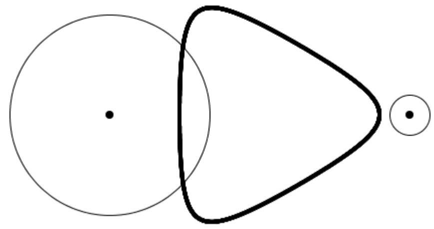
Schöne Bilder ergeben sich bei den Radienverhältnissen 5:1 oder 5:3:



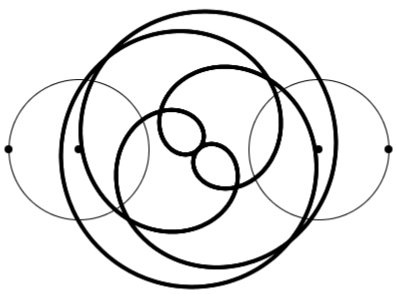


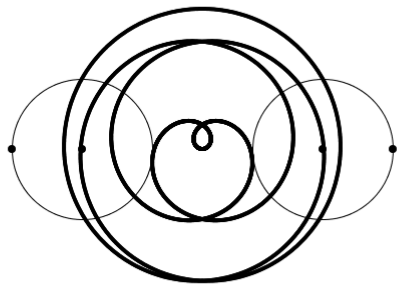
Der Fall, dass sich die Kreisbewegungen gegenläufig mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, ist uninteressant, da sich eine Gerade ergibt. Wiederum interessanter ist der Fall, dass das Geschwindigkeitsverhältnis 1:2 beträgt. Wiederum ist der Abstand der Originalkreise irrelevant, aber nicht das Radienverhältnis:





Schöne Ergebnisse bekommt man auch, wenn man Phasenwechsel einbaut:

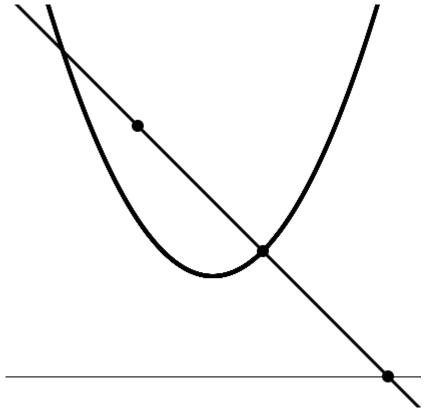


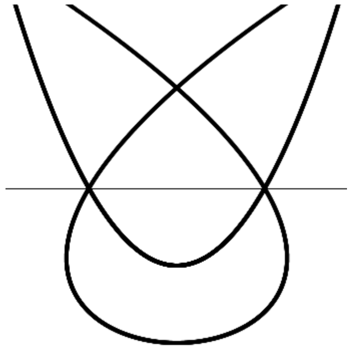


Natürlich braucht man bei zwei Kreisen nicht stehen zu bleiben!

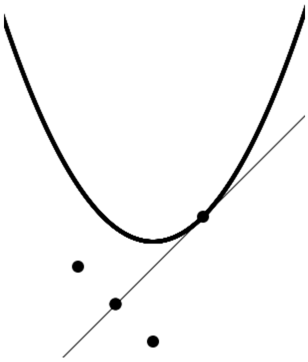
9. Spiegelungen an Kurven

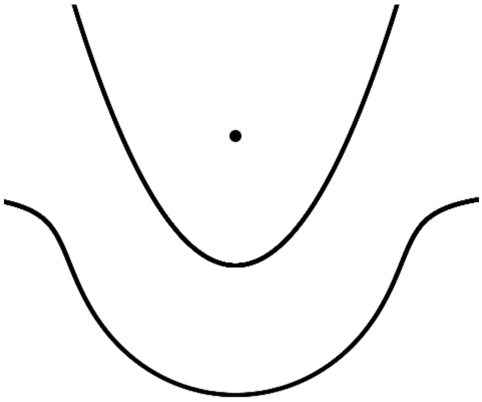
Symmetrie hat mit Spiegelungen zu tun. Man kann auch an *Kurven* spiegeln, etwa an der *Parabel*: Man sucht sich zum zu spiegelnden Punkt den nächstgelegenen Parabelpunkt (nein, so geht es nicht: Man fährt die Parabelnormalen ab, bis man den zu spiegelnden Punkt trifft) und vollführt am Parabelpunkt eine Punktspiegelung. Bildet man eine (zur Parabelachse senkrechte) Gerade auf diese Weise so ab, so bekommt man (je nach Abstand der Geraden vom Brennpunkt) unterschiedlich (kubische) Kurven:



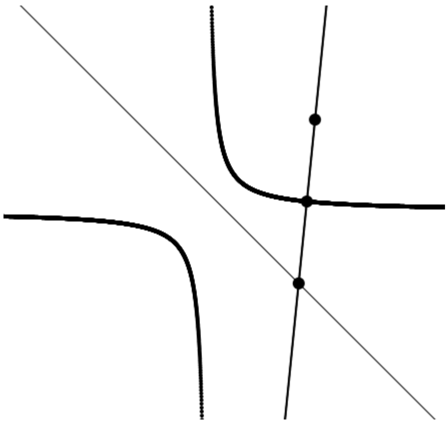


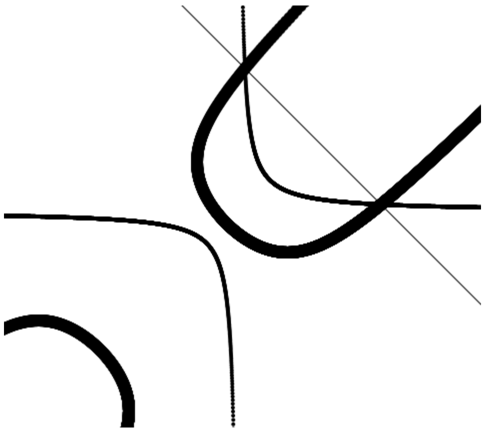
Man hätte die Parabelspiegelung auch anders definieren können: Man nehme einen Punkt auf der Parabelachse und spiegele ihn an allen Parabeltangenten. Auch hier bekommt man (je nach Lage des Ausgangspunktes) unterschiedliche (kubische) Kurven:

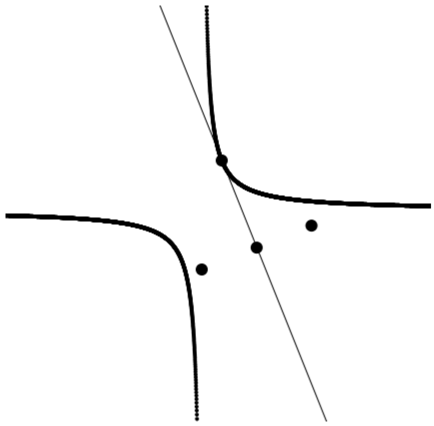


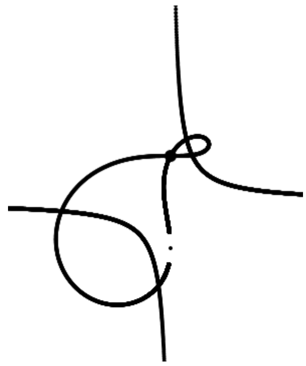


Das alles funktioniert auch mit der (der Einfachkeit halber gleichseitigen) *Hyperbel*; allerdings machen hier die Resultate einen weniger ästhetischen Eindruck:

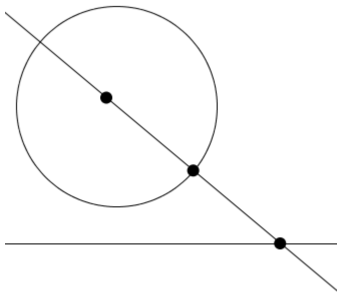


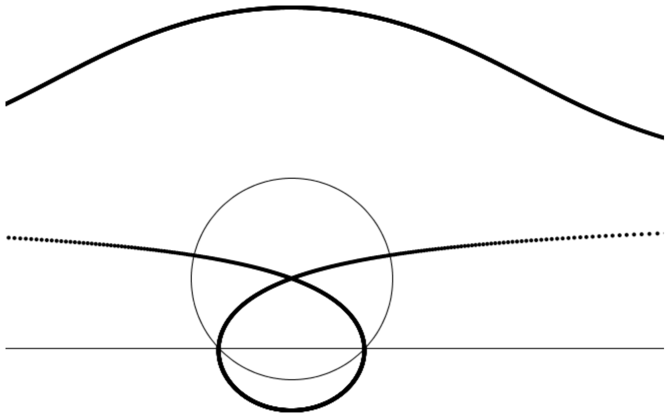


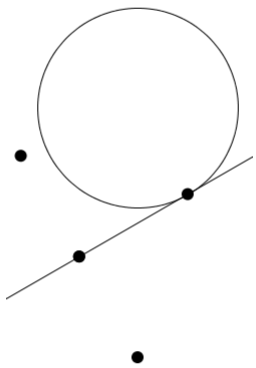


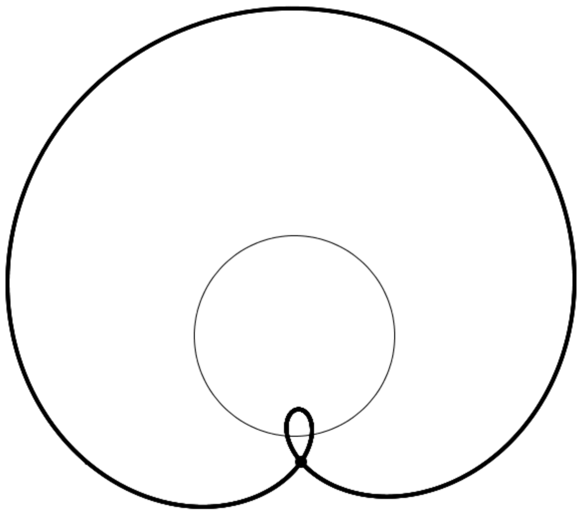


Besser, d.h. schöner wird es wieder, wenn man diese Operationen am *Kreis* ausführt:









10. Schlussbemerkung

Sicherlich wurde in den beiden letzten Abschnitten dem Spieltrieb gefrönt. Nun wird man als Lehrperson den Lernlingen nicht vorschreiben wollen, welche Radienverhältnisse oder welche Operationen an welchen Kurven vorgenommen werden sollen. Wenn dann der (durchaus mathematikträchtige) Spieltrieb bei den Lernenden geweckt wird, wenn diese die Überraschung erlebten, welch schöne Kurven entstehen können (und welche Symmetrien sie haben), dann muss das der Motivgebung im Mathematikunterricht nicht abträglich sein.