Ein „neuer“ Aufgabentyp von Dreieckskonstruktionen?!

Stephanie Gleich

Im Rahmen einer geplanten Dissertation werden Problemstellungen zur Dreieckskonstruktion analysiert, welchen, unseren Recherchen nach, erstaunlicherweise bisher noch keine Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Im ersten Kapitel dieses Artikels soll daher ein erster Einblick in diesen Aufgabentyp gegeben werden, indem der Aufbau der Aufgaben, der einem naheliegenden Grundprinzip folgt, vorgestellt und die Anzahl der resultierenden Problemstellungen genannt werden. Im zweiten Kapitel werden exemplarisch zwei Problemstellungen bearbeitet und daran zentrale Fragestellungen der Aufgabenanalyse präsentiert. Abschließend werden Möglichkeiten des weiteren Verlaufs der geplanten Dissertation thematisiert.

Um die Beschreibung des Aufgabentyps zur Dreieckskonstruktion und dessen Bearbeitung unmissverständlich darzustellen, werden folgende einheitliche Abkürzungen von merkwürdigen Linien im Dreieck ABC verwendet:

Mittelsenkrechte zur Dreiecksseite a, b, c	m_a, m_b, m_c
Winkelhalbierende des Innenwinkels bei A, B, C	w_a, w_b, w_c
Höhe auf die Dreiecksseite a, b, c	h_a, h_b, h_c
Seitenhalbierende der Dreiecksseite a, b, c	s_a, s_b, s_c

1. Generierung von Problemstellungen eines „neuen“ Aufgabentyps

Ausgangspunkt der Erstellung neuer Problemstellungen zur Dreieckskonstrunktion sind die Arbeiten von Weth (2002) und Schupp (2006). Auf unterschiedliche Weisen werden darin folgende vier Aufgaben bearbeitet, in denen jeweils aus gegebenen Bedingungen ein Dreieck konstruiert wird:

Gegeben sind drei kopunktale Geraden g_1, g_2, g_3 (siehe Abb. 1).

Gesucht ist ein Dreieck ABC, bei dem die gegebenen Geraden entweder

- Mittelsenkrechten oder
- Winkelhalbierende oder
- Höhen oder
- Seitenhalbierende darstellen (siehe Abb. 2). [1]

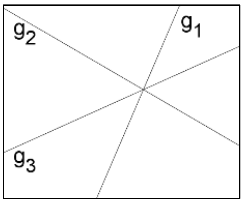


Abbildung 1

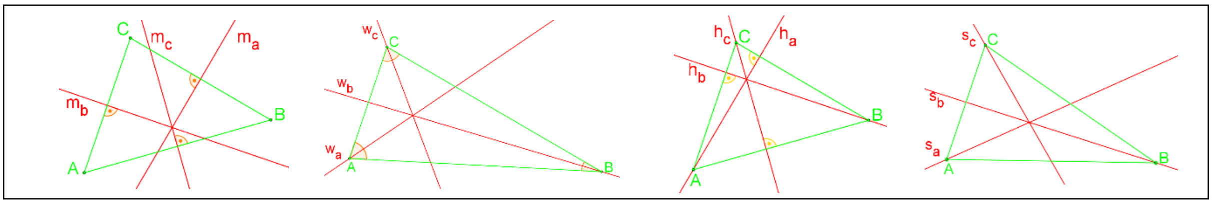


Abbildung 2

Als Variation dieser Aufgabenstellungen können nun weitere Problemstellungen erzeugt werden (Schupp, 2002), indem neue Kombinationen der Eigenschaften der gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 zugelassen werden. Zum Beispiel können zwei der gegebenen Geraden Mittelsenkrechten und die dritte Winkelhalbierende im zu konstruierenden Dreieck sein (siehe Abb. 3a). Oder alle drei Geraden besitzen unterschiedliche Eigenschaften im zu konstruierenden Dreieck (siehe Abb. 3b).

[1] In Abbildungen dieses Artikels werden generell gegebene Bedingungen einer Konstruktion in rot und gesuchte Figuren in grün dargestellt.

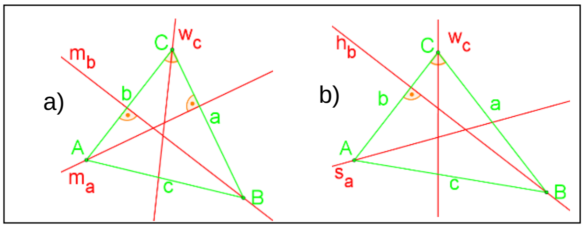


Abbildung 3

Kombinatorische Überlegungen ergeben, dass durch diese Aufgabenvariation bereits 48 Problemstellungen des Typs „Gegeben sind drei Geraden. Gesucht ist in Dreieck, bei dem diese Geraden bestimmte merkwürdige Linien darstellen“ generiert werden können. Lässt man in diesem Aufgabentyp auch merkwürdige Punkte, wie Umkreismittelpunkt U, Inkreismittelpunkt I, Höhenschnittpunkt H oder Schwerpunkt S als gegebene Bestimmungsstücke des Dreiecks zu, so entstehen weitere Aufgaben zu diesem Aufgabentyp. Zum Beispiel kann man statt dreier Geraden nur zwei Geraden und zusätzlich einen Punkt vorgeben oder ausschließlich - also drei - Punkte. Durch die Kombination dieser unterschiedlichen Punkte und Geraden in den drei gegebenen Bestimmungsstücken des Dreiecks, können insgesamt 140 Problemstellungen und damit ein „neues“ Arbeitsfeld generiert werden. Die Anzahl der Aufgaben wächst rasant, wenn man zusätzlich „außercurriculare“ Punkte und Linien am Dreieck berücksichtigt, wie zum Beispiel die Gergonne-Geraden, Symmediane oder den Fermatpunkt. Eine Hinzunahme von allein sechs „außercurricularen“ Punkten und Geraden ergeben nach kombinatorischen Berechnungen, bereits über 2300 Problemstellungen, die alle dem Prinzip folgen: „Gegeben sind n Geraden und m Punkte (mit m + n = 3). Gesucht ist ein Dreieck, bei dem…“.
Ein offenes, zu analysierendes Problem ist nun, ob die gesuchten Dreiecke existieren und wieviele nicht kongruente oder ähnliche Lösungen konstruierbar sind.

2. Analyse der Problemstellungen: exemplarische Bearbeitung

Bei der Analyse der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen Aufgaben stellen sich prinzipiell folgende zwei Probleme:

1) *Bedingungsanalyse:* In einem ersten Schritt werden die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Lösung ermittelt.
2) *Konstruktion:* In einem zweiten Schritt stellt sich das eigentliche Problem der Konstruktion.

Die folgenden beiden Beispielaufgaben unterscheiden sich derart, dass einmal die *Bedingungsanalyse* und in der anderen Aufgabe die *Konstruktion* umfangreich zu bearbeiten ist. Damit können beide Aspekte, *Bedingungsanalyse* und *Konstruktion,* an unterschiedlichen Aufgaben ausführlich erläutert werden.

<u>*Aufgabenbeispiel 1:*</u>
Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2, g_3.
Gesucht ist ein Dreieck ABC, bei dem diese Geraden die Mittelsenkrechten m_a und m_b und die Winkelhalbierende w_c sind (siehe Abb. 4).

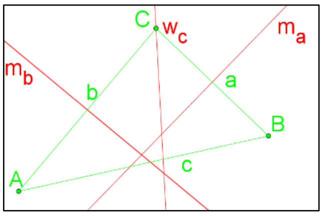


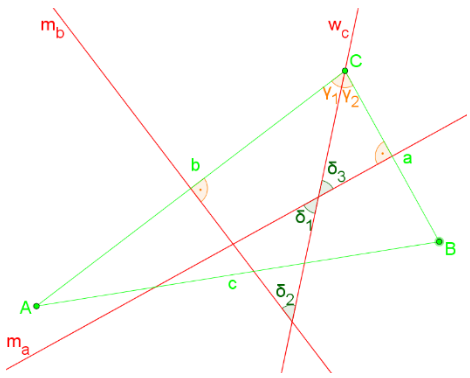
Abbildung 4

1) Bedingungsanalyse

Die Aufgabenstellung weist gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 im zu konstruierenden Dreieck bestimmte Eigenschaften zu. Da nicht auszuschließen ist, dass diese gegebenen Geraden als merkwürdige Linien (hier: m_a, m_b und w_c) im Dreieck ABC nicht beliebig zueinander liegen dürfen, müssen entsprechende notwendige Bedingungen zu den Lageeigenschaften der Geraden ermittelt werden.

Als heuristische Strategie kann man zum Beispiel zunächst ein beliebiges Dreieck ABC mit Hilfe einer Dynamischen Geometrie-Software (DGS) konstruieren und die entsprechenden Bestimmungsstücke aus der Aufgabenstellung einzeichnen. Durch Variation der Figur können erste Hypothesen zur Lage der gegebenen Geraden aufgestellt werden. In der Beispielaufgabe erscheint die (ggf. offensichtlich erscheinende, aber beweisbedürftige) zusätzliche Bedingung erforderlich, dass die Geraden $\mathrm{m_a}$, $\mathrm{m_b}$ und $\mathrm{w_c}$ nicht paarweise parallel zueinander liegen dürfen. Eine Betrachtung der Planfigur unter Berücksichtigung von Winkel - und Längenverhältnissen von Teilstrecken der Bestimmungsgeraden liefert weitere Bedingungen zur Lösbarkeit der Aufgabe. Es entsteht die Vermutung, dass in dem Dreieck, das die drei gegebenen Geraden einschließen, die beiden Innenwinkel $\sphericalangle(\mathrm{w_c},\mathrm{m_b}) = \delta_2$ und $\sphericalangle(\mathrm{m_a},\mathrm{w_c}) = \delta_1$ zwischen der Winkelhalbierenden und jeweils einer Mittelsenkrechten gleich groß sind bzw. sein müssen. Durch einen Beweis (siehe Abb. 5) lässt sich diese Vermutung bestätigen.[2] Zudem kann ein weiterer (neuer) Zusammenhang im Dreieck ermittelt werden, dass das Winkelmaß der beiden Schnittwinkel $\delta_1 = \delta_2 = 90°- \frac{\gamma}{2}$ beträgt. Ob die genannten Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Konstruktion eines Dreiecks ABC sind, ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht sicher. Prinzipiell kann bei diesem Aufgabentyp nie ausgeschlossen werden, dass weitere notwendige Bedingungen existieren, die noch nicht ermittelt wurden.

<u>Behauptung:</u> $\mathrm{m_a}, \mathrm{m_b}$ und $\mathrm{w_c}$ des Dreiecks ABC schließen ein gleichschenkliges Dreieck ein.



<u>Beweis:</u>
Mit obiger Skizze gilt:

1) $\gamma_1 = \gamma_2$	(Voraussetzung)
2) $\delta_3 = 90° - \gamma_2$	(IWS Dreieck, $\mathrm{m_a}$)
3) $\delta_1 = \delta_3$	(Scheitelwinkel)
4) $\delta_2 = 90° - \gamma_1$	(IWS Dreieck, $\mathrm{m_b}$)
5) $\delta_1 = \delta_2$	(1, 2, 3, 4)

Abbildung 5

2) Konstruktion

Die in der Bedingungsanalyse gewonnenen notwendigen Bedingungen müssen in der Konstruktion des Dreiecks ABC beachtet werden und die drei Geraden so vorgegeben werden, dass sie den Bedingungen genügen. Unter Berücksichtigung des Satzes „Wenn die merkwürdigen Linien $\mathrm{m_a}$, $\mathrm{m_b}$ und $\mathrm{w_c}$ des Dreiecks ABC gegeben sind, dann gilt: $\delta_1 = \delta_2$ (vgl. Abb. 5)“ ist die Konstruktion eines Dreiecks ABC, ausgehend von den drei gegebenen Geraden, möglich.

<u>Konstruktionsbeschreibung (siehe Abb. 6):</u>
Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).
Gesucht: Ein Dreieck ABC, bei dem die Geraden $\mathrm{m_a}$, $\mathrm{m_b}$ und $\mathrm{w_c}$ sind.

Es seien $g_1 = \mathrm{m_a}$, $g_2 = \mathrm{m_b}$ und $g_3 = \mathrm{w_c}$

1) Es sei C ein Punkt auf $\mathrm{w_c}$.[2]
2) Der Bildpunkt der Achsenspiegelung von C an $\mathrm{m_b}$ ist der Punkt B.

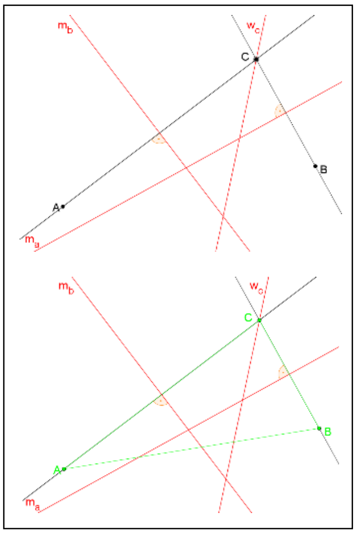


Abbildung 6

[2] Im beschriebenen Aufgabentyp gelten Winkelhalbierende als Innenwinkelhalbierende eines Dreiecks. Für die Beispielaufgabe 1 muss der Punkt C auf $\mathrm{w_c}$ außerhalb des von $\mathrm{m_a}$, $\mathrm{m_b}$ und $\mathrm{w_c}$ aufgespannten Dreiecks liegen, da $\mathrm{w_c}$ ansonsten eine Außenwinkelhalbierende darstellen würde.

3) Der Bildpunkt der Achsenspiegelung von C an $\mathrm{m_a}$ ist der Punkt A.
4) Die Punkte A, B und C bilden das gesuchte Dreieck ABC.

Während im ersten Beispiel die Bedingungsanalyse vergleichsweise aufwendig war, erweist sich im zweiten Beispiel die Konstruktion als umfangreicher.

<u>*Aufgabenbeispiel 2:*</u>
Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2, g_3.
Gesucht ist ein Dreieck ABC, bei dem diese Geraden die Winkelhalbierenden w_a und w_b und die Mittelsenkrechte m_c sind (siehe Abb. 7).

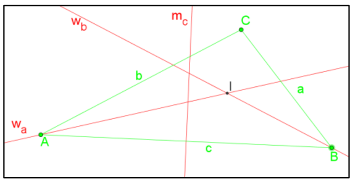


Abbildung 7

1) Bedingungsanalyse:
Da die gegebenen Geraden im Dreieck ABC die Winkelhalbierenden $\mathrm{w_a}$ und $\mathrm{w_b}$ und die Mittelsenkrechte $\mathrm{m_c}$ darstellen, dürfen sie nicht paarweise parallel oder senkrecht zueinander verlaufen. Mit Berücksichtigung dieser beweisbedürftigen Bedingungen kann ein Dreieck ABC auf die im Folgenden dargestellte Weise konstruiert werden. Dass ggf. weitere notwendige Bedingungen existieren, sei auch bei dieser exemplarischen Bearbeitung nicht ausgeschlossen.

2) Konstruktion
In diesem Falle gelingt eine Lösungskonstruktion mit Hilfe der (n-1)-Strategie (Weth, 2002). Danach wird

A) in einem ersten Konstruktionsschritt nach einer Konstruktionsidee gesucht, indem zunächst eine Figur so konstruiert wird, dass sie nur n-1 gegebenen Bedingungen genügt. Durch anschließendes Variieren der Figur und Erzeugen von Ortslinien, soll auf eine zielführende Konstruktionsidee geschlossen werden.
B) Im zweiten Konstruktionsschritt wird dann die gesuchte Figur mit zu Hilfenahme der in A) ausfindig gemachten Konstruktionsidee konstruiert.

Im Konstruktionsschritt A) wird in diesem Beispiel zunächst ein Dreieck A'B'C' mit Hilfe einer DGS konstruiert, das allen gegebenen Bedingungen genügt, bis auf die Eigenschaft der Mittelsenkrechten $\mathrm{m_c}$, die Dreiecksseite [A'B'] zu halbieren (also n – 1 Bedingungen).

<u>Konstruktionsbeschreibung zur Ideenfindung:</u>
Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).
Gesucht: Eine Ortslinie o am Dreieck A'B'C', die bei der späteren Dreieckskonstruktion hilft.

1) Es sei A' ein beliebiger Punkt auf $\mathrm{w_a}$ (wobei A' $\notin \mathrm{w_b}$).
2) Das Lot auf $\mathrm{m_c}$ durch A' sei c'.
3) Der Schnittpunkt von c' und $\mathrm{w_b}$ sei B'.
4) Die Bildgeraden der Spiegelung von c' an $\mathrm{w_a}$ und $\mathrm{w_b}$ seien b' und a'.
5) Der Schnittpunkt von b' und a' sei C'.
6) Die Punkte A', B' und C' bilden das Hilfsdreieck A'B'C' (siehe Abb. 8).

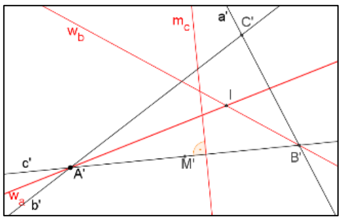


Abbildung 8

Im nächsten Schritt soll entsprechend der (n-1)-Strategie ein passender Punkt zum Erzeugen einer Ortslinie gewählt werden, die dann (hoffentlich) eine Beweisidee liefert. Da die noch zu erfüllende Bedingung „m_c halbiert [A'B']" lautet, bietet sich als nächster Konstruktionsschritt an:

7) Der Mittelpunkt von A' und B' sei M'.
8) Durch Variation des Punktes A' auf w_a entsteht dann eine Ortslinie o von M' (siehe Abb. 9).

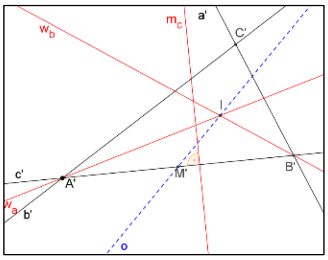


Abbildung 9

Die Ortslinie o ist also die Menge aller Mittelpunkte der zu [A'B'] parallel verlaufenden Strecken, deren Endpunkte jeweils auf w_a und w_b liegen. Der Schnittpunkt von o und m_c stellt damit den Mittelpunkt der Seite [AB] im gesuchten Dreieck ABC dar. Wäre die Ortslinie o, wie es scheint, eine Gerade durch M' und den Schnittpunkt I der beiden Winkelhalbierenden, so könnte diese Gerade M'I im zweiten Schritt B) verwendet werden, um das gesuchte Dreieck ABC zu konstruieren. Dass dies tatsächlich so ist, kann über den zweiten Strahlensatz und seine Umkehrung bewiesen werden (siehe Beweis: Abb. 10).

<u>Behauptung:</u> Die Ortslinie o ist eine Gerade.
<u>Beweis</u>: Mit nebenstehender Skizze gilt:

1) Es seinen $[A_1\ B_1]$ und $[A_2\ B_2]$ zwei beliebige parallele Strecken, die durch Variation von A' auf w_a entstehen (Voraussetzung)
2) M_1 bzw. M_2 halbieren $[A_1\ B_1]$ und $[A_2\ B_2]$ (Voraussetzung)
3) Die Geraden w_a und w_b schneiden sich in einem Punkt I (Voraussetzung)
4) Es gilt: $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1I}}{\overline{B_2I}}$ (1, 2, 3, zweiter Strahlensatz)
5) $\overline{A_1B_1} = 2 \cdot \overline{M_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2} = 2 \cdot \overline{M_2B_2}$ (2)
6) Damit gilt auch: $\frac{\overline{M_1B_1}}{\overline{M_2B_2}} = \frac{\overline{B_1I}}{\overline{B_2I}}$ (4, 5)
7) M_1M_2 ist eine Gerade durch I (1, 2, 6, Umkehrung zweiter Strahlensatz)

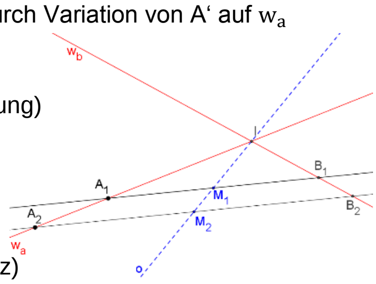


Abbildung 10

Im folgenden Konstruktionsschritt B) wird das Dreieck ABC unter Zuhilfenahme der Geraden M'I konstruiert.

<u>Konstruktionsbeschreibung des Dreiecks ABC:</u>
Gegeben: Drei Geraden g_1, g_2, g_3 (unter Berücksichtigung notwendiger Lagebedingungen).
Gesucht: Ein Dreieck ABC, bei dem die Geraden w_a, w_b und m_c sind.

1) Es sei A' ein beliebiger Punkt auf w_a, wobei A' $\notin w_b$.
2) Das Lot auf m_c durch A' sei c'.
3) Der Schnittpunkt von c' und w_b sei B'.
4) Der Mittelpunkt von A' und B' sei M'.
5) Der Punkt M' und der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden I legen die Gerade M'I fest (siehe Abb. 11 a).
6) Der Schnittpunkt von M'I und m_c sei M.
7) Die Parallele zu c' durch M sei c.
8) Die Schnittpunkte von c und w_a bzw. w_b sind die Punkte A bzw. B (siehe Abb. 11 b).
9) Die Bildgeraden von c, gespiegelt an w_a bzw. w_b, seien b bzw. a.
10) Der Schnittpunkt der beiden Geraden a und b sei der Punkt C.
11) Die Punkte A, B und C bilden dann das gesuchte Dreieck ABC (siehe Abb. 11 c).

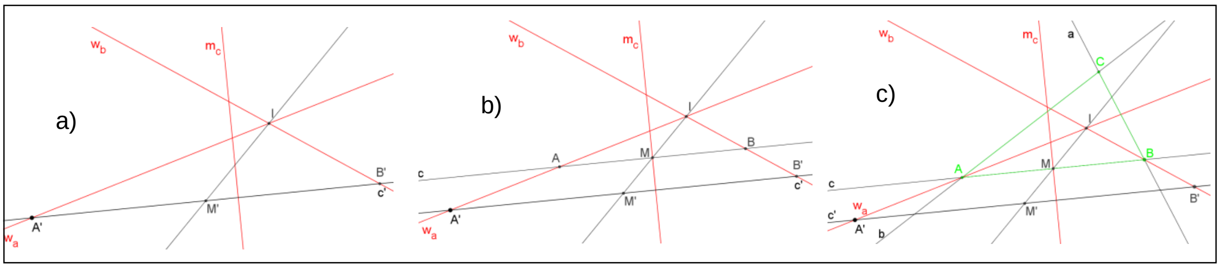


Abbildung 11

Mit den exemplarischen Lösungen der Beispielaufgaben 1 und 2 wurde ein erster Einblick in die Aspekte dieses (neuen(?)) Aufgabentyps zu Dreieckskonstruktionen gegeben.

Zusammenfassend sollen mit der Aufgabenanalyse folgende zentralen Fragestellungen beantwortet werden:

- Existiert eine Lösung der einzelnen Problemstellungen und wenn ja, unter welchen Bedingungen?
- Welche Lösungsstrategien helfen bei der Konstruktion der Dreiecke? Welche unterschiedlichen Lösungswege (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) sind möglich?

3. Ausblick

Im Rahmen einer Dissertation soll die im Kapitel 2 beschriebene Aufgabenanalyse des Aufgabentyps zu Dreieckskonstruktionen (vgl. Kapitel 1) durchgeführt werden. Unter Beachtung auch „außercurricularer“ Punkte und Geraden als Bestimmungsstücke in der Aufgabenstellung, stellt sich hierbei die Frage, wie man über 2300 Aufgaben bearbeiten bzw. analysieren kann. Folgende Ideen sollen ein Vorgehen andeuten, wie die Bearbeitung der Problemstellungen nicht nur von der Doktorandin selbst, sondern auch von Studenten, Referendaren und Schülern (im Rahmen von Abschlussarbeiten) durchgeführt werden soll:

- Erste Problemstellungen der Aufgabenanalyse sollen von der Doktorandin selbst systematisch gelöst werden. Insbesondere sollen Gemeinsamkeiten unterschiedlicher Aufgabenbearbeitungen ermittelt werden.
- Basierend auf den Ergebnissen der ersten Aufgabenanalyse soll ein Einführungsseminar für interessierte Studenten, Schüler und Referendare entwickelt werden, in welchem der Aufgabentyp zu Dreieckskonstruktionen nicht nur vorgestellt, sondern auch mögliche Vorgehensweisen zur Bearbeitung der Problemstellungen weitergegeben werden können.
- Die Schüler, Studenten, Referendare und die Doktorandin stehen während der Lösung verschiedener Problemstellungen im Austausch miteinander, so dass ein „didaktisches Viereck“ entsteht.

Literatur

Schupp, Hans (2002) „Thema mit Variation. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht“ Hildesheim: Franzbecker.
Schupp, Hans (2006) „Von den Transversalen zurück zur Figur“. In: Malitte, E. et al. (Hrsg.), Die etwas andere Aufgabe. Hildesheim: Franzbecker.
Weth, Thomas (2002): „Ortslinien als Hilfsmittel zur Problemlösung“ http://www.didmath.ewf.fau.de/Nuernberger-Kolloquium/2002/weth_n-1Strategie.pdf (Stand: 14.08.2017)