Visualisierungen in zwei, drei und manchmal sogar vier Dimensionen

Thomas Wainer

10.9.2017

1. Kurzfassung

Geometrische Veranschaulichungen der drei binomischen Formeln im zweidimensionalen bzw. im dreidimensionalen sind durch geeignete Zerlegungen von Quadraten bzw. Würfeln leicht möglich und mit einem DGS beweglich zu gestalten. Im vierdimensionalen Fall muss analog ein Hyperwürfel zerlegt werden, den man nach Hans Schupp (2008) geeignet als „Quarter" visualisiert. Im Vortrag werden entsprechende Beispieldateien dazu vorgestellt. Darüberhinaus wird ein vierdimensionaler Scherungsbeweis zu einem Spezialfall einer Analogisierung des Satzes des Pythagoras durch Hans Walser (2014) vom rechtwinkligen Dreieck auf rechtwinklige Raumecken visualisiert.

2. Eine Darstellung der vierten Dimension

Um sich gedanklich besser in der vierten Dimension bewegen zu können rekapitulieren man, wie man Darstellungen niedrigerer Dimensionen erhält. Wie in Abbildung 1 zu sehen erhält man aus einem Punkt durch „Ziehen" eine Gerade. Zieht man die Gerade in zur Geraden senkrechter Richtung, so erhält man eine Fläche. Zieht man diese Fläche in den Raum erhält man eine weitere Fläche mit Zwischenkörpern- einen Quader. Zieht man nun den Quader in senkrechter Richtung in einen neuen Raum erhält man einen weiteren Quader mit Zwischenkörpern, den man als Modell eines vierdimensionalen Quaders benutzen kann (vgl. Schupp 2008).

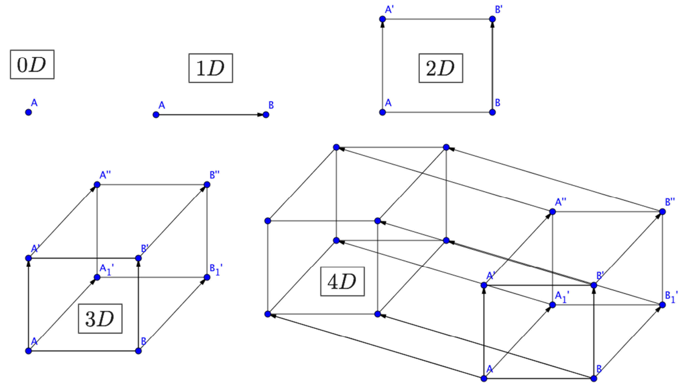

Abbildung 1:Von 1D zu 4D

Für die Zerlegung der binomischen Formel vierten Grades benötigt man eine Darstellung eines Hyperwürfels mit der man die Zerlegung in Teilkörper visualisieren kann. Eine dreidimensionale Darstellung lässt sich durch Parallelprojektion der dritten -der querenden- Dimension, auf ein Zeichenblatt übertragen. Durch das Anwenden des gleichen Prinzips auf den vierdimensionalen Raum, erhält man wie in Abbildung 2 zu sehen die Darstellung des Hyperwürfels im dreidimensionalen Raum. Einen sogenannten „Quarter" (vgl. Schupp 2008).

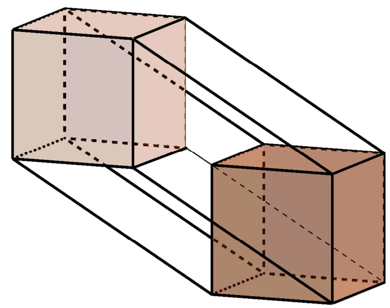

Abbildung 2: Darstellung eines Hyperwürfels

3. Visualisierung der binomischen Formel vierten Grades

Formal- algebraisch lautet die binomische Formel vierten Grades:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Sie beschreibt das vierdimensionale Volumen eines Hyperwürfels mit der Seitenlänge a+b. Der vierdimensionale Würfel lässt sich also in die Figuren a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3 und b^4 zerlegen. Im Folgenden ist die Zerlegung in die einzelnen Formen zu sehen.

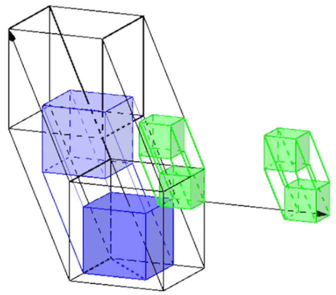

Abbildung 3: a^4 und b^4

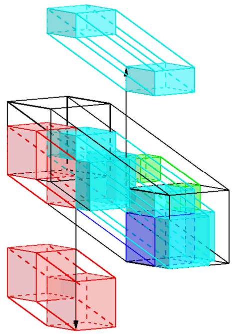

Abbildung 4: a^3b

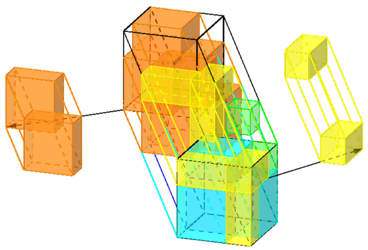

Abbildung 5: a^2b^2

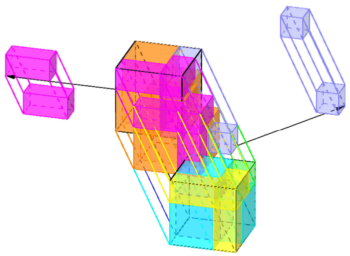

Abbildung 6: ab^3

Das interessante an dieser Stelle ist, dass es für die jeweiligen Körper a^3b, a^2b^2 und ab^3 zwei unterschiedliche Darstellungsformen gibt. Diese Darstellungen resultieren wohl aus der Projektion der vierten Dimension durch Parallelprojektion in die dritte Dimension. Unsere Vorstellungskraft versagt an dieser Stelle. Bei der Projektion eines dreidimensionalen Körpers in die Ebene kann man sich den Körper durch die eigene Vorstellungskraft im imaginären Raum drehen und dadurch mit anderen Körpern vergleichen.

Man nimmt das Beispiel eines Körpers mit den Seitenlängen a^2b. Dieser entsteht, indem man die Fläche a^2 in den dreidimensionalen Raum mit der Länge b zieht und indem man die Fläche ab mit der Länge a in den dreidimensionalen Raum zieht. Man erkennt schnell, dass es sich hierbei um den gleichen Körper handelt, der jedoch gedreht wurde. Analog dazu vermutet man, dass sich die unterschiedlichen Darstellungen der Formen durch „Drehen" im vierdimensionalen Raum als gleiche Formen erweisen.

4. Scherungsbeweis einer Analogisierung des Satzes des Pythagoras durch Hans Walser (2014) und Schumann (2011)

Die Visualisierung des Scherungsbeweises ist nicht komplett ohne Rechnung durchzuführen und ist daher kein reingeometrischer Beweis. Um die Visualisierung im vierdimensionalen Raum durchzuführen wird an manchen Stellen die formal-algebraische Ebene zur Hilfe gezogen. Die hier vorgestellte Visualisierung ist lediglich eine von vielen Möglichkeiten diesen Sachverhalt grafisch darzustellen.

Das rechtwinklige Dreieck in der Ebene wird im Raum zu einer Raumecke eines Würfels (rechtwinkliger Tetraeder) erweitert. Diese Raumecke ist ein unregelmäßiger Tetraeder und besitzt drei rechte Winkel (Walser, 2014).

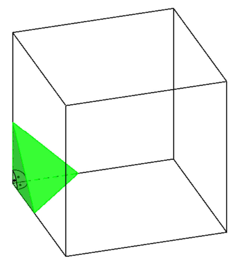

Abbildung 7: Raumecke

Beim Satz des Pythagoras ist das Quadrat gegenüber dem rechten Winkel gleich der Summe der beiden Quadrate über den Katheten. Wendet man dies auf die Raumecke an, so müssten die Quadrate der drei Kathetenflächen K1, K2, K3 und K4 gleich dem Hypotenusenquadrat H sein. Bei den Kathetenflächen handelt es sich um gleichschenklige Dreiecke mit den Seitenlängen a. Die Hypotenusenfläche ist ein gleichseitiges Dreieck.

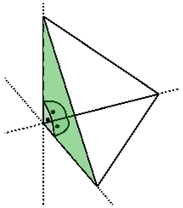
Abbildung 8: K_1

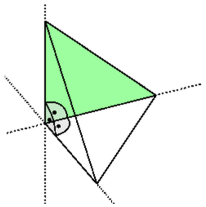
Abbildung 9: K_2

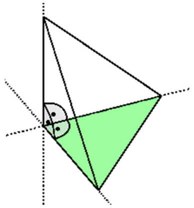
Abbildung 10: K_3

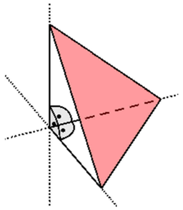
Abbildung 11: H

Formal-algebraisch lässt sich der Zusammenhang schnell zeigen. Es gilt:

$$K_1^2 + K_2^2 + K_3^2 = H^2$$

$$(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a^2}{2}\sqrt{3})$$

$$\frac{3}{4}a^4 = \frac{3}{4}a^4$$

Um diesen Sachverhalt zu visualisieren stellt man die Raumecke zunächst als Netz dar. Die Hypotenusenfläche hat die Fläche $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$, die drei Kathetenflächen jeweils $\frac{1}{2}a^2$. In Abbildung 13 werden die Flächen in den Raum mit der Länge a gezogen. Aus den Kathetendreiecken werden Prismen mit dem Volumen $\frac{1}{2}a^3$, aus dem Hypothenusendreieck wird ein Prisma mit dem Volumen $\frac{1}{2}a^3\sqrt{3}$. Das Hypotenusenprisma zieht man nun mit der Länge $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ in die vierte Dimension und erhält Volumen $\frac{3}{4}a^4$. Man muss nun die drei Kathetenprismen in die vierte Dimension bewegen und diese mit der Figur $\frac{3}{4}a^4$ „flächengleich“ bringen.

Dazu „schert“ man wie in Abbildung 15 zu sehen ein Kathetenprisma zum grünen Körper, den man danach mit der Länge $\frac{1}{2}a$ in die vierte Dimension zieht. Man erhält für das Volumen dieses Körpers $\frac{1}{4}a^4$. Bevor man nun die verbleibenden beiden Kathetenprismen (dunkelblau und rot) in die vierte Dimension verschiebt, verändert man zunächst deren Form. Man „schert“ die beiden Prismen zu einem größeren Prisma. Ein Teil der beiden Prismen ergänzt die grüne Form des Kathenprisma zur Form $\frac{1}{2}a^3\sqrt{3}$. Man trennt diesen Teil von der eigentlichen Form und verschiebt sie in Richtung $\frac{1}{2}a$ in die vierte Dimension. Die beiden verbliebenen Teilprismen verändert man zur hellblauen Form. Das Volumen des hellblauen Körpers beträgt:

$$2 \cdot \frac{a^3}{2} - \frac{\sqrt{2}a^2}{2} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2a})$$

$$= \frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3\sqrt{3}$$

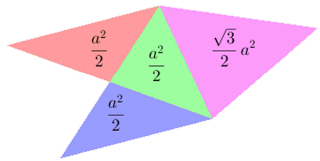

Abbildung 12: Netz Raum Ecke

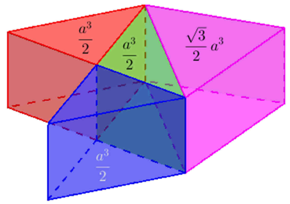

Abbildung 13: 3D Volumen der Flächen

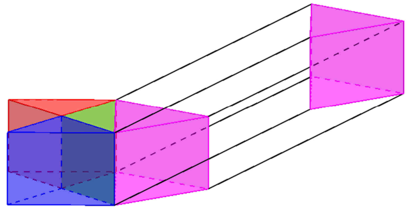
Abbildung 14: Hypotenusenprisma in vierte Dimension

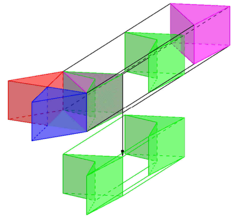
Abbildung 15: Scherung vom grünen Körper und ziehen in die vierte Dimension

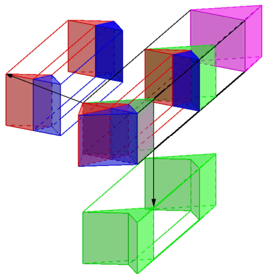
Abbildung 16: Scherung des blauen und roten Prismen

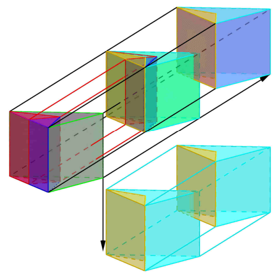
Abbildung 17: Ergänzung und Erweiterung

Nun stößt man auf ein Problem. Man kann, wenn man den hellblauen Körper in die vierte Dimension mit der Länge $\frac{1}{2}a$ zieht, nicht das verbleibende vierdimensionale

Volumen anschaulich auffüllen. Deshalb verändert man die Form. Man „klaut“ etwas Volumen aus der vierten Dimension und fügt es dem hellblauen Körper hinzu, so dass dieser das Volumen des Hypotenusenprisma erhält. Der so entstandene Körper ist in Abbildung 17 gelb dargestellt und besitzt das Volumen von:

$$[V_{lila} + V_{grün}]$$
$$\frac{1}{2}a^3\sqrt{3} - (\frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3\sqrt{3})$$
$$= a^3\sqrt{3} - \frac{3}{2}a^3$$

Um herauszufinden, wie viel Volumen man der vierten Dimension „geklaut“ hat, muss man den Faktor x bestimmen, mit dem man die beiden Körper in die vierte Dimension gezogen hat. Es gilt:

$$(a \cdot x)[V_{gelb} + V_{grün}] = V_{hellblau} \cdot \frac{a}{2}$$
$$(a \cdot x)[(a^3\sqrt{3} - \frac{3}{2}a^3) + (\frac{3}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^3\sqrt{3})] = \frac{3}{4}a^4 - \frac{1}{4}a^4\sqrt{3}$$
$$x = -\frac{1}{6}(-3 + \sqrt{3})\sqrt{3}$$

Man muss also den hellblauen Körper und den gelben Körper mit der Länge $-\frac{1}{6}(-3 + \sqrt{3})\sqrt{3}$ in die vierte Dimension ziehen und kann dadurch die Figur $\frac{3}{4}a^4$ vollständig ergänzen (vgl. Abbildung 17). Diese Visualisierung ist mit viel Rechnerei verbunden und verliert deshalb an Anschauung. An dieser Stelle sollte jedoch gezeigt werden, dass auch Beweise von Flächengleichheiten durch „Scherung“ und Zerlegung bis in den vierdimensionalen Raum möglich sind.

5. Scherungsbeweis der Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras durch Hans Walser (2014)

Der unter Abschnitt 4 dargestellte Sachverhalt lässt sich auf Raumecken mit verschiedenen Seitenlängen übertragen. Verwendet man die Beschriftung der Raumecke aus Abbildung 18, so gilt:

$$K_{ac}^2 + K_{bc}^2 + K_{ab}^2 = Hyp^2$$
$$\frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2+b^2}})^2$$
$$\frac{1}{4}(a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2) = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2)$$

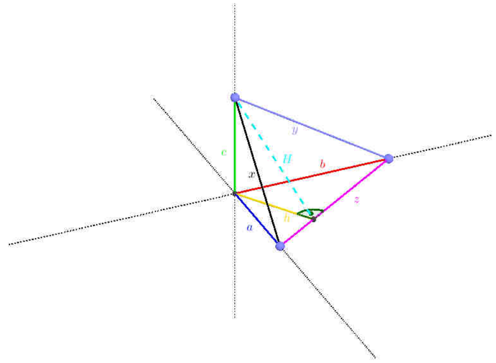

Abbildung 18: Allgemeine Raumecke

Die Schwierigkeit bei der Visualisierung liegt vor allem bei den unterschiedlichen Raumhöhen der einzelnen Körper. Man muss bereits dreidimensionales Volumen scheren um den Sachverhalt darstellen zu können. In der beigefügten GeoGebra Datei sind die einzelnen Schritte nachzuvollziehen. Die einzelnen Schritte werden im Vortrag erläutert.

6. Literatur

Schumann, H. (2011). Elementare Tetraedergeometrie. Eine Einführung in die Raumgeometrie. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schupp, H. (2008). Mittelwerte und Mittelwertvergleiche durch Optimieren. In: *Mathematica Didactica* 31, S. S.5–19.

Walser, H. (2014). Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. – *http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/V/Verallg_Pythagoras2/Verallg_Pythagoras2.htm* (abgerufen am 21.8.2017).