Andreas Filler,
Matthias Ludwig (Hrsg.)

Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht

Ziele und Visionen 2020

Vorträge auf der 28. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 09. bis 11. September 2011 in Marktbreit

Andreas Filler, Matthias Ludwig (Hrsg.):
Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht
Ziele und Visionen 2020
AK Geometrie 2011

ISBN

Inhaltsverzeichnis

Editorial

Andreas Filler, Matthias Ludwig

Vernetzungen sind ein Thema, zu dem in der Mathematikdidaktik gegenwärtig in vielfältiger Weise gearbeitet wird. Obwohl der Anspruch, Vernetzungen herzustellen und damit das Lehren und Lernen von Mathematik zu befruchten, keinesfalls neu ist – so weist *Antonia Zeimetz* in ihrem Beitrag auf entsprechende Konzepte in Diesterwegs Raumlehre hin – stellen vernetzendes Denken und das Herstellen von Bezügen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Mathematik sowie zwischen mathematischen Inhalten und außermathematischen Gegebenheiten hohe Ansprüche an Lernende und Lehrende. Der vorliegende Tagungsband soll hierzu theoretische Grundlagen erläutern und praktische Anregungen geben. Die enthaltenen Beiträge wenden sich sehr unterschiedlichen Facetten von Vernetzungen zu:

- Vernetzungen zwischen der (Schul-)Geometrie und anderen Teilgebieten der Mathematik,
- Vernetzungen zwischen Darstellungsebenen,
- Anwendungen und Modellbildungen als Vernetzungen von Geometrie mit außermathematischen Sachverhalten.

Hinsichtlich ihrer Themen und ihres Einsatzes im Unterricht decken die Beiträge dieses Bandes ein breites Spektrum von der Grundschule bis zum Übergang Schule-Hochschule ab. Am Anfang stehen zwei Beiträge, die in starkem Maße theoretische Perspektiven auf Vernetzungen einbeziehen:

- Die Ausführungen von *Anselm Lambert* enthalten grundsätzliche Überlegungen zur Klärung der Begriffe Vernetzungen und Anwendungen. Insbesondere werden die Repräsentationsmodi enaktiv, ikonisch und symbolisch unter Gesichtspunkten der Vernetzung betrachtet, was unter anderem zu einer differenzierteren Sicht auf diese Modi führt und die oftmals (zumindest unterschwellig) wahrzunehmende Bewertung nach „Qualitätsstufen“ enaktiv → ikonisch → symbolisch vom „Primitiven“ zum „Intelligenten“ entkräftet. Beispiele zu Vernetzungen von Geometrie und Algebra illustrieren die theoretischen Überlegungen.

- *Markus Ruppert* und *Jan Wörler* diskutieren – im Zusammenhang mit der Vorstellung eines interessanten größeren Schülerprojekts

(Modellierung des Campus Hubland Nord der Universität Würzburg für die Darstellung in Google Earth) – fünf Ebenen von Vernetzungen: Werkzeugebene, innermathematische Ebene, fächerübergreifende Ebene, institutionelle Ebene sowie die Ebene der Nachhaltigkeit.

Die folgenden Beiträge enthalten insbesondere Beispiele sowie unterrichtspraktische Erwägungen für die Sekundarstufe I – ergänzt durch einzelne Anregungen auch für die Grundschule sowie für die gymnasiale Oberstufe.

- *Lothar Profke* befasst sich mit Anwendungsaufgaben im Geometrieunterricht und geht dabei auf Aspekte des Modellierens ein, wobei er seine Vorschläge konsequent an der Forderung ausrichtet, dass diese zum „alltäglichen" Mathematikunterricht passen müssen. Er kombiniert daher Aufgaben, die durchaus zum Standardrepertoire von Schulbüchern gehören, mit weitergehenden interessanten Fragestellungen und diskutiert dabei unterrichtspraktische und methodische Fragen.

- *Jürgen Roth* geht auf vernetzende Lernumgebungen ein. Nach einer Begriffsklärung wird das Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" der Universität Landau umrissen, das aus vernetzenden Lernumgebungen besteht. Ausführlich beschreibt der Autor dann eine besonders interessante Lernumgebung zum Thema Gleichdicks. Diese immer wieder verblüffenden Objekte werden unter unterschiedlichen Herangehensweisen von Schülerinnen und Schülern „erforscht". Der Beitrag beschreibt sehr interessante Überlegungen zu Gleichdicks, die sich für die Sekundarstufe I eignen und gleichzeitig das Potenzial beinhalten, auf höherer Stufe aufgegriffen und vertieft zu werden.

Drei Beiträge befassen sich mit Vernetzungen und Anwendungen von Inhalten des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe II.

- *Hans Walser* geht von Fehlvorstellungen hinsichtlich des Begriffs Krümmung aus, die durch die gängige Verwendung dieses Begriffs im Analysisunterricht begünstigt werden. Nach einer Klarstellung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden von Funktionsgraphen und Kurven entwickelt er – angeregt durch die E-Mail einer Schülerin – einen äußerst anschaulichen Zugang zu Kurvenkrümmungen. Seine Überlegungen verknüpft er mit didaktischen Grundfragen, Modellierungsproblemen in Unterricht und Praxis, topologischen Fragen, Verkehrs-Trassen sowie einem UNESCO Welterbe.

- *Ana Donevska Todorova* befasst sich in ihrem Beitrag mit Vernetzungen algebraischer und geometrischer Betrachtungsweisen von Elementen der Linearen Algebra. Anhand von Determinanten (die in ihrem Heimatland Mazedonien eine zentrale Stellung innerhalb des Mathematikunterrichts der gymnasialen Oberstufe einnehmen) exemplarifiziert sie Bezüge zu verschiedenen Gebieten (Elementargeometrie, elementare Algebra, analytische Geometrie, Kombinatorik) und stellt dynamische Lernumgebungen vor, die Bezüge zwischen der Berechnung von Determinanten und ihrer geometrischen Interpretation als Flächeninhalte erlebbar machen.

- Gegenstand des Beitrags von *Ralf Wagner* ist die Arbeit mit geographischen Informationssystemen (GIS) im Rahmen des Stoffgebietes Analytische Geometrie. Ausgehend von der Zielstellung, unter Nutzung von GIS-Daten einen Lärmkorridor um eine Bahnstrecke zu planen, wird die Einführung des Skalarproduktes motiviert. Der Autor beschreibt eine Lernumgebung, in der die Schülerinnen und Schüler sowohl mit GIS-Software als auch mit DGS arbeiten und dabei die Auswertung und Nutzung geographischer Daten mit der Darstellung von Vektoren sowie mit Elementen der Vektorrechnung verbinden.

Der Einsatz „neuer Medien“ ist Bestandteil mehrerer der bisher genannten Beiträge und steht bei dem Beitrag von Ralf Wagner sogar an zentraler Stelle – hier bezogen auf ein konkretes Themengebiet der Mathematik. Jedoch können im Zusammenhang mit Vernetzungen und Anwendungen „neue Medien“ (welche über dafür geeignetes Potenzial verfügen) auch gewissermaßen „im Mittelpunkt“ betrachtet werden und Elemente der Mathematik mit anderen Unterrichtsfächern verbinden.

- *Michael Gieding* verknüpft in seinem Beitrag „Bildbearbeitung und Computergrafik mit Excel“ mathematische Grundlagen der digitalen Bild- und Grafikrepräsentation mit Aspekten der Informationstechnischen Grundbildung (die in vielen Bundesländern ein eigenständiges Unterrichtsfach ist). Durch die Verwendung einer Tabellenkalkulation erleben Schüler gewissermaßen den „mathematischen Kern“ der Beschreibung und Manipulation von Pixelbildern und Vektorgrafiken. Die unterbreiteten Vorschläge sind zum großen Teil bereits in der Sekundarstufe I umsetzbar.

Bereits eingangs wurde erwähnt, dass die Idee, durch Vernetzungen und Anwendungen das Lehren und Lernen von Mathematik zu befruchten, bereits eine lange Tradition besitzt, wenngleich die explizite Verwendung der Begriffe „Vernetzen“ und „Modellieren“ in dem vergangenen Jahrzehnt stark an Häufigkeit zugenommen hat.

- *Antonia Zeimetz* zeigt in ihrem Beitrag auf, dass das Verdeutlichen und Herstellen von Verbindungen zwischen Gebieten, Inhalten, Ideen, Begriffen sowie Welt und Mathematik bereits in Diesterwegs (1828 bis 1843 entstandenen) Werken zur Raumlehre breiten Raum einnimmt. Sie betrachtet dabei insbesondere Anwendungen, die als eine spezielle Art der Vernetzung verstanden werden, der beidseitigen Verbindung zwischen Welt und Mathematik.

Als Herausgeber freuen wir uns ganz besonders, den folgenden Beitrag veröffentlichen zu können, der sich auf die Geometrie in der Grundschule bezieht – ein Bereich, den wir in die künftige Arbeit unseres Arbeitskreises stärker einbeziehen möchten.

- *Uta Knyrim* konnte an unserer Herbsttagung zwar leider nicht teilnehmen, schickte uns aber eine wunderschöne Posterausstellung zu Maßwerkbetrachtungen in der Grundschule, die von den Teilnehmern der Arbeitskreistagung zwischen den Vorträgen eingehend betrachtet und bewundert wurde. Die Ausstellung und der zugehörige Beitrag von Frau Knyrim in diesem Band beziehen sich auf ein außerschulisches Projekt, bei dem Kinder konstruierend gotische Maßwerkfenster, Möglichkeiten der Kreisteilungen mit dem Zirkel, Maßverhältnisse und Pässe erforschten. Sie überzeugten durch erstaunlich gute Konstruktionen.

Aus dem Beitrag von Frau Knyrim sei als Schlussbemerkung für dieses Editorial zitiert: *Das war richtig gute Mathematik! Das war toll! So was macht richtig Spaß!* (Einschätzung von Kindern). Wir meinen, dass der vorliegende Band eine Reihe von Anregungen enthält, für Schülerinnen und Schüler Schönheit und Beziehungshaltigkeit der Geometrie erlebbar werden zu lassen und dadurch vielleicht sogar ähnliche Reaktionen hervorzurufen.

Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch

Aneignungsformen beim Geometrielernen

Anselm Lambert, Saarbrücken

Zusammenfassung. Um zur mathematikdidaktischen Theoriebildung beizutragen, werden Vorschläge zur unterrichtstauglichen Ausschärfung des Begriffes „Anwendung“ und der Repräsentationsmodi „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ zur Diskussion gestellt. Dies geschieht vor dem Hintergrund unterrichtsrelevanter Vernetzungen.

Kaum etwas des hier Präsentierten ist in der Sache neu, die theoretisch begründete Aufbereitung der Beispiele vielleicht, alles erinnernd und entwerfend, nichts spektakulär. Es geht hier schlicht um eine didaktische Reduktion didaktischer Theorien zur Praxistauglichkeit für das Feld Mathematikunterricht, in der Absicht, einen kleinen Beitrag zum Transfer mathematikdidaktischer Erkenntnisse in den Alltag zu leisten. Die Arbeit richtet sich damit insbesondere an aktive Lehrpersonen und Studierende und die verwendete Terminologie versucht, Klarheit zu schaffen, ohne all zu sehr zu befremden.

Ziel ist es nach einer geeigneten Klärung der mathematikdidaktischen Begriffe Vernetzung und Anwendung – kurz vorgezappt: Anwendung ist e i n e Möglichkeit der Vernetzung – durch geeignete theoretische Einbettung, auch eine Antwort darauf zu geben, was die Trias „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ mathematikdidaktisch sinnvoll bedeuten könnte/soll. Der Vorschlag wird durch einen differenzierteren Blick als üblich auf die Bedeutung von „symbolisch“ gestützt.

Ausgangslage: Einige Autoren sagen „enaktiv, ikonisch, symbolisch“ ohne transparent zu machen, was s i e persönlich damit meinen (etwa in Weigand et al. 2009). Sie liefern Beispiele und behandeln die didaktischen Begriffe damit eher prototypisch[1]. In der vorliegenden Arbeit werden die Darstel-

---

[1] Diese informelle Wortwahl ist an ROSCH angelehnt. Derzeit würde man wohl eher mit TALL und VINNER, denen der Ruhm zukommt, die mathematikdidaktische Begriffsbildung von Begriffsbildung international aktiv geprägt zu haben (siehe Rembowski 2011, für eine kritische Diskussion dieses Sachverhaltes), sagen: Wir können Darstellungen ihres jeweiligen *concept image* beobachten.

lungsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch als eine mögliche Vernetzungsdimension aufgefasst, wobei ein naiver Vernetzungsbegriff, d.h. es gibt (ggf. gerichtet) verbundene Knoten, zum Tragen kommt. Weitere betrachtete Aspekte, die bei der angestrebten Durchdringung der sogenannten BRUNERschen Trias die Begriffsbildung flankieren, sind insbesondere epistemologische und auch semiotische. Von diesem Standpunkt aus soll eine Begriffsbildung für den Mathematikunterricht ausgebreitet werden.[2] Daneben wird Schulmathematik und der Einsatz von Neuen Medien in die Diskussion miteinbezogen. Zum Schluss werden einige Beispielskizzen den Nutzen einer solchen Begriffsbildung für einen vernetzenden Geometrieunterricht konkretisieren. Darstellungen (und Vorstellungen) von Mathematik nehmen in den hier vorgenommenen Argumentationen einen prominenten Platz ein.

Vernetzung(en) im Geometrieunterricht

Derzeit ist Vernetzung groß in Mode: Wir vernetzen Außermathematisches mit Innermathematischem et vice versa durch Modellierung bzw. Situierung und wir vernetzen Innermathematisches mit Innermathematischem, z.B. Arithmetik und Algebra mit Geometrie (und diese und jene eines Tages mit Diskreter Mathematik etc. pp.) und Geometrisches mit Geometrischem (synthetisch – analytisch – algebraisch bzw. pandimensional). Dazu suchen wir geeignete Vernetzungen von (medial aufgerüsteten) Darstellungen und Vorstellungen und können unterscheidbare Zugänge (epistemologisch: formal – visuell – begrifflich; kognitiv: prädikativ – funktional; …) vernetzend auf unterscheidbaren Darstellungsebenen (enaktiv – ikonisch – symbolisch) vernetzen …

[2] Die bekannte mathematikdidaktische Begriffsbildung dazu von WITTMANN (siehe Wittmann 1981, 17f. und 87 bis 92) unterscheidet *ikonisch* und *symbolisch* entlang der Grenze von *durch Bilder* und *durch Zeichen und Sprache*. ZECH unterscheidet auf der symbolischen Ebene pointiert „zwischen sprachlicher Formulierung und der Darstellung in mathematischen Zeichen“ (Zech 1992, 106). Beide weisen auf die Wichtigkeit von Interaktionen bzw. Übergängen zwischen den Darstellungsformen hin.

Die in Betrachtung kommenden (und weitere) *mögliche Vernetzungen im Geometrieunterricht* sind also in plakativer Kürze bezüglich des mathematischen Inhalts und des mathematischen Gehalts[3]

- die mathematischer Gebiete[4] untereinander,

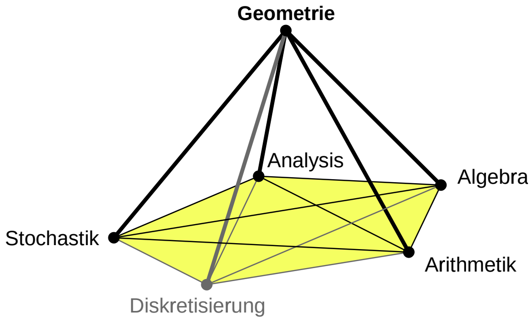


Abb. 1: Vernetzung von Gebieten im MU der Sek I.

- die verschiedener Abteilungen innerhalb[5] eines Gebietes,

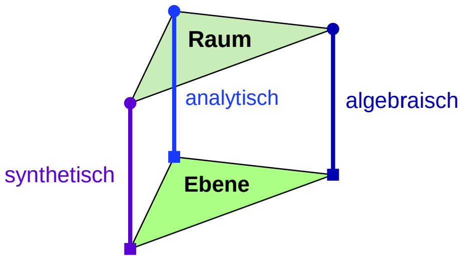


Abb. 2: Vernetzungen innerhalb der Schulgeometrie.

---

[3] Den Begriff „mathematischer Gehalt" definiere ich nun im vorliegenden Papier nur (unvollständig) prototypisch. Dazu könnte man auch Verortung und Gewicht in der Mathematik zählen. Auch der Begriff „mathematischer Inhalt" ist nichttrivial und wird hier naiv verwendet für den Kanon (aktuell) akzeptierter (Schul-)Mathematik.

[4] Ob Diskrete Mathematik ein schulmathematisches Gebiet ist, oder ob besser Diskretisierung als Leitidee (fundamentale Idee, basale Idee … (?)) wie Funktionaler Zusammenhang, Raum und Form usw. den Blick auf vorhandene Gebiete erweitert und die Schnittstelle zur Informatik liefert (vgl. Lambert & Selzer 2008), soll hier nicht vertieft werden.

[5] Für die Geometrie z.B. die der Spielarten synthetisch, analytisch und algebraisch (oder die der Dimensionen ebene, räumliche – und dazwischen die mal gehypte, aber inzwischen wieder weniger populäre fraktale – …).

- die dialektisch bidirektional verschränkenden von Mathematik mit Wirklichkeit(en) in Anwendungen und Einkleidungen,
- die zwischen Stufen mathematischen Denkens, bezüglich Exaktifizierung und Formalisierung,[6]

bezüglich der Repräsentationen

- die wechselwirkenden der Darstellungsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch (Repräsentationsmodi und intermodale Transfers nach BRUNER),
- die von unterscheidbaren Zugängen zur Mathematik (vgl. Lambert 2003, sowie Lambert 2005):
    - epistemologisch (in der Tradition von KLEIN): formal – visuell – begrifflich bzw.
    - kognitiv: prädikativ – funktional (SCHWANK),
- die auf einander bezogenen von Darstellungen (externen Repräsentationen) mit Vorstellungen (internen Repräsentationen),

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt
und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches
oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol und Operation
(„Spielregeln“)</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes“</td><td>„Gesagtes“</td><td>„Gehörtes“</td><td>„Aufgefasstes“</td></tr>
</table>

bezüglich methodischer Aufbereitung

[6] Nach VAN HIELE gibt es für die Geometrie bekanntlich die folgenden Stufen: räumlich-anschauungsgebunden, geometrisch-analysierend, geometrisch-abstrahierend, (lokal) geometrisch-schlussfolgernd, (global) formal-systembildend. Auch wenn diese Stufen in den in dieser Arbeit folgenden Argumentationen nicht mehr weiter diskutiert werden, sind solche für die Fragestellung „Vernetzung“ diskussionswürdig relevant und werden daher hier erwähnt.

- die von Neuen Medien und Werkzeugen: DGS, FP, CAS, TK …,
- die der Arten des Wissensumgangs[7] – als (auto-)aktive Vernetzung der Lernenden mit dem Stoff

und bezüglich der Genese

- die in die Geschichte von Mathematik und Mathematikunterricht.

Die derzeit wieder populäre und administrativ gewünschte, sinnvolle Vernetzung mit und von Leitideen und Kompetenzen (KMK 2003) vervollständigt die Listen.

Vernetzung und Anwendung: Vorschlag zu einer Begriffsklärung

In der Einladung zur Herbsttagung 2011 des AK Geometrie in der GDM steht:

> Uns ist klar, dass die Begriffe Vernetzung und Anwendung schwer voneinander abzugrenzen sind, und dass es je nach Sichtweise immer Inhalte und Themen gibt, die sich unter beiden Begriffen wiederfinden. Wir wollen daher beide Begriffe gleichberechtigt nebeneinander stehen lassen. (Ludwig & Filler 2011)

Es ist allerdings lohnend, nicht an dieser Stelle das Streben nach einer mathematikdidaktischen Begriffsbildung von „Vernetzung" und „Anwendung" abzubrechen, zumal es sich bei diesen Bezeichnern um Modeschlag*worte* handelt, die eigentlich Schlüssel*begriffe* sein sollten. Erst durch eine Präzisierung ihrer Bedeutungen taugen sie für einen wissenschaftlichen Diskurs. Eine geeignete theoretische Begriffsbildung hängt dialektisch von einer rahmenden Theorie ab und zielt je nach Sichtweise nicht notwendig auf die Bildung disjunkter Begriffe. Für die Mathematik halten FISCHER und MALLE fest:

> Wichtige Begriffe stellen gewissermaßen Anfangspunkte von Theorien dar und werden ihrerseits durch die Theorien erklärt. Dabei ist es eine nützliche Sichtweise, solche Begriffe als den Ausdruck von Beziehungen im Rahmen eines Netzwerks von Beziehungen, eben der Theorie, zu sehen. […]

[7] Exploration, Organisation, Reflexion (vgl. Sjuts 2001). Hier gilt gleiches, wie oben zu VAN HIELE.

> Wir sehen theoretische Begriffe außerdem als den Ausdruck bestimmter Sichtweisen von Menschen, als soziale kommunikative Konstrukte an. Sie ergeben sich nicht notwendig, zwangsläufig aus der Natur, aus unserer Wahrnehmung, sie sind hingegen Ausdruck eines bestimmten Wollens; Ausdruck dessen, daß uns ein bestimmter Gesichtspunkt wichtig ist. (Fischer & Malle 1985, 151)

Dies sollte ungeschmälert ebenso auch für theoretische Begriffe der Mathematikdidaktik gelten und ein solches gezieltes Wollen muss freilich wissenschaftlich – d.h. unter Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern miteinander und gemeinsam – ausgehandelt werden, um Mathematikdidaktik und speziell auch Geometriedidaktik weiterzuentwickeln (und um nicht nur das Beispielsammelsurium zu vergrößern). In diesem Sinne möchte ich zunächst die von mir verwendeten Begriffe Vernetzung und Anwendung und deren wechselseitige Vernetzung und Anwendung skizzieren.

Eine doppelt sinnvolle Rahmung liefert das (normative) mathematikdidaktische Modell von Modellbildung in Anlehnung an SCHUPP (vgl. Schupp 1988), das die Ebenen Mathematik und Wirklichkeit (Welt) und die Seiten Problem und Lösung bewusst unterscheidet. Es bietet eine Grundlage für eine mathematikdidaktische Unterscheidung von Anwendung und Vernetzung, und es leitet unsere Begriffsbildung auf einer Metaebene, denn es ist von einem Abstraktionsgrad, der seine Anwendung auch in anderen Kontexten ermöglicht.

Wenn wir im Modell „Mathematik“ durch „Mathematikdidaktik“ ersetzen und „mathematisieren“ durch „theoretisieren“ haben wir unseren Startpunkt für die Problemsituation „Begriffsbildung: Vernetzung und Anwendung?“ und wissen damit auch, dass wir uns ggf. unterschiedlicher mathematikdidaktischer Modelle bedienen können resp. sollten.[8]

[8] In offenen Situationen sollte man auch alternative Modelle betrachten (vgl. Fischer & Malle, 266); hier führen die verwendeten sich gegenseitig bestätigend zum gleichen Ergebnis.

	Problem		Lösung
Wirklichkeit (Welt)	**Situation**	← **validieren** ←	**Ergebnisse**
	↓ **modellieren und** mathematisieren bzw. **theoretisieren** ↓		↑ **interpretieren** ↑
Mathematik bzw. Mathematik-didaktik	mathematisches bzw. **mathematik-didaktisches Modell**	→ **deduzieren** →	**Konsequenzen**

Dies beleuchtet nun die Ebene unserer Ausgangsfrage. Wir haben durch das mathematikdidaktische Modell von Modellbildung nach SCHUPP den Bezug von Welt und Mathematik, also den Bezug von Außermathematischem mit Innermathematischem im Blick: Die Knoten „Situation“ und „mathematisches Modell“ sind (auf der Problemseite) durch „modellieren und mathematisieren“ miteinander verbunden, genauer: unidirektional vernetzt. Die umgekehrte Richtung haben wir aber auch frei (Schul-)haus: Viele abstrakte mathematische Modelle lassen sich – in unterschiedlichen Repräsentationen auf unterschiedlichen Ebenen (BRUNER) und Stufen (VAN HIELE) – in (realen) Kontexten konkretisieren, die wiederum an eine jeweilige Situation (etwa an Unterricht oder aber auch an ungespieltes Leben außerhalb des Schulhauses) gebunden sind.

Daher schlage ich für den „modellieren und mathematisieren“ invertierenden Weg die Bezeichnung „situieren“[9] vor, mit den dem situierten Lernen und der situierten Kognition (vgl. Reinmann-Rothmeier & Mandl 2001, 615f.) zugedachten Konnotationen und als Erinnerung daran, Konkretisierungen von mathematischen Modellen auch mögliche Kontextualisierungen in Unterrichtssituationen zur Seite zu stellen – oder zumindest stets im Hinterkopf zu haben.

---

[9] In der Literatur finden sich dafür die engeren Bezeichnungen „kontextualisieren“ (Vogel 2006, 27), „realisieren“ (vgl. Lambert 2010, 158) oder „konkretisieren“.

In diesem dialektischen Zusammenspiel von Situation und Modell spiegelt sich auch die Erkenntnis wider, dass geometrische Auseinandersetzungen in Problemkontexten (vgl. Wittmann 1987, 1) wurzeln, die Menschen in ihrer Umwelt finden, oder sich aber selbst erschaffen.

Situation
↓ ↑
modellieren situieren
↓ ↑
Modell

Auch die einen innermathematisch (vom zu hohen Standpunkt) strukturierten Aufbau der Schulmathematik relativierenden Auslassungen von Freudenthal zur Beziehungshaltigkeit stützen die hier vertretene Sichtweise, Anwendungen als (besondere) Vernetzungen zu verstehen (die dann auch zu weiteren Vernetzungen im Denken führen können):

> Es ist an und für sich ein gesunder Standpunkt, daß man nicht isolierte Brocken, sondern kohärentes Material lernen soll. Was zusammenhängt, lernt sich besser und wird besser behalten. Nur muss man den Zusammenhang recht verstehen. Wenn es nur ein Zusammenhang ist, der vom Dozenten verstanden ist, oder den der Dozent nicht einmal versteht, sondern einem vorredet, so verfehlt er seinen Zweck […]. (Freudenthal 1973, 75)
>
> […]
>
> Soweit sie [(die Beziehungen), AL] natürlich sind, ergeben sie sich von selber; wenn sie künstlich sind, sind sie didaktisch wertlos; und ob sie künstlich sind, soll vom Standpunkt des Schülers entschieden werden. (Freudenthal 1973, 76)
>
> […]
>
> Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muß man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muß sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das – ich meine die Wirklichkeit – ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt, und wenn es erst scheinbar zusammenhanglose Elemente der Mathematik sein mögen, so erfordert es Zeit und Reifung, die Beziehungen zwischen ihnen zustande zu bringen. Den Mathematiker möge ein freischwebendes System der Mathematik interessieren – für den Nichtmathematiker sind die Beziehungen zur erlebten Wirklichkeit unvergleichlich wichtiger.
> (Freudenthal 1973, 77)

In diesem Kräftespiel von innermathematischen Beziehungen einerseits, die ja ein prägender Teil der mathematischen Kultur sind, und Beziehungen zu Außermathematischem andererseits – insbesondere im (bewussten) eigenen Erleben – hat Mathematikunterricht für ein allgemeinbildendes Gleichgewicht zu sorgen. FREUDENTHAL verbindet mit seiner Auffassung von Beziehungshaltigkeit von Mathematik(-unterricht) die Hoffnung, diese möge zur Wirksamkeit von Mathematik führen:

> Nicht, daß das, was man von der Mathematik gelernt hat, unvergessen, sondern daß es wirksam bleibt, spielt eine Rolle, und dies soll ermöglicht werden, indem man beziehungshaltige Mathematik unterrichtet. (Freudenthal 1973, 79f.)

Beide Theorien – Modellbildungskreislauf bzw. Beziehungshaltigkeit – liefern: Der mögliche Anwendungsbezug von Mathematik auf Wirklichkeit oder aber auch der von Wirklichkeit auf Mathematik, ist Ausdruck einer Vernetzung von Mathematik und Wirklichkeit, sowohl in authentischen Situationen, als auch in sinnstiftenden Einkleidungen[10].

Enaktiv – ikonisch – symbolisch als Vernetzung

Die Idee, über Handlungen – als didaktisches Medium zur Vernetzung von Lernenden mit dem Stoff – und deren aktive, häufig bildliche Abbildung zum Symbolischen (und Operativen) in der Mathematik vorzudringen und dabei Darstellungen und Vorstellungen zu berücksichtigen, ist alt.

[10] Kurzes Plädoyer für die Einkleidung: Einkleidungen sind gut! Man darf sie im Unterricht nur nicht mit Anwendungen verwechseln (vgl. Lambert 2007). Einkleidung als bewusste Situierung, die zur Realsituation auch die Unterrichtssituation zählt, fördert Verständnis, indem es mathematischen Inhalten ein weltliches wirkliches Gesicht gibt: „Eingekleidete Aufgaben offenbaren in der Regel nichts über nicht-mathematische Sachverhalte. Das ist nicht ihre Funktion oder sollte sie nicht sein. […] Einkleidungen können veranschaulichen und so einen mathematischen Sachverhalt verständlich oder zugänglich machen, indem sie ihn in nicht-mathematische Vorstellungen einkleiden." (Jahnke o.J., 5). Gute Einkleidungen können symbolische Mathematik u.a. enaktiv verlebendigen.

5. Nimm einen Draht von 24 cm Länge und biege ihn zu einem Rechteck zusammen! Wie vielerlei Rechtecke lassen sich bilden, wenn die Maßzahlen für Länge und Breite nur ganze Zahlen werden sollen? Gib die Flächen der verschiedenen Rechtecke an! Ist auch eine Berechnung der Umfänge nötig? Wann ist die Fläche am größten?

6. Wiederhole die Aufgabe 5, bediene dich dabei aber nicht des Drahtes, sondern bloß einer Zeichnung!

7. Schneide aus den Quadratzentimetertafeln Rechtecke von 36 cm² Flächeninhalt aus, aber wieder so, daß die Maßzahlen für Länge und Breite ganze Zahlen werden! Wie vielerlei Rechtecke kannst du da machen? Gib immer die Umfänge an! Wann ist der Umfang am kleinsten?

8. Auch die Aufgabe 7 kann man durch bloßes Zeichnen lösen.

9. Bilde ähnliche Aufgaben wie in Nr. 5 und 7! Geübte können die Aufgaben sogar ohne Zeichnung machen, sie müssen sich alles nur sehr gut vorstellen.

10. Eine schwere Aufgabe: Aus 64 Zentimeterwürfeln sollst du dir Quader aufgebaut denken, wobei jedesmal alle 64 Stück zu verwenden sind! Nenne verschiedene Möglichkeiten! Wird man auch einen Würfel erhalten können? Vergleiche die Oberflächen der verschiedenen Körper!

Abb. 3: Enaktiv – ikonisch – symbolisch in der Reformpädagogik (vgl. Lambert 2010, 142ff.). Aufgaben aus (Falk et al. 1926).

Heute bringt man sie üblicherweise mit dem Namen Bruner und seiner Trias *enaktiv – ikonisch – symbolisch* in Verbindung.

> Bruner unterscheidet drei Repräsentationen von Wissen in der kognitiven Struktur [...]:
>
> ○ eine enaktive oder handelnde („enactive“),
> ○ eine ikonische oder bildhafte („iconic“)
> ○ und eine symbolische Repräsentation („symbolic“).
>
> (Straka & Macke 2002, 110)

Diese Repräsentationsformen machen Wahrgenommenes, Erfahrungen, Fertigkeiten, Gewusstes, Verstandenes … dem Arbeitsgedächtnis beim Denken zugänglich.

> [...] Im Verlauf der intellektuellen Entwicklung des Menschen verschiebt sich der Schwerpunkt der Wissensrepräsentation immer mehr [...]. Allerdings bleiben [...] die verschiedenen Darstellungssysteme [...] wirksam, besonders dann, wenn etwas noch relativ neu ist. (Straka & Macke 2002, 111)

Weit verbreitet findet man bei Studierenden und Lehrpersonen eine hierarchisch und chronologisch strukturierte Auffassung von drei Lernebenen. In dieser Auffassung verweist „enaktiv“ auf primitive Handlungen, auf die man für schwächere Lernende zurückgreifen kann, „ikonisch“ auf Bilder als Hinweise zum folgenden „Eigentlichen“ der Mathematik und endlich „symbolisch“ auf Symbole – wie der Name ja sagt – und das sind in der Mathematik doch die Formeln und die diese erläuternden richtigen Definitionen. Nicht nur für die Geometrie, wenn auch in besonderem Maße für diese, ist dies unbefriedigend kurz gesprungen. Wichtig ist zunächst, dass es sich nicht um getrennt (be-)stehende Repräsentationen handelt, sondern um Aspekte desselben „Eigentlichen“. Dieses „Eigentliche“, sei es nun ein vielschichtiger Begriff, ein Handlungskonzept oder eine nur implizit verbalisierbare Bedeutung, ist auf der symbolischen Ebene für sich gar nicht lebensfähig, weil es dort für sich allein nichts anderes repräsentiert als eine oder mehrere (lokale) Konventionen über das eigentlich Gemeinte zu reden, wenn es ums Handeln, Denken oder Kommunizieren mit oder in Bezug auf dieses Gemeinte geht. Erst die Vernetzung der Repräsentationsebenen, d.h. der dem Bewusstsein zugänglichen Hauptperspektiven auf die jeweilige Sache, verleiht dieser Sache (mitteilbare) Bedeutung. Deshalb muss im Lehr-Lern-Prozess dem Vernetzen der Repräsentationsebenen die eigentliche Aufmerksamkeit gewidmet werden, in BRUNERS Ausdrucksweise: dem Einüben intermodaler Transfers. Und das insbesondere auch nach Erreichen der symbolischen Benennungs- und Begriffsebene.

Falsch ist daher etwa bei Aufgaben zu Geometrie und Arithmetik vernetzenden figurierten Zahlen das Folgende: Erst spielen wir was (z.B. mit bunten Plättchen), danach malen wir ein Bild davon und danach wird endlich gescheit gerechnet. Am Beispiel der Begründung des EULERschen Polyedersatzes führt WITTMANN vor, wie man aus einer konkreten Handlung des Zeichnens auf einen über ein Polyeder gespannten Luftballon (enaktiv) ein SCHLEGELdiagramm erhält und in der Entstehung des Diagramms (ikonisch) die relevanten Operationen[11] erkennt und damit Regeln und den allgemeinen Beweis (symbolisch) gewinnt (siehe Wittmann 1987, 270ff.).

[11] „Wie kam PIAGET dazu, diesen mathematischen Begriff in die Psychologie zu übernehmen? Dahinter steht der Versuch, im Denken des Menschen nicht nur Assoziationen als Bindeglieder zwischen den einzelnen Ideen zu sehen („Eiffelturm-Paris“, „Neunte Symphonie-Beethoven“, […] „12-144“). Mit den Gestaltpsychologen geht PIAGET davon aus, daß der Mensch zwischen seinen Begriffen und Vorstellungen einsichtige Beziehungen herstellt: „Der Eiffelturm ist WAHRZEICHEN von

Ein solcher in der Tradition von PIAGET und AEBLI stehender anzustrebender Übergang von Handlungen zu Operationen ist für die Geometrie geradezu natürlich und findet seinen Niederschlag in der operativen Methode[12]:

> Charakteristisch für die operative Methode ist es, die Objekte zusammen mit den sie erzeugenden Konstruktionen und den auf sie anwendbaren „Operationen" zu studieren, d.h. zu untersuchen, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden und wie sich Eigenschaften und Beziehungen verhalten, wenn man „Operationen" anwendet. […]
>
> Die operative Methode ist naturgemäß für forschend-entwickelndes Arbeiten und für Problemlösen besonders förderlich. Untermauern kann man sie von der Mathematik und von der Erkenntnistheorie her […].
>
> Etwa von 1925 an entwickelte […] Piaget seine genetische Erkenntnistheorie, in deren Zentrum er das aktiv auf die Umwelt einwirkende Individuum stellte. In dieser Sicht ist das „Bild", das sich ein Individuum von einem „Objekt" macht, von den ausgeübten „Operationen" und den zu beobachtenden Resultaten geprägt. Dieses Bild verfeinert sich in dem Maße, als immer umfassendere Operationssysteme eingesetzt und in ihren Auswirkungen auf die Objekte erkannt werden. (Wittmann 1987, 114)

Erkenntnisse über Objekte und Operationen werden festgehalten, als Handlungen reproduziert und/oder geeignet bildlich oder verbal oder mit Formelzeichen dargestellt. Diese Darstellungen beinhalten ggf. erkannte Regeln implizit und wachsen durch diese Regeln über sich selbst hinaus.

> Schließlich gibt es *Repräsentationen in Worten oder Sprache.* Ihr Kennzeichen ist ihr *symbolischer Charakter,* und sie hat bestimmte Eigenheiten symbolischer Systeme, die wir eben erst zu verstehen lernen. Symbole (Wörter) sind willkürlich […] – sie sind in ihrer Bedeutung variabel und fast immer sehr ergiebig

---

Paris", „Die Neunte Symphonie wurde KOMPONIERT VON Beethoven", […] „12 ERGIBT IN DER ZWEITEN POTENZ 144". PIAGET sieht also zwischen den Vorstellungen und Begriffen des Denkens qualitative Beziehungen, „Sachverhältnisse", wie sie der deutsche Psychologe SELZ […] genannt hat.

Aber hinter der Idee der Operation steht ein zweiter Gedanke. Für PIAGET geht das mathematische Denken aus dem Handeln hervor […].

Wie geht das zu? Hier ist nun PIAGET nicht ganz klar. Manchmal betont er die Innerlichkeit der Operation: Operationen sind interiorisierte Handlungen. Manchmal betont er ihre Beweglichkeit: Operationen sind umkehrbar, und manchmal betont er die Tatsache, daß Operationen Systeme bilden […]." (Aebli 1998, 204)

[12] Auch die operative Methode war bereits den Reformpädagogen geläufig.

> oder fruchtbar in dem Sinne, daß eine Sprache oder irgendein Symbolsystem Regeln für die Bildung und Umformung von Sätzen hat, welche Sachverhalte umfrisieren können, mehr als dies durch Handlungen oder Bilder möglich wäre. Zum Beispiel erlaubt es uns eine Sprache, regelhafte Transformationen von Sätzen vorzunehmen, die auf höchst überraschende Weise (neue) brauchbare Aussagen ergeben. (Bruner 1974, 17)

> Die syntaktischen Regeln (Grammatik) verleihen einer Sprache einen *generativen Charakter*: Wer eine Sprache spricht, ist in der Lage, Sätze hervorzubringen und zu verstehen, die vorher niemals geschrieben oder gesprochen [oder auch nur gedacht, AL] wurden. (Wittmann 1981, 88)

Dies gilt insbesondere auch für die Sprache Mathematik.

Vertiefung: Zeichen und Symbole

Die Unterscheidung zwischen ikonisch und symbolisch ist also in einem solchen *Sprachesein von Mathematik* zu suchen; die Symbole der Geometrie können dabei eben auch unwillkürlich unverfremdete Darstellungen der geometrischen Objekte sein, die durch ihre geometrisch-konstruktive Regelhaftigkeit symbolischen Charakter erwerben. Für figurierte Zahlen etwa wurde wiederholt darauf hingewiesen, dass

> […] Plättchen- und Punktmusterdarstellungen nichtformale Darstellungen [sind], die keineswegs nur zur Illustration abstrakter Beziehungen dienen, sondern eine Grundlage für stichhaltige Beweise bilden.
> (Wittmann & Ziegenbalg 2004, 35)

In der hier vorliegenden Arbeit wird für eine Darstellung auf ikonischer Ebene der Bezeichner „Zeichen“ verwendet, für eine Darstellung auf symbolischer Ebene der Bezeichner „Symbol“[13]; ***Symbole sind*** dabei ***Zeichen***

[13] Es macht mathematikdidaktisch auch Sinn in Formeln zwischen Formelzeichen und Formelsymbolen zu unterscheiden. Zwei Rechtecke mit den Seitenlängen a und b bzw. a und c haben den Flächeninhalt ab bzw. ac und den gemeinsamen $ab + ac$. Über verstandene Regeln gegeben ist dies symbolisch. Die gleichen Regeln ergänzt um die zur Addition von Streckenlängen liefern nach passendem Aneinanderlegen der Rechtecke (enaktiv und/oder ikonisch) den Gesamtflächeninhalt auch in der Darstellung $a(b + c)$ und damit eine neue Regel $ac + ac = a(b + c)$. Damit wird der potentielle Symbolgehalt der Zeichen erweitert, die Zeichen durch Verinnerlichung weiter individuell mit Symbolgehalt aufgeladen. Zu Beginn, wenn man noch gar keine Regeln hat, sind auch Variablen nicht-symbolische Zeichen.

mit Kontexten, die ihnen (Spiel-)Regeln auferlegen; zur Semantik gesellt sich die Syntax. Die symbolischen Darstellungen (und Vorstellungen) beinhalten (erkannte) Regeln und wachsen durch diese Regeln über sich selbst hinaus. Sie entgrenzen so Vorstellungsbereiche.

Zeichen können als Elemente von Designationsprozessen aufgefasst werden (vgl. Eco 1977, 27), die man schon im antiken Griechenland diskutierte. Grob:

> [Den Stoikern] zufolge sind bei jedem Zeichenprozess zu unterscheiden: das *semainon*, oder das eigentliche Zeichen […]; das *semainomenon*, oder das, was vom Zeichen ausgesagt wird […]; das *pragma*, nämlich der Gegenstand, auf den das Zeichen sich bezieht […]. (Eco 1977, 28)

Für die Knoten dieses Dreipoles – in der Mathematikdidaktik unter dem Namen epistemologisches Dreieck bekannt (vgl. Lambert 2003, 94, sowie die zahlreichen Arbeiten der mathematikdidaktischen Semiotik, insbesondere der Klagenfurter Schule) – gab es im Laufe der Geschichte unterschiedliche Bezeichner und mit diesen korrespondierend unterschiedliche Sichtweisen (vgl. Eco 1977, 28). Eco selbst unterscheidet Signifikant, Signifikat und Referent und „es gehört zu den Schwierigkeiten der verbalen Sprache, daß für das Signifikat gewöhnlich dieselbe Form wie für den Signifikanten verwendet wird […].“ (Eco 1977, 29)

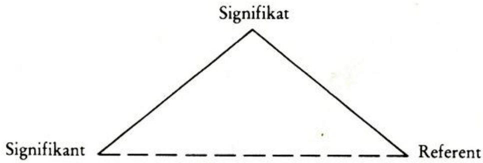


Abb. 4: Der Dreipol bei ECO (Eco 1977, 28), die gestrichelte Kante bringt zum Ausdruck, dass die Beziehung nicht direkt, sondern vermittelt ist.

Für mathematikdidaktische Fragestellungen bietet sich folgende Unterscheidung an (vgl. Lambert 2003, 91f.): Bezeichner (oder Zeichen), Bezeichnung/Bedeutung und Bezeichnetes. Dabei ist das Bezeichnete in der Regel nicht notwendig eine physische Entität sondern häufig ein mathematischer Begriff. Bezeichnung und Bedeutung ordnen die beiden Richtungen in der Beziehung von Bezeichner und Begriff. [14]

[14] Bezeichnung ist die (geordnete) Relation von Begriff und Bezeichner, Bedeutung die dazu inverse von Bezeichner und Begriff.

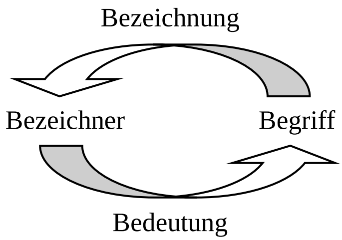


Abb. 5: Dual aufgelöste Triade.

Dies schafft mehr Klarheit – auch für „Dreieck“: Deute ich im Unterricht auf Dreiecke und sage „Dreiecke“, so wird dem Bezeichner ein Begriff (prototypisch) zugeordnet, mit dem Bezeichner etwas bedeutet. Umgekehrt betrachtet wird dabei auch Dingen ihr Name gegeben, es wird bezeichnet.

Vernetzung von symbolischen Zugängen

(Schul-)Mathematik ist eine Sprache, die sich unterschiedlicher regelnder und geregelter Symbolsysteme bedient: formal-algebraischer (FA), konstruktiv-geometrischer (KG) und verbal-begrifflicher (VB) oder Vernetzungen aus diesen Reinformen; diese können jeweils prädikativ oder funktional (vgl. Schwank 1998) ausgeprägt werden. So kann unterschiedlichen Zugängen der Lernenden zur Mathematik (vgl. Lambert 2003, 101) Rechnung getragen werden.

Ein einfaches(?) Beispiel: Eine Mittelsenkrechte ist die Menge aller Punkte, die von zwei gegeben Punkten jeweils gleichen Abstand haben (VB); eine Eigenschaft, die der Bezeichner gut zu verbergen vermag ☺

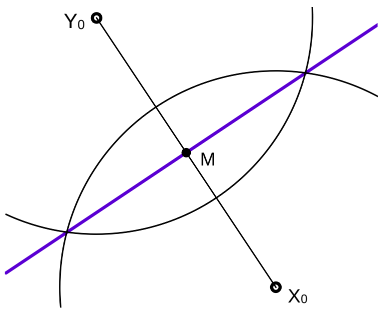


Abb. 6: Symbolischen Charakter stiftende Konstruktion einer Mittelsenkrechten. Mit einem DGS sowohl prädikativ (durch Einzelpunktfolgen), als auch funktional (durch einen beweglichen Radius) darstellbar.

Diese Definition als Ortslinie, die Ihre Schlagkraft im Unterricht bei der verbalen Begründung des Umkreises eines Dreiecks zeigen darf und die natürlich für die voralgebraische klassische griechische Geometrie die naheliegende war, liefert die übliche Konstruktion durch Auswahl eines geeigneten Radius für je einen Kreis um die gegebenen Punkte zur Bestimmung zweier Punkte, welche die Gerade festlegen (KG).

Die verbal-begriffliche Darstellung wird so mit der konstruktiv-geometrischen vernetzt. Dabei geht dann wiederum die Ortsliniendefinition (VB) von Kreis ein: eine Konstruktion mit dem Zirkel bedeutet, die Menge aller Punkte zu betrachten, die von einem Punkt einen gewählten Abstand haben (KG). Ein mit dem Zirkel gezeichneter Kreis wird in dem Moment vom Zeichen zum Symbol, in dem (s)eine Regelhaftigkeit im Kontext wahrgenommen wird.

PYTHAGORAS baut die Brücke zur formal-algebraischen Darstellung.[15] Im Satz des Pythagoras ist ein funktionaler Zusammenhang von Flächeninhalten bei einer bestimmten Konfiguration von Strecken und Figuren festgehalten, der speziell über den Zusammenhang von Quadratseitenlänge und Quadratflächeninhalt (VB, FA und KG) einen über Streckenlängen liefert.

Damit hat der Kreis mit Radius r um den Ursprung eines festzulegenden orthonormalen Koordinatensystems die Darstellung

$$k: x^2 + y^2 = r^2$$

(FA) – oder syntaktisch äquivalent, aber in der Schule (noch?) selten zu finden, die durch die algebraische Geometrie inspirierte als Varietät

$$k: x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

(vgl. Labs 2010). Eine formal-algebraische Darstellung eines gegebenen Kreises erhält man im Koordinatensystems unter Benutzung der folgenden Regel: Eine Verschiebung einer Kurve k: $k(x, y) = 0$ in x-Richtung ist eine mathematische Operation am Argument x, eine in y-Richtung am Argument y (VB und FA).

[15] Dies ist ein wesentlicher Grund den Satz des PYTHAGORAS zu unterrichten: Man benötigt ihn, um Längen im üblichen kartesischen Koordinatensystem zu messen.

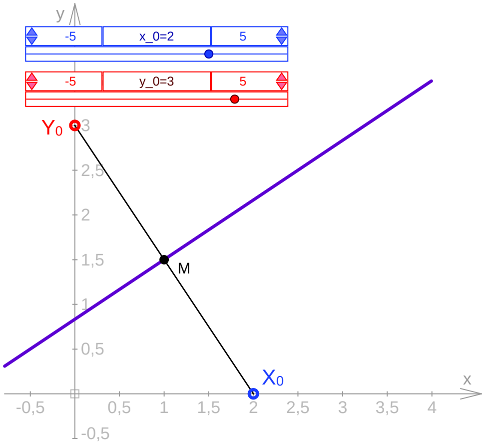


Abb. 7: Symbolischen Charakter stiftende Koordinatisierung einer Mittelsenkrechten.

Betrachten wir nun folgende Aufgabe: „X_0 sei ein Punkt auf der x-Achse und Y_0 einer auf der y-Achse (mit $(x_0|y_0) \neq 0$). Wie sieht die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{X_0Y_0}$ aus?“ Formal-algebraisch steigt man so ein:

$$k_x: (x - x_0)^2 + y^2 = r^2 \text{ und } k_y: x^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

sind Kreise mit jeweils Radius r um die beiden gegebenen Punkte $X_0(x_0|0)$ bzw. $Y_0(0|y_0)$. Schnittpunkte sind diejenigen Punkte, die beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen (VB). Gleichsetzen liefert die Gleichung:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = x^2 + (y - y_0)^2$$

Ausmultiplizieren (FA, für positive Größen ist auch KG möglich) ergibt

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2$$

und Eliminieren und Umstellen

$$-2x_0x + x_0^2 - y_0^2 = -2y_0y.$$

In syntaktisch äquivalenter aber schulüblicherer[16] Form lautet die Gleichung

$$y = \frac{x_0}{y_0}x - \frac{x_0^2 - y_0^2}{2y_0} \text{ oder auch } y - \frac{1}{2}y_0 = \frac{x_0}{y_0}\left(x - \frac{x_0}{2}\right).$$

Diesen beiden kann man die Gerade jeweils ansehen, sie sind unterschiedliche formal-algebraische Symbole für die Gerade. In der ersten sehen wir Steigung und Achsenabschnitt. Spätestens bei der zweiten Gleichung sollte

[16] Die Situierung in der derzeitigen Schule liefert den Kontext für jene Darstellungen und gegen diese: $2x_0x - 2y_0y - (x_0^2 - y_0^2) = 0$.

einem dann aber auch ins Auge springen, dass man auf die längliche Rechnung auch verzichten könnte, um zur deduzierten Konsequenz zu gelangen: Die Gegenzahl des Kehrwertes der Steigung einer Geraden liefert die Steigung einer orthogonalen Geraden (VB). Die Steigung der Strecke ist $-\frac{y_0}{x_0}$ (KG und FA). Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Koordinaten von A und B (VB und FA). Verschiebungen in x-Richtung sind Operationen am Argument, die in y-Richtung am Wert y einer Funktion (s.o., VB).

Enaktiv–ikonisch–symbolische Vernetzungen für den Geometrieunterricht

Die folgenden Beispiele wollen den Nutzen der vorgeschlagenen mathematikdidaktischen Brille für die alltägliche Unterrichtspraxis demonstrieren.

Zwei Klassiker aus der Blüte der Reformpädagogik und schon davor

Figurierte Zahlen Bereits vor der Etablierung des institutionell durch öffentliche Schulen verbreiteten formal–algebraischen Kalküls, konnten Menschen schon (gewisse) quadratische Gleichungen symbolisch lösen und Summen von (gewissen) Wurzeln bestimmen. Dazu bediente man sich zur Zeit der Coß (vgl. Abbildung 8) konstruktiv–geometrischer symbolischer Methoden, die im Wesentlichen beinhalten, dass sich Produkte zweier Zahlen Arithmetik und Geometrie vernetzend durch Flächeninhalte von Rechtecken verbal–begrifflich und konstruktiv–geometrisch darstellen lassen.

Die Aufgabenstellung „Das Quadrat jeder (natürlichen) Zahl ist um 1 größer, als das Produkt ihrer benachbarten Zahlen.“ ermöglicht auf historisches Bewusstsein hörend einen enaktiv – ikonisch – symbolischen Weg (vgl. Abbildung 9). Zunächst untersucht man die Frage für natürliche (An-)Zahlen, was einen Einsatz von Legeplättchen (auch am Gymnasium und in der Lehrerbildung in allen Phasen) ermöglicht, um schließlich durch Ausschöpfung des Potentials der zur Verfügung stehenden konstruktiv-geometrisch repräsentierten Spielregeln zur dritten binomischen Formel zu gelangen.[17]

[17] Wie weit ein solcher Rechteckkalkül mit umfangreichen Möglichkeiten zu enaktiv – ikonischen Vorspielen mit Plättchen und/oder Kartonrechtecken zu den symboli-

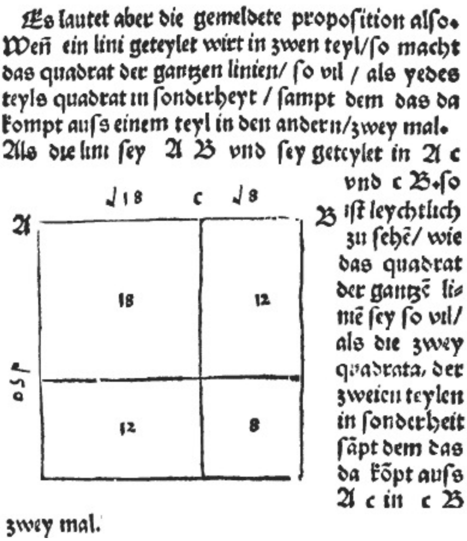

Es lautet aber die gemeldete proposition also.
Weñ ein lini geteylet wirt in zwen teyl/so macht das quadrat der gantzen linien/ so vil / als yedes teyls quadrat in sonderheyt / sampt dem das da kompt auss einem teyl in den andern/zwey mal.
Als die lini sey A B vnd sey geteylet in A c vnd c B. so ist leychtlich zu sehẽ/ wie das quadrat der gantzẽ linie sey so vil/ als die zwey quadrata/ der zweien teylen in sonderheit sãpt dem das kõpt auss A c in c B zwey mal.

Abb. 8: $\sqrt{18} + \sqrt{8}$ konstruktiv-geometrisch symbolisch (Stifel 1553).
Der erste Absatz ist die damalige verbal-begriffliche Version der ersten binomischen Formel.

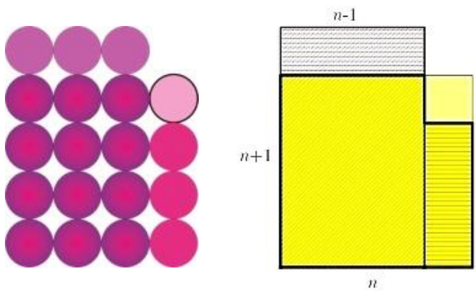


Abb. 9 links: Ikonisch für $n = 4$, aber symbolisch für diejenigen, die verstanden haben, dass diese Figurierung für alle natürlichen n möglich ist;
rechts: Ein erster Verallgemeinerungsschritt, da die Übersetzungs-Spielregel „Das Produkt zweier Zahlen entspricht dem Flächeninhalt eines Rechtecks“ über die natürlichen Zahlen hinaus gültig ist.

Funktion in geometrischem Gewand Die Meraner Reform des Mathematikunterrichts zum Beginn des 20. Jahrhunderts arbeitete die zentrale Be-

---

schen Spielregeln noch tragen kann, sieht man eindrucksvoll z.B. in (Nelsen 1993), wo darüberhinaus auch noch weitere konstruktiv-geometrisch symbolische Methoden ihre Wirksamkeit demonstrieren.

deutung des Funktionsbegriffes für den Mathematikunterricht heraus (vgl. Lietzmann 1910, 144 bzw. Krüger 2000). Funktionen sollten dabei explizit auch im „geometrischen Gewande“ auftreten, was impliziert, dass der heute oft dominierenden formal-algebraischen Funktionsdarstellung ursprünglich für den Mathematikunterricht konstruktiv-geometrische (oder zumindest numerisch gestützte Näherungen solcher) zur Seite gestellt wurden resp. werden sollten. Eine typische Aufgabe für einen solchen, breiten Zugang ist die bekannte Kastenaufgabe:

> Aus einem rechteckigen Blech mit den Seiten 8 cm und 12 cm werden an den Ecken Quadrate mit der Seite a herausgeschnitten. Dann wird das Blech längs der [...] punktiert gezeichneten Strecken zu einem nach oben offenen Kasten umgebogen. Verfolge, wie sich der Inhalt ändert, wenn a nacheinander die Werte 1 cm, 2 cm usf. (bis?) durchläuft. (Lietzmann 1926, 240)

Enaktiv lassen sich auch heute noch – selbst am Gymnasium und in der Lehrerbildung – leicht aus Zeichenkarton solche Kästen bauen, wobei sich eine Unterteilung in 5 mm-Schritten statt der im Text angegebenen bewährt hat. Die greifbaren Modelle sind prädikativen Vergleichen leicht zugänglich und es ist gar nicht so einfach, in diesen Kisten die gesuchte schätzend zu erblicken.[18] Die auf diesem Wege experimentell näherungsweise zu gewinnenden, erlebbaren Volumen lassen sich tabellarisch und graphisch erfassen. Beim Graph kann die Spielregel des glatten Verbindens von Messpunkten zur Interpolation von Werten zum Zuge kommen.

Spielregelbeladbare ikonische Darstellungen der Situation mit Übergängen zu spielregelbeladenen symbolischen sind auch mit einem DGS leicht herzustellen, um mathematikdidaktisch motiviert den intermodalen Transfer angemessen zu berücksichtigen. Dazu können hier Kastennetz, Funktionsgraph in dem das Volumen des Kastens gegen die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats aufgetragen ist, und ein Schrägbild synchron dargestellt werden. Auch hier ist es interessant und der Vernetzung von Darstellungen untereinander mit Vorstellungen dienend, zunächst aus den Schrägbildern den volumengrößten Kasten zu schätzen, da erfahrungsgemäß[19] die Frontfläche die Wahrnehmung stark beeinflusst und die Bewertung der Tie-

[18] Eine Statistik dazu vernetzt weiter.

[19] Diese Aussage stützt sich auf empirische, wenn auch nicht statistisch erfasste Daten, aus Schule und Lehrerbildung in allen Phasen.

fe des Kastens im Schrägbild Probleme bereitet. Das Volumen kann in der beweglichen Konstruktion auf dem Bildschirm statt über eine bereits formal-algebraisch umgestellte Formel konstruktiv-geometrisch über das Produkt der im Netz gemessenen Quaderkantenlängen bestimmt werden (vgl. Lambert 2010, 160f.).

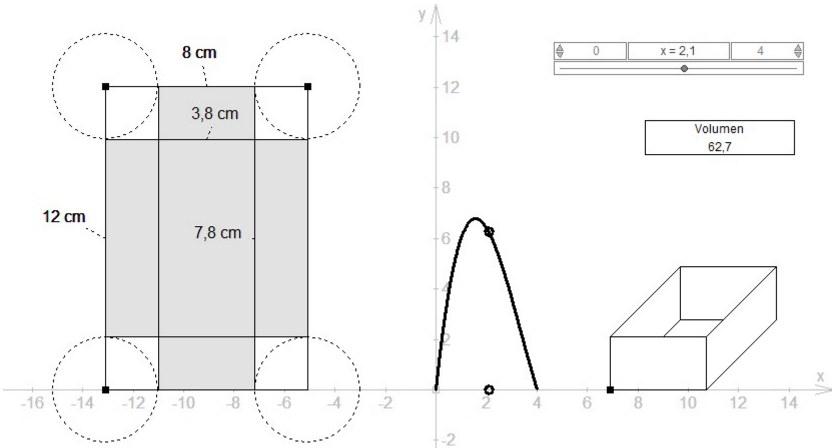


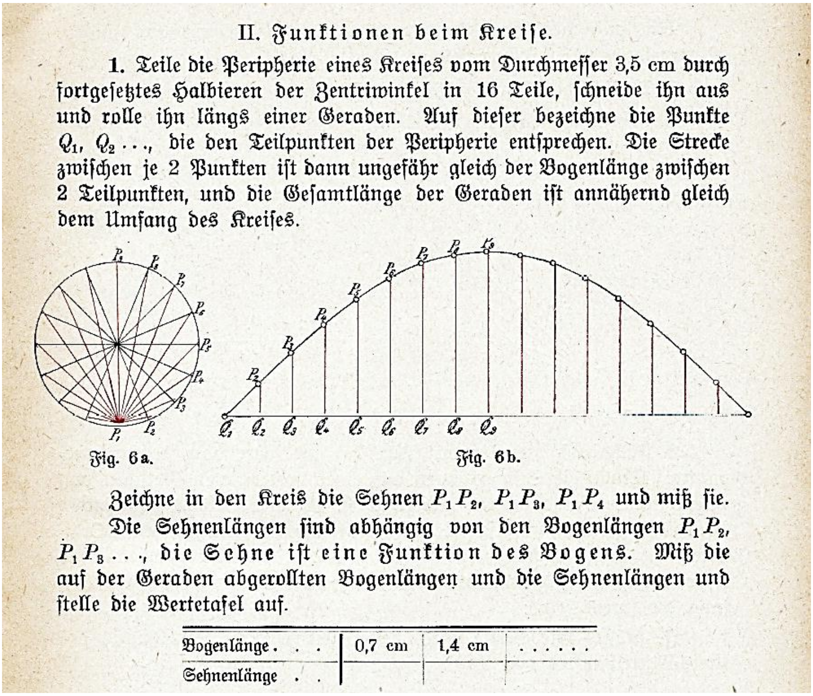
Abb. 10: Ein nach Schrägbild intuitiv größter Kasten.[20]

Der Einsatz eines DGS flexibilisiert die Darstellung darüber hinaus auch bezüglich der möglichen kognitiven Präferenzen. Funktional Lernende können zunächst von Schiebereglerveränderungen abhängige Veränderungen von Netz, Messpunkt auf dem Graphen und Schrägbild beobachten. Prädikativ Lernende dagegen können zunächst einzelne Schiebereglerpositionen nutzen, um dort Netz, Messpunkt auf dem Graphen und Schrägbild in Beziehung zu setzen und sukzessive mit jenen an anderen Positionen zu vergleichen – allerdings müssen sie dazu die Konstruktion auf dem Bildschirm oder im Kopf doppeln. Übergänge zwischen den Präferenzen sind danach medial gestützt jeweils leichter zugänglich. Die Aufreihung der gebastelten Kästen bietet diesbezüglich weniger Potential.

Auch die etwas weniger bekannte Aufgabe „Wie verändert sich die Länge einer Kreissehne, wenn ein Endpunkt festbleibt und der andere auf der Kreislinie bewegt wird?“ ist prädestiniert für einen solchen enaktiv – iko-

[20] Detailliertes zu mentalen Operationen bei Graphen findet sich in (Vogel 2006).

nisch – symbolischen Einsatz, der klassische und Neue Medien integriert einsetzt.



II. Funktionen beim Kreise.

1. Teile die Peripherie eines Kreises vom Durchmesser 3,5 cm durch fortgesetztes Halbieren der Zentriwinkel in 16 Teile, schneide ihn aus und rolle ihn längs einer Geraden. Auf dieser bezeichne die Punkte $Q_1, Q_2 \ldots$, die den Teilpunkten der Peripherie entsprechen. Die Strecke zwischen je 2 Punkten ist dann ungefähr gleich der Bogenlänge zwischen 2 Teilpunkten, und die Gesamtlänge der Geraden ist annähernd gleich dem Umfang des Kreises.

Fig. 6a. Fig. 6b.

Zeichne in den Kreis die Sehnen P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 und miß sie. Die Sehnenlängen sind abhängig von den Bogenlängen P_1P_2, $P_1P_3 \ldots$, die Sehne ist eine Funktion des Bogens. Miß die auf der Geraden abgerollten Bogenlängen und die Sehnenlängen und stelle die Wertetafel auf.

Bogenlänge . . .	0,7 cm	1,4 cm	. . . . . .
Sehnenlänge . .			

Abb. 11: Kreissehnenlänge als Funktion der Bogenlänge (Reinhardt & Zeisberg 1922,5)

Hier sind dann auch funktionale Vergleiche selbst ergreifbar, wenn auf einem Nagelbrett Gummis als Sehnen gepannt werden und die Spannung erlebt werden kann (vgl. Roth 2005).

Das Foto einer Parabel (nicht nur) auf dem Schulhof

Es ist inzwischen eine recht weitverbreitete Aufgabenstellung für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I (verbal-begrifflich definierte) Ortslinien wie z.B. Parabeln[21] auf dem Schulhof zu stellen und eine entsprechende formal-algebraische Darstellung nach der Wahl eines geeigneten

[21] Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die gleichen Abstand zu einer gegebenen Gerade und einem gegebenen Punkt (der nicht auf der Parabel liegt) haben.

Koordinatensystems herzuleiten – wobei auch hier PYTHAGORAS als Brückenbaumeister dient.[22]

Hier soll nun eine enaktiv – ikonisch – symbolische Antwort auf die in diesem Kontext eigentlich naheliegende, wenn auch selten gestellte Frage „Wenn ich eine Parabel fotografiere, dann habe ich auch eine Parabel auf dem Foto?“[23] skizziert werden. Wesentlich für die Beantwortung ist die Lage der Objektebene und der Bildebene zueinander, denn in der Regel wird der Fotoapparat „schräg“ gehalten, z.B. wenn die Klasse auf dem Schulhof aus dem ersten Stock fotografiert wird. Vor diesem Hintergrund bietet sich als mathematisch modellierende Übersetzung der Situation die innermathematische Frage an „Welche Kurve entsteht als ebener Schnitt des Kegels, der eine Parabel als Grundkante hat, bei einer solchen schrägen Lage der Schnittebene?“

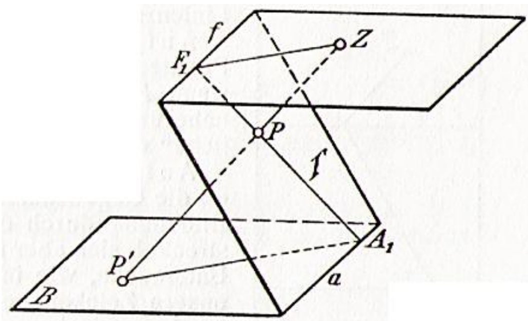


Abb. 12: Perspektive Konstruktion eines Punktes bezüglich eines Zentrums Z. (Abbildung: Lietzmann 1933, 17 – hierin ist P′ das Urbild auf dem Schulhof, P dessen Bild auf dem Foto.)

Die zugehörige Konstruktion (Abbildung 12) lässt sich leicht situieren: Die Konfiguration der beiden Ebenen lässt sich mit Zeichenkarton falten. Das Zentrum liegt in einer zur Objektebene parallelen Ebene. Der Lichtstrahl samt einer ihn enthaltenden Ebene wird ebenfalls auf Karton greifbar und kann durch geeignetes Einschneiden in seine Position gebracht werden (Abbildung 13 links). Schließlich wird noch der Schnitt von Lichtstrahlebe-

[22] Die Antwort auf die Frage nach der Vernetzung von symbolischen Zugängen hierbei lässt sich analog zum Beispiel Mittelsenkrechte finden.

[23] Auch höchst relevant für die derzeit omnipräsenten Parabelbrückenfotos, worin ein echter Anwendungsbezug zu finden ist.

ne und Objektebene eingezeichnet. Entfalten dieses, eine mögliche Lagebeziehung von Objektebene, Bildebene und Projektionszentrum exemplarisch konkretisierenden, Kartons macht das Muster sichtbar, das eine konstruktiv-geometrisch deduzierbare Lösung in einer Ebene liefert.

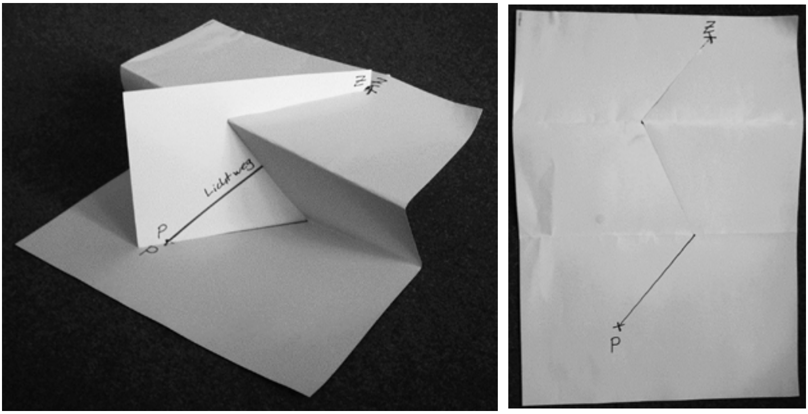


Abb. 13: Enaktive Darstellung der perspektiven Konstruktion eines Punktes.
Aus dem entfalteten Karton lässt sich die Konstruktionsregel (über Parallelen) herauslesen.

Der Karton ist durch zwei Parallelen in drei Bereiche geteilt (Abbildung 13 rechts). Die Konstruktion des Bildpunktes folgt offensichtlich folgenden, leicht begründbaren Regeln: Der Schnitt von der oberen Kante bis zum Zentrum und die Linie vom abzubildenden Punkt zur unteren Kante sind parallel zu einander und Zentrum und Punkt sind auch direkt verbunden. Mit dieser Einsicht lässt sich der Bildpunkt als Schnittpunkt konstruieren

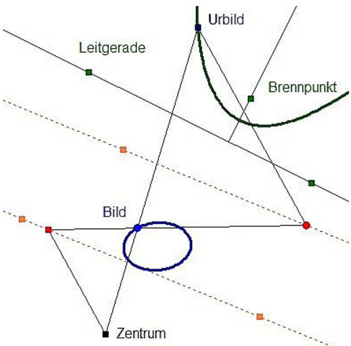


Abb. 14: Ellipse als mögliches perspektives Bild einer Parabel.
Der Ellipsenpunkt auf der Fluchtgerade hat als Urbild den unendlich fernen Punkt der Parabel.

Die entsprechende Konstruktion mit einem DGS ergibt als Antwort auf unsere Ausgangsfrage, dass auf dem Bild z.B. ein Ellipsenausschnitt zu sehen sein kann. Ein solcher lässt sich aber selbstverständlich lokal so gut durch eine Parabel approximieren, dass der Unterschied auf dem Foto oft kaum auffällt.

Umkleidekabinen

Um die wichtige Frage zu beantworten, wie man in der neuen Jeans von hinten aussehen wird, sind in manchen Bekleidungsgeschäften in den Umkleidekabinen zwei Spiegel so installiert, dass man sich selbst von hinten begutachten kann. Wie können diese Spiegel zu einander stehen, damit dies funktioniert?

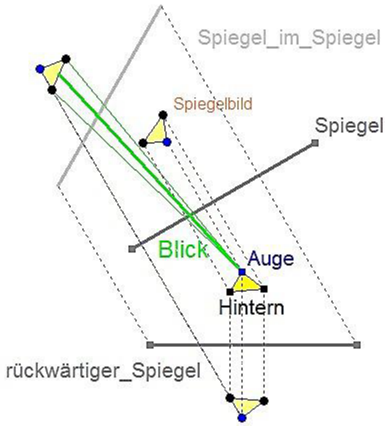


Abb. 15: Enaktiver Einstieg und konstruktiv-geometrisch symbolische Lösung des Umkleidekabinenspiegelproblems.

Die Realsituation lässt sich enaktiv mit Spiegelkacheln nachspielen. Verschiedene Konfigurationen können hier von Lernenden (Schülerinnen und Schüler, Studierende oder Lehrpersonen) systematisch durchprobiert werden und durch einen Blick über die Schulter der Spielfigur, können jene selbst überprüfen, ob die untersuchte Konfiguration jeweils zielführend sein könnte. Zum intermodalen Transfer zum Ikonischen kann dann zunächst die Situation reduziert und die Spielfigur und der vor dieser stehende Spiegel betrachtet werden. Spiegelkachel und Spielfigur stehen dazu auf einem Papierbogen. Die Unterkante der Spiegelkachel dient als Lineal zum Zeichnen einer Linie, die schließlich verbal-begrifflich und konstruktiv-geometrisch als Spiegelachse symbolisch erfasst werden kann. Dazu zeichnet man zu der

Linie den „Punkt“ ein, auf dem die Spielfigur vor dem Spiegel steht und – geeignet angepeilt – den „Punkt“ hinter dem Spiegel, auf dem das virtuelle Pendant der Spielfigur verortet zu sein scheint. Nach Entfernen von Spielfigur und Spiegelkachel hat man eine ikonische Darstellung des mathematischen Modells der Situation. Der Übergang zum Symbolischen ist hier in der Entdeckung der Spielregel zur Konstruktion eines Spiegelpunktes zu einem gegebenen Punkt zu sehen. Mit dieser Erkenntnis und ihrer Nutzung lässt sich die Problemsituation mathematisieren und einer Lösung zuführen. Ein Rückgriff auf die enaktive Repräsentation zeigt selbst erfahrbar die symbolische „Einsicht“ bestätigend, dass man bei der Begutachtung das Spiegelbild seines eigenen rückwärtigen Spiegelbilds im Spiegelbild des rückwärtigen Spiegels im Spiegel vor sich vor sich hat (siehe Abbildung 15).

Literatur

Aebli, Hans: Zwölf Grundformen des Lehrens. Stuttgart: Klett-Cotta. 10. Auflage. 1998

Bruner, Jerome. S.: Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin: Berlin Verlag. 1974

Eco, Umberto: Zeichen. Einführung in einen Begriff und seine Geschichte. Frankfurt am Main: Suhrkamp. 1977

Falk, K. & Rohrauer, G. & Wais, K.: Arithmetik und Geometrie für Deutsche und Allgemeine Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. I. Teil. Wien: Deutscher Verlag für Jugend und Volk. 1926

Fischer, Roland & Malle, Günther, unter Mitarbeit von Bürger, Heinrich: Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim: BI. 1985

Freudenthal, Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett. 1973

Jahnke, Thomas: Kleines Aufgabenbrevier. Zur Klassifizierung von Aufgaben im Mathematikunterricht. Pädagogisches Landesinstitut Brandenburg. o.J. online (27.08.11): http://ddi.cs.uni-potsdam.de/

KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003

Krüger, Katja: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos. 2000

Labs, Oliver. Vernetzungen von Geometrie und Algebra in der Sekundarstufe 1 mit Hilfe der Software Surfer. Vortrag auf der Herbsttagung des AK-Geometrie in Marktbreit 2010

Lambert, Anselm: Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In Bender, Peter et al (Hrsg.): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 2002 in Soest. Berlin, Hildesheim Franzbecker. 2003

Lambert, Anselm: Beweise, was Du (nicht) siehst. In Kaune, Christa & Schwank, Inge & Sjuts, Johann (Hrsg.) :Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Band 1. Osnabrück: fmd. 2005

Lambert, Anselm: Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben. In: Herget, Wilfried et al (Hrsg.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht ISTRON Band 10 Mathematik im Alltag. Berlin, Hildesheim: Franzbecker. 2007

Lambert, Anselm & Selzer, Pia: Schillernde Diskretisierung – eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik. In Kortenkamp, Ulrich (Hrsg.) et al., Informatische Ideen im Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises “Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen. Hildesheim: Franzbecker. 2008. 87-100

Lambert, Anselm: Experimentelle Geometrie. Aus Erfahrung lernen. In Krüger, Katja & Ullmann, Philipp: Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer. Eichstätt: Polygon. 2010

Ludwig, Matthias & Filler, Andreas: Einladung Tagung des GDM-Arbeitskreis Geometrie 2011. Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. http://www.ak-geometrie.de

Lietzmann, Walther: Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1910

Lietzmann, Walther: Aufgabensammlung und Leitfaden der Geometrie. Ausgabe B: Für Anstalten realer Richtung. Unterstufe. 6. Auflage. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1926

Lietzmann, Walther: Kegelschnittlehre. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 1933

Nelsen, Roger B.: Proofs without words. Exercices in visual thinking. Washington: MAA. 1993

Reinhardt, W. & Zeisberg, M.: Geometrie und Arithmetik für Lyzeen. Teil II. 2. Auflage. Frankfurt am Main: Diesterweg. 1922

Reinmann-Rothmeier, Gabi & Mandl, Heinz: Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In Krapp, Andreas & Weidenmann, Bernd (Hrsg.) Pädagogische Psychologie. Weinheim: Beltz PVU, 4., vollständig überarbeitete Auflage. 2001. 601-646

Rembowski, Verena: Concept Image und Concept Definition der Mathematikdidaktik von concept image and concept definition in mathematics. Vortrag auf der 29.

Arbeitstagung des Arbeitskreises “Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 24. bis 26. September 2011 in Soest

Roth, Jürgen: Kurven erzeugende Sehnen. ml 130(2005), 8-11

Sjuts, Johann: Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). Der Mathematikunterricht, 47(2001)1, 47-60

Stifel, Michael: Die Coß Christoffs Rudolffs. Die schönen Exempeln der Coß. Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehrt. Königsberg 1553. Online (23.07.12): http://www.ub.uni-bielefeld.de/diglib/rechenbuecher/coss

Straka, Gerald & Macke, Gerd: Lehr-Lern-theoretische Didaktik. Waxmann. 2002

Schupp, Hans: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen. Der Mathematikunterricht 34(6), 5–16.

Schwank, Inge: Kognitive Mathematik, Online: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik.htm. 1998

Vogel, Markus: Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung. Berlin, Hildesheim: Franzbecker. 2006

Weigand, Hans-Georg et al. Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum. 2009

Wittmann, Erich Chr.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6., neugearbeitete Auflage. Braunschweig: Vieweg. 1981

Wittmann, Erich Chr.: Elementargeometrie und Wirklichkeit. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg. 1987

Wittmann, Erich Chr. & Ziegelbalg, Jochen: Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In Müller, Gerhard N. & Steinbring, Heinz & Wittmann, Erich Ch.: Arithmetik als Prozess. Seelze: Kallmeyer. 2004. 35-53

Zech, Friedrich. Grundkurs Mathematikdidaktik. Weinheim und Basel: Beltz. 7. unveränderte Auflage 1992

Lutz Führer danke ich herzlich für seine konstruktiv-kritischen Kommentare zum Entwurf der vorliegenden Darstellung meiner Vorstellung zu enaktiv – ikonisch – symbolischen Aneignungsformen beim Geometrielernen.

Campus Hubland Nord goes Google Earth – Ebenen der Vernetzung am Beispiel eines Vermessungsprojekts

Markus Ruppert, Jan Wörler

Zusammenfassung. Vermessungsprobleme sind Anwendungsprobleme in denen die Mathematik ihren Ursprung genommen hat. Die Möglichkeiten moderner Messinstrumente und geeigneter Software können heute genutzt werden, um z. B. die Gebäude ganzer Innenstädte als virtuelle 3D-Modelle nachzubilden und darzustellen. Im Vergleichen und Abwägen verschiedener traditioneller und moderner Werkzeuge im Rahmen einer Vermessungsaufgabe spiegelt sich die mathematische Leitidee „Messen“ wider. Im Umgang mit Programmen zur Erstellung und Darstellung von 3D-Modellen kann außerdem die Leitidee „Raum und Form“ angesprochen werden. Eine besondere Herausforderung bei umfangreicheren Vermessungsprojekten stellen außerdem die Erfassung, Organisation und Dokumentation der gewonnenen Messdaten dar (Leitidee „Daten und Zufall“). Neben der Möglichkeit zur Vernetzung mathematischer Inhalte werden durch die projektartige Durchführung derartiger Vermessungsaufgaben, wie sie im Rahmen der Würzburger Schülerprojekttage stattfand, noch weitere Ebenen der Vernetzung eröffnet.

Die „Schülerprojekttage“ der Uni Würzburg

Im Jahr 2002 wurden von H.-G. Weigand an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Würzburg die „Schülerprojekttage“ zur Förderung besonders begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler unterfränkischer Gymnasien ins Leben gerufen. Seitdem findet dieses viertägige Seminar jährlich mit rund 50 Teilnehmerinnen und Teilnehmern statt. Die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 10–12 bearbeiten dabei in Kleingruppen, unter Anleitung und Betreuung durch Dozenten und Studierende, aktuelle Problemstellungen aus den Bereichen Mathematik und Informatik.

Ziel der Projekttage ist es einerseits, die institutionelle Vernetzung von Schule und Hochschule zu intensivieren, indem Schülerinnen und Schülern die Welt des mathematischen und informatischen Wissenschaftsbetriebs kennen lernen. Andererseits soll den Lernenden die Möglichkeit gegeben werden, sich über vier Tage hinweg einer mathematisch oder informatisch anspruchsvollen Problemstellung zu widmen. Dies geschieht im Rahmen einer Projektaufgabe, bei deren Bearbeitung die Schüler sich innerhalb ihrer

Projektgruppe weitgehend selbst organisieren. Sie erfahren dabei die Vorzüge aber auch die Schwierigkeiten der Projektarbeit und befinden sich währenddessen im intensiven Austausch mit Gleichaltrigen, die ihr Interesse an der Mathematik teilen.

Die Themen, die in den letzten Jahren vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik angeboten wurden, versuchen einerseits dem Anspruch gerecht zu werden, eine Problemstellung anzubieten, die der Erfahrungswelt der jungen Menschen entspringt und die sich gleichzeitig für eine projektartige Bearbeitung eignet. Dies schlägt sich in einer Aufgabenstellung nieder, aus welcher der Anwendungsbezug direkt erkennbar ist, während das angestrebte Produkt und der Weg dorthin aber weitgehend offen bleiben. Andererseits sollen die Themen so gewählt sein, dass im Laufe der Bearbeitung die Vernetzung diverser mathematischer Disziplinen und Teilgebiete erforderlich ist.

Im Rahmen der bisherigen Projektaufgaben untersuchte die Projektgruppe des Lehrstuhls für Didaktik der Mathematik z. B. die Möglichkeiten von Dachkonstruktionen mit dem Merosystem (2002/2003), nahm den Vorgang des Einparkens unter eine mathematische Lupe (2006), analysierte Verkehrsströme an Kreisverkehren und Ampelkreuzungen (2007) und die Bewegung einer Baggerschaufel (2008), entwickelte biometrische Erkennungssysteme (2009) und mathematische Führungen durch das Würzburger Museum für Konkrete Kunst (2009) oder fragte nach der Mathematik im Leben eines Bienenvolkes (2010). Wie diese Projekte im konkreten Fall von Schülern umgesetzt wurden, wird z. B. in Ruppert (2010), Roth (2010), Weigand (2010) und Wörler (2010) beschrieben.

Bereits die Titel der einzelnen Projektthemen verraten den fächerübergreifenden und anwendungsbezogenen Ansatz, der den Fragestellungen zu Grunde liegt. Über den Anwendungsbezug werden dabei, meist ausgehend von geometrischen Teilproblemen, Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Disziplinen hergestellt, deren Beitrag zur Problemlösung nur im Zusammenspiel zum Tragen kommt. Bei der Bearbeitung der Projektaufgabe kommen immer auch digitale Werkzeuge zum Einsatz. Für die Analyse von Werken der Konkreten Kunst beispielsweise wurde dynamische Geometriesoftware verwendet, biometrische Daten wurden in einer Datenbank organisiert und Bienenwaben mit dynamischer Raumgeometriesoftware modelliert.

Auch mit dem Schülerprojekt des Jahres 2011 wurde die Tradition anwendungsbezogener, fächerübergreifender Problemstellungen fortgesetzt, bei deren Bearbeitung innermathematische Bezüge ebenso hergestellt werden müssen wie Beziehungen zu anderen Fachbereichen und traditionelle Werkzeuge ebenso eingesetzt werden können wie moderne digitale Hilfsmittel.

„Campus Hubland-Nord goes GoogleEarth“

Im Zentrum des Schülerprojekts 2011 standen die Vermessung realer Gebäude und deren Modellierung mit einer geeigneten Raumgeometriesoftware. Unter dem Titel „Campus Hubland-Nord goes GoogleEarth“ befassten sich sieben Schülerinnen und Schüler mit der Umsetzung eines (realen) Stadtteils (es handelt sich dabei um das ehemalige Würzburger Kasernengelände „Leighton Barracks“, das durch den Ausbau der Universität Würzburg nun Teil des Universitätscampus‘ ist) in die virtuelle 3D-Welt von GoogleEarth. Da viele Navigationssysteme diesen neuen Stadtteil in ihren Karten noch nicht aktualisiert haben, kann GoogleEarth auf diese Weise Besuchern und zukünftigen Studierenden der Universität aber auch Zulieferern und Kurierdiensten als Wegweiser und Orientierungshilfe dienen.

Abb. 1: Der Campus "Hubland-Nord" - ein Teil der ehemaligen "Leighton Barracks" (Quelle: © OpenStreetMap und Mitwirkende, CC-BY-SA)

Innerhalb des Zeitraumes von vier Tagen sollte ein „möglichst großer Teil“ der Gebäude dieses Geländes „möglichst exakt“ in die virtuelle Welt übertragen werden. Die Arbeit der Projektgruppe bestand dabei zunächst in der Planung der Datenerhebung sowie der Erfassung und Organisation der benötigten Daten im Feld. Um die Längen kleinerer, gut erreichbarer Strecken zu messen, kamen dabei Zollstock und Maßband zum Einsatz; bei größeren Distanzen und solchen, die man nicht durch direktes Anlegen von Messlatten oder -bändern erheben kann, wurden Laserdistanzmesser verwendet, die Entfernungen durch das Aussenden eines unsichtbaren Lichtstrahles und Einfangen seiner Reflexionen bestimmen können.

Abb. 2: Zollstock und Maßband dienen zur Vermessung kleinerer Strecken, wie sie bei Fenstern und Türen, Nischen und Vorsprüngen vorkommen – sofern man sie erreichen kann.

Abb. 3: Große Distanzen und solche, die nur schlecht oder gar nicht mit herkömmlichen Messlatten oder -bändern erreichbar sind, lassen sich mit einem modernen Tachymeter messen.

Bereits bei Abständen von rund 15–20 Metern liefern Laserdistanzmesser mitunter exaktere Messwerte, als sie durch Anlegen eines Bandes oder gar „stückeln“ mit einem Zollstock von den Schülerinnen und Schülern erreicht werden konnten. Bei Messtrecken ab rund 50–60 Metern versagen Standardgeräte allerdings, und so wurden Gebäudelängen und – wegen der schlechten Erreichbarkeit – auch Höhen mit Hilfe eines Tachymeters bestimmt. Dieses optische Gerät misst Kippwinkel gegen die Horizontale und Drehwinkel in einer Bezugsebene und ist außerdem mit einem sehr leistungsfähigen Laserdistanzmesser ausgestattet.

In allen Fällen muss jedoch zunächst die zu vermessende Geometrie genauer analysiert werden: Welche Gebäudekanten können als senkrecht oder waagrecht angenommen werden (überprüfen ggf. mit Senkblei), wo können rechte Winkel erwartet werden (überprüfen durch Kontrollmessungen und Pythagoras)? Wie können unter diesen Annahmen Symmetrien genutzt werden um die Messung zu vereinfachen? Wie kann die Gebäudestruktur in einzelne, gut zu bestimmende Teilflächen oder -körper zelegt werden?

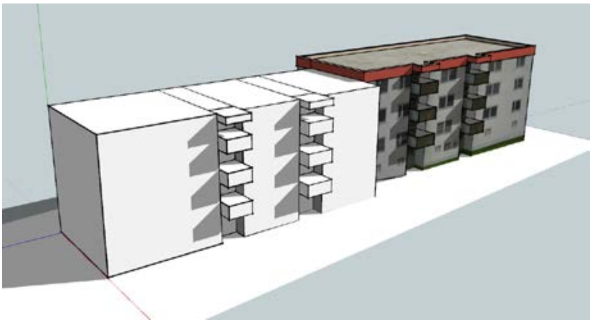


Abb. 4: Um die Datenmenge bei der Vermessung übersichtlich zu halten, können Annahmen z. B. zur Rechtwinkligkeit getroffen, Gebäude in geometrische Grundkörper zerlegt und Geometrien genutzt werden. Das vorliegende Gebäude lässt sich aus Quadern zusammensetzen.

Das Datenmaterial für eine spätere Texturierung der Gebäudemodelle wurde mit Hilfe von einfachen Digitalkameras erzeugt. Die Aufnahmen gestalten sich vor allem dann schwierig, wenn Gebäudeteile durch Bebauung oder Bewuchs verdeckt werden. Auch hier führte eine genauere Betrachtung der Oberflächenstrukturen (etwa: Wo wiederholen sich Bauelemente, wie Fenster oder Gitter; wo wiederholen sich Muster, die sich aus dem Anstrich oder dem Material des Gebäudeteils ergeben?) zur Vereinfachung der Datenerhebung – und schließlich auch zu vollständigen Datensätzen.

Im zweiten Schritt wurden die erhobenen Daten in virtuelle 3D-Modelle umgesetzt und diese abschließend mit Texturen versehen. Diese Teilaufgaben wurden mit der frei verfügbaren Geometriesoftware „SketchUp“ der

Firma Google umgesetzt, da das intuitive Bedienkonzept des Programmes eine schnelle Einarbeitung und damit die zügige Auseinandersetzung mit der Modellierungsaufgabe , also dem Herstellen möglichst fotorealistischer virtueller Nachbildungen der Gebäude, ermöglicht.

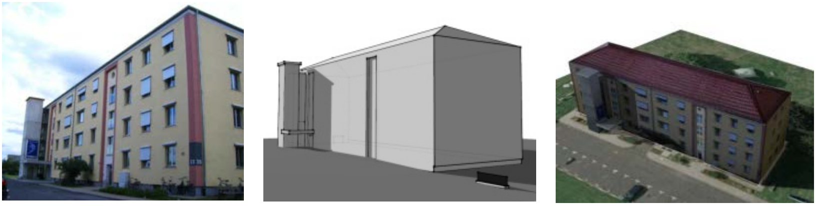


Abb. 5: Vom realen Gebäude zum virtuellen Modell

Abschließend wurde der modellierte Stadtteil zum Review-Verfahren bei Google eingereicht und ist inzwischen zumindest teilweise in GoogleEarth einsehbar.

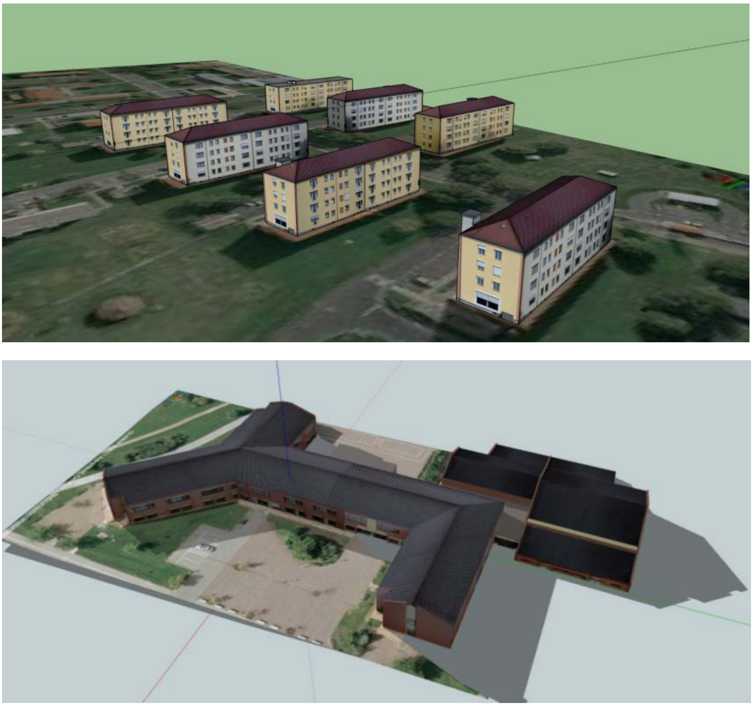


Abb. 6: Virtuelle Gebäudemodelle in Google Earth
(oben: Bürogebäude; unten: Sprachen- und Didaktikzentrum)

3D-Modellierung wozu?

Anwendungsbezug und Berufsfeldorientierung

Projekte wie das hier beschriebene werden heute auf professioneller Ebene von Forschern, der Politik und von Wirtschaftsunternehmen durchgeführt. Während die Wissenschaft an neuen, schnellen Verfahren der Vermessung und Steuerung durch den Raum interessiert ist und administrative Institutionen 3D-Modellwelten etwa unter den Gesichtspunkten des Zivilschutzes (z. B. Hochwasserschutz) verfolgen, ist das virtuelle Abbild unserer realen Welt vor allem auch für Transportunternehmen und Speditionen eine Grundlage der Routenplanung und damit Teil logistischer Fragestellungen. Architekten und Stadtplaner können auf der Basis virtueller 3D-Modelle beispielsweise Simulationen neuer Gebäudekomplexe, von Luftströmungsverhältnissen oder der Wohnqualität für einzelne Standorte errechnen.[1] Die Themen „Vermessung“ und „Modellierung“ können also unter einer Vielzahl von Perspektiven und (Berufs-)Interessen gesehen werden. Ein Schülerprojekt auf diesem Gebiet kann demnach einen erheblichen Beitrag zur Berufsfeldorientierung leisten, indem Anwendungsgebiete mathematischer Methoden aufgezeigt oder gar Berufsperspektiven vorgestellt werden.

Verankerung des Projekts in den Bildungsstandards

Betrachtet man die verschiedenen Stadien des Projektes vor dem Hintergrund der Bildungsstandards, so lassen sich auch innermathematische Schwerpunkte herausarbeiten.

So ist etwa das „Messen“, das in diesem Projekt die Grundlage der Datenerhebung darstellt, als eigene Leitidee in den KMK-Bildungsstandards verankert. Dabei werden neben den herkömmlichen Messverfahren und Berechnungen hier auch besondere Maßeinheiten (wie das „Gon“ als Winkelmaß) thematisiert, die zum Verständnis der verwendeten Werkzeuge bekannt sein müssen. Ferner kann die Auswertung digitaler Daten, z. B. von Luft- oder Satellitenbildern, das klassische „Messen“ um moderne Methoden ergänzen.

---

[1] vgl. z. B. Routensimulation der Würzburger Verkehrsbetriebe zum Straßenbahnneubau (http://www.wvv.de/)
oder Klötzchenmodell des bayerischen Vermessungsamts (http://vermessung.bayern.de/geobasis_lvg/3DGebaeude.html)

Gebäudeteile und -strukturen können aber nur dann zielgerichtet und unter angemessenem Aufwand vermessen werden, wenn der Gesamtkomplex in geeignete Einheiten unterteilt wird. Hier ist es also wichtig, Teilformen als architektonische Grundeinheiten zu erkennen und zu beschreiben; aus ihnen lassen sich auch die Zeichnungen und virtuellen Modelle am einfachsten aufbauen. Insofern werden in diesem Projekt auch zentrale Aspekte der Leitidee „Raum und Form“ aufgegriffen.

Weniger offensichtlich ist, dass neben dem Erheben der (Mess-)Daten vor allem auch der Planung der Datenerhebung sowie der systematischen Dokumentation der Daten eine entscheidende Rolle zukommt. So muss einerseits genau festgehalten werden, welche Punkte des Gebäudes vermessen werden müssen, um eine eindeutige Modellierung zu gewährleisten (Planung). Andererseits müssen die tatsächlichen Messergebnisse übersichtlich dargestellt werden, um sie später bei der Modellierung eindeutig zuordnen zu können (Dokumentation). Die Planung der Datenerhebung ist auch dann von besonderer Relevanz, wenn größere Gebäude von mehreren Standpunkten aus mit modernen Lasermessmethoden anvisiert werden und dabei schon das Einrichten der Messinstrumente (Tachymeter) zeitaufwändig ist. Eine gute Planung der Messstandpunkte kann hier schnell eine Stunde Messaufwand sparen. Die Planung und Dokumentation der Datenerhebung lässt sich der Leitidee „Daten und Zufall“ zuordnen.

Ebenen der Vernetzung

Der Begriff Vernetzung ist – wie etwa Hischer (2010) darlegt – vielfältig. Aus unserer Sicht sind jedoch fünf Aspekte der Vernetzung für das Konzept „Schülerprojekttage“ im Allgemeinen und damit insbesondere für das hier vorgestellte Modellierungsprojekt charakteristisch. Bei der Planung eines Projekts im Rahmen der Schülerprojekttage sollten die Projektbetreuer diese Aspekte mit dem Ziel im Blick haben, diese für die Schüler direkt erfahrbar zu machen. Inwiefern das tatsächlich gelingt, hängt dabei von der konkreten Themenstellung und der methodischen Ausgestaltung des Projekts ab.

Werkzeugebene

Die Bearbeitung einer offenen Projektaufgabe erfordert den Einsatz und das Zusammenwirken verschiedener Werkzeuge. Der Schwerpunkt des Werkzeugeinsatzes kann je nach Projektaufgabe variieren. Während im konkreten Beispiel traditionelle (Maßband, Lineal, …) und digitale Messwerkzeuge (Software, Tachymeter, …) eine wichtige Rolle spielten, kann auch die Verwendung innermathematischer Werkzeuge (z. B. mathematische Sätze, Konstruktions- und Beweismethoden, Algorithmen, …) zielführend sein. Eine fundierte Abwägung des Werkzeugeinsatzes erfordert das Wissen um die Funktionalität, sowie die Vor- und Nachteile jedes einzelnen Werkzeugs – ein Wissen, dessen Erwerb in seiner Gesamtheit eine Vernetzung auf der Werkzeugebene mit sich bringt.

Werkzeuge zum Messen und Vermessen spielen seit Jahrtausenden eine wichtige Rolle, z. B. bei der Landvermessung, der Raumplanung, im Ingenieurwesen und in der Architektur. Neben Maßband und Senkblei gibt es etwa mit dem Winkelprisma und dem Doppelpentagon traditionelle Werkzeuge, die eigens für Vermessungszwecke entwickelt wurden; Ludwig (2004) zeigt auf, wie sie fruchtbar in den Mathematikunterricht eingebunden werden können. In der modernen Vermessung werden allerdings auch digitale Werkzeuge wie GPS-Geräte und Theodolite bzw. Tachymeter verwendet. Riemer (2009) führt vor, dass sich mit Hilfe von einfachen Navigationsgeräten Vermessungsaufgaben lösen lassen. Grundlagen sowohl traditioneller wie auch digitaler Messwerkzeuge sind mathematische Ideen, wie beispielsweise die des Abstands, des Winkels oder der Satz des Pythagoras. Diese Ideen werden durch ihre Verwendung im Rahmen der Vermessung gleichsam zu mathematischen Werkzeugen.

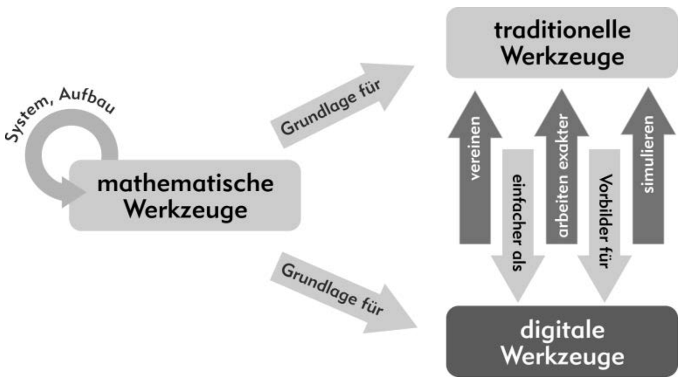


Abb. 7: Mögliche Vernetzung auf der Werkzeugebene

Innermathematische Ebene

Mathematisches Modellieren oder auch das Lösen von Alltagsproblemen gelingt selten auf der Basis von Wissensbausteinen nur einer mathematischen Disziplin. Fast immer ist das Zusammenwirken von Methoden und Inhalten aus verschiedenen mathematischen Bereichen notwendig. Es ist dieser Aspekt, der mathematische Modellierungsaufgaben oder Aufgaben mit echtem Realitätsbezug einerseits zu sehr anspruchsvollen Aufgaben der (Schul)mathematik macht. Andererseits liegt gerade darin der Reiz solcher Problemstellungen, ist doch die Vernetzung mathematischen Wissens auf der inhaltlichen Ebene kaum besser zu initiieren.

Insofern verwundert es nicht, wenn auch beim vorliegenden Projekt verschiedene Inhaltsbereiche ineinander greifen und die entsprechenden Arbeitstechniken nur im sinnvollen Zusammenspiel zu einem Ergebnis führen. Im Rahmen der Vermessungsaufgabe werden Kenntnisse aus den Bereichen der Trigonometrie (etwa beim Berechnen der Neigungswinkel von Dachschrägen oder -giebeln), der elementaren Geometrie (Ausnutzen von Symmetrien) und insbesondere der Raumgeometrie (Erstellung räumlicher Modelle) benötigt, und es müssen Bezüge zwischen diesen mathematischen Teilgebieten hergestellt werden.

Eine besondere Rolle bei Vermessungsprojekten spielt darüber hinaus das Erfassen und Organisieren von Messdaten. Neben Fragen des angemessenen Werkzeugeinsatzes (s. o.), sowie einer strukturierten Dokumentation und einer nachvollziehbaren Aufbereitung der Daten, müssen Messgenauigkeit und Messfehler ebenso diskutiert werden wie die (geometrischen) Auswirkungen der Fehlerfortpflanzung bei der Erstellung des virtuellen Gebäudemodells. Wird beispielsweise bei der Vermessung des Gebäudeumrisses auf die zusätzliche Messung zu Referenzpunkten oder eine Triangulierung verzichtet, lässt sich bei Messfehlern das Umrisspolygon am Ende nicht schließen. An welcher Stelle der Fehler passiert ist (die Fehler passiert sind), kann dann jedoch nicht mehr nachvollzogen werden.

Im Rahmen des Modellierungsprozesses greifen die einzelnen mathematischen Bereiche vor allem dann ineinander, wenn das vorliegende Modell weiter verbessert werden soll. Es werden sowohl Überlegungen relevant, die sich auf eine Verbesserung bei der Datenerhebung selbst beziehen, als auch Argumente, die eine genauere Umsetzung auf der geometrischen Ebene fordern (z. B. Erhebung zusätzlicher Daten, Arbeiten mit Referenzpunkten, Triangulierung, Kongruenzfragen, Überdenken von Symmetrieargumenten).

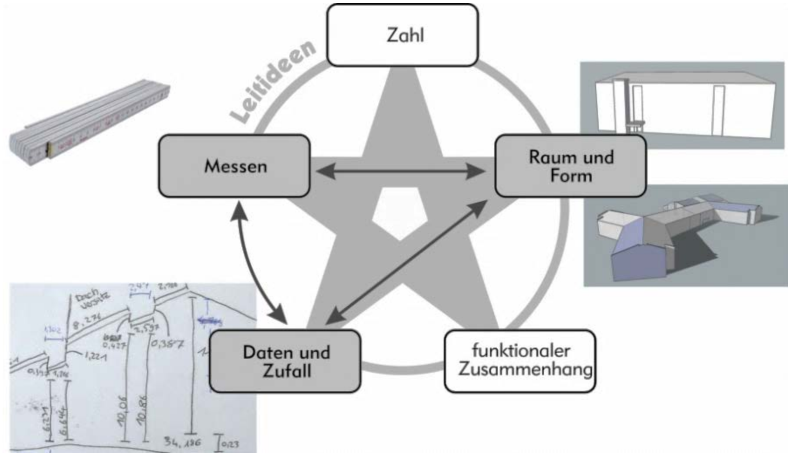


Abb. 8: Vernetzung auf der innermathematischen Ebene

Im Rahmen eines Vermessungs- und Modellierungsprojekts wird also die Vernetzung zentraler Ideen der Schulmathematik, wie sie beispielsweise als „Raum und Form", „Messen" und „Daten und Zufall" in den KMK-Bildungsstandards formuliert sind, angeregt (vgl. Abb. 8).

Allgemein betrachtet finden, im Sinne Brinkmanns (2007), im Rahmen derartiger Projektaufgaben demnach auf der innermathematischen Ebene sowohl fachsystematische Vernetzungen als auch anwendungsbezogene Vernetzungen statt.

Fächerübergreifende Ebene

Wird im Rahmen einer Modellierungs- bzw. einer Projektaufgabe ein Anwendungsbezug hergestellt, so stammt oft bereits die Problemstellung aus einem außermathematischen Bereich. Entsprechend fließen auch bei der Bearbeitung einer solchen Aufgabe Methoden, Inhalte und Ideen aus anderen Fachrichtungen mit ein. Die fächerübergreifende Ausrichtung der Projekte, die vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik im Rahmen der Projekttage angeboten werden, wurde bereits oben angedeutet.

Bei der hier vorgestellten 3D-Modellierung ist es zum Einen die Geographie, die beispielsweise als Fernerkundung Satellitendaten zur Auswertung im Projekt bereitstellt oder GIS und GPS als Werkzeuge benutzt, aber natürlich auch kartographisches Knowhow beisteuern kann. Sollen digitale Werkzeuge, wie ein Laser-Distanzmesser oder ein Tachymeter mit Verstand eingesetzt werden, so ist ein Mindestmaß an Wissen um deren Funktionsweise nötig. Bei einem Tachymeter sollte außerdem klar sein, welche der angezeigten Größen tatsächlich gemessen und welche Größen intern berechnet werden. Hier liefert die Mathematik den nötigen Hintergrund. Ein dritter Bereich, aus dem Ideen in die Bearbeitung der vorgestellten Modellierung einfließen, ist die Informatik. Die Texturierung der Gebäudemodelle mit Fotos der realen Fassaden etwa wirft Fragen aus dem Bereich der Bildverarbeitung auf. (Wie können perspektivische Verzerrungen ausgeglichen werden? Wie können Retuschen vorgenommen werden, wenn die Gebäudefassade durch Grünbewuchs verdeckt ist?) Es ergibt sich jedoch mit steigender Anzahl der Einzelfotos auch schnell eine unerwünscht große Datenmenge. Sie kann reduziert werden, wenn einzelne Teile des Gebäudes zu separaten Objekten gemacht werden (Beispiel: Ein Fenster) und die Gebäudefassade aus einzelnen Instanzen/Kopien dieses Objektes aufgebaut wird. Werden Texturen als Pattern-Texturen und damit „kachelbar“ angelegt (aus mathematischer Sicht würde man von Parkettierung sprechen), kann die Datenmenge sogar noch weiter reduziert werden.

Institutionelle Ebene

Die Vernetzung auf der institutionellen Ebene, Brinkmann (2007) spricht hier von kultureller Vernetzung, ist ein vorrangiges Ziel der Schülerprojekttage. Mit der Betreuung der Schülergruppen durch Dozenten und studentische Hilfskräfte (überwiegend Lehramtsstudierende) werden mehrere Vernetzungsaspekte ins Auge gefasst: So erhalten einerseits die teilnehmenden Schüler, wie oben bereits erläutert, einen Einblick in die Methoden und Inhalte wissenschaftlichen Arbeitens. Andererseits erleben die Projektbetreuer die Schüler bei der Arbeit an mathematischen Problemstellungen. Dabei gewinnen sie einen guten Einblick in den Wissens- und Leistungsstand mathematisch interessierter Schüler. Die Dozenten können so die Erwartungen an potenzielle Mathematik-Studenten auf eine realistische Grundlage stellen, während sich die Lehramtsstudierenden ein Bild von der Leistungsfähigkeit ihrer zukünftigen Schüler machen können. Außerdem ermöglicht die Betreuung der Schülergruppe den studentischen Hilfskräften eine intensive Arbeit mit Schülern, die außerhalb der üblichen Praktika in einem geschützte Rahmen stattfindet. Sie lernen dabei auch, wie Projektarbeit methodisch organisiert wird, welche Vor- und Nachteile diese Arbeitsform mit sich bringt und welche Inhalte sich für projektartiges Arbeiten eignen. Für die Dozenten wiederum bieten die Projekttage die seltene Gelegenheit die Studierenden in der Interaktion mit Schülern zu erleben. Eine direkte pädagogische, didaktische und methodische Rückmeldung wird so ermöglicht.

Die Vernetzung mit den Lehrkräften der angesprochenen Schulen findet auf verschiedenen Wegen statt. So werden die Lehrkräfte zu den obligatorischen Abschlusspräsentationen der Projektgruppen eingeladen, erhalten den Abschlussbericht, der die Ergebnisse aller Projekte zusammenfasst und werden bei geeigneten Lehrerfortbildungen (Fachbetreuertagung, MNU-Tagung) über Inhalte und Konzeption der Schülerprojekttage informiert.

Eine weitere Dimension der Vernetzung auf der institutionellen Ebene spiegelt sich in der Zusammenarbeit mit externen Partnern wider; so waren verschiedene regionale Firmen bereits ebenso Projektpartner wie kulturelle Institutionen und andere Bildungseinrichtungen.

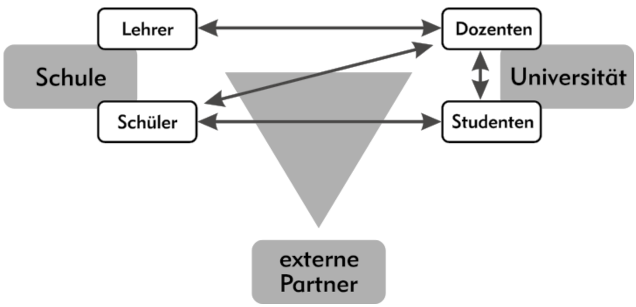


Abb. 9: Vernetzung auf der institutionellen Ebene

Im konkreten Projekt fand eine enge Zusammenarbeit mit der Professur für Vermessungswesen an der FH Würzburg statt. Es konnte ein Expertengespräch organisiert werden, bei dem die Schüler Fragen zum Projekt ebenso stellen durften wie allgemeine Fragen zum Vermessungswesen und zum entsprechenden Studiengang. Als weitere Expertinnen konnten zwei studentische Hilfskräfte gewonnen werden, die den Schülern eine Einführung in die modernen Vermessungsgeräte gaben und sie bei ihren Messungen betreuten.

Nachhaltigkeit

Unterricht im Allgemeinen und damit insbesondere Schülerprojekte, die über den normalen Schulalltag hinausgehen, haben immer auch eine affektive Komponente. Alljährlich zeichnet sich in den Abschlussevaluationen der Schülerprojekte ein erfreuliches Bild: Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer „haben Spaß“ am Knobeln und am Problemlösen in der Projektgruppe, verwandeln „Skepsis“ speziellen Themen oder der Mathematik als Fach gegenüber in „Interesse“ oder verbinden – trotz der „Mühen“ – oft auch „Stolz“ mit der Projektwoche. Hier zeichnen sich also Verbindungen zwischen (meist positiven) Emotionen und mathematischem Arbeiten ab. Brinkmann (2007) spricht bei derartigen Relationen von „Affektvernetzung“.

Eng damit verbunden ist auch eine lernpsychologische Dimension dieser Vernetzungsebene: Lernen erfolgt in einem Lernkontext und ist häufig auch an ihn gebunden. Ist die Lernsituation, wie im vorliegenden Fall, außergewöhnlich, dann werden die erworbenen Kenntnisse u. U. auch besser behalten oder verinnerlicht, was nach Brinkmann (2007) als „lernpsychologische Vernetzung“ angesehen werden kann. Da Problemlösen im Team und die Präsentation der Ergebnisse gefordert werden, trägt Projektarbeit auch zur Ausformung prozessbezogener und sozialer Kompetenzen bei.

Beide Perspektiven auf den Arbeits- und Lernprozess der Schülerinnen und Schüler erlauben die Hoffnung auf eine nachhaltige positive Beeinflussung ihrer Bilder, die sie von Mathematik als Unterrichtsfach und Wissenschaft haben (Beliefs). Spaß und Freude an der Projektarbeit können im sozialen Kontext aber auch zu einer Verbindung der affektiven und der lernpsychologischen Dimension führen, die sich als soziale Vernetzung äußert: Durch die Arbeit an einem gemeinsamen Projekt werden Freundschaften geknüpft, die über die Projektwoche hinaus reichen.

Eine weitere Dimension der Nachhaltigkeit ergibt sich daraus, dass Projektarbeit produktorientiert angelegt ist. Die Ergebnisse der Projektarbeit sollen über den Teilnehmerkreis hinaus wirken und können von Dritten (bspw. in der Hochschulforschung, bei der Entwicklung von Unterrichtsmaterialien oder von externen Partnern) aufgegriffen und weiterverwertet werden. So wurden die virtuellen Gebäudemodelle im vorliegenden Projekt erfolgreich in GoogleEarth eingebunden und stehen in Zukunft für jeden Nutzer weltweit in der Standardinstallation zur Verfügung. Im Falle des „Bienenprojekts“ (Projekttage 2010) wurden die Berechnungen an den externen Partner zurückgeben, der sie in die eigene Forschungsarbeit mit einfließen ließ, und im Projekt „Mathematik und Kunst“ (Projekttage 2009) entstand die Grundlage für eine museumspädagogische Führung durch ein Würzburger Kunstmuseum.

Eine letzte Dimension des Nachhaltigkeitsaspektes leitet sich aus dem Anwendungs- und Alltagsbezug der Projektthemen ab. Die Schülerinnen und Schüler lernen die Mathematik hinter Alltagsphänomenen kennen und erfahren, wie ihre Umwelt mit mathematischen Mitteln erfasst und beschrieben werden kann. Dieses Wissen können sie über die Projekttage hinaus auch in andere Lebensbereiche übertragen, z. B. indem sie ihr Schulhaus oder das Heim ihres Sportvereins virtuell nachbilden, die mathematischen Grundlagen des Baggers auch in anderen Baufahrzeugen suchen oder Architektur und Kunstwerke unter mathematischen Gesichtspunkten analysieren. Die Lebensbereiche „Schule“ und „Freizeit“ werden dann über die Projektarbeit in Verbindung gebracht.

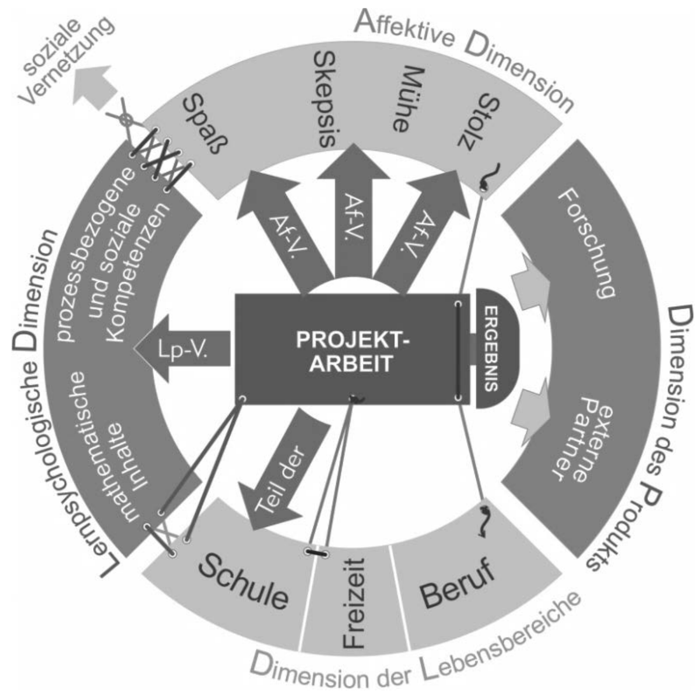


Abb. 10: Vernetzung auf der Ebene der Nachhaltigkeit

Bei der Evaluation der Projekttage hat sich in einigen Fällen aber auch gezeigt, dass die affektive Dimension die Berufswahl beeinflusst: wird mathematisches Arbeiten und Forschen als interessant und spannend erfahren, so wird ein mathematisch-naturwissenschaftliches Studium für viele Schüler zur Berufsoption. Andererseits kann sich auch eine Ernüchterung bezüglich der Inhalte, Methoden und Anforderungen eines Fachs einstellen. In jedem Fall aber wird das Bild der beteiligten Fachbereiche geschärft.

Zusammenfassung

Echte Vernetzung findet nach Hischer (2010) nur dann statt, wenn das entstehende Netz neben Knoten und Kanten vor allem auch Maschen bzw. Schlingen beinhaltet; es müssen vom einen zum anderen Knoten also mindestens zwei verschiedene Wege existieren. Wie gezeigt, lassen sich derartige Konstruktionen innerhalb der hier vorgestellten fünf Ebenen der Vernetzung schnell finden.

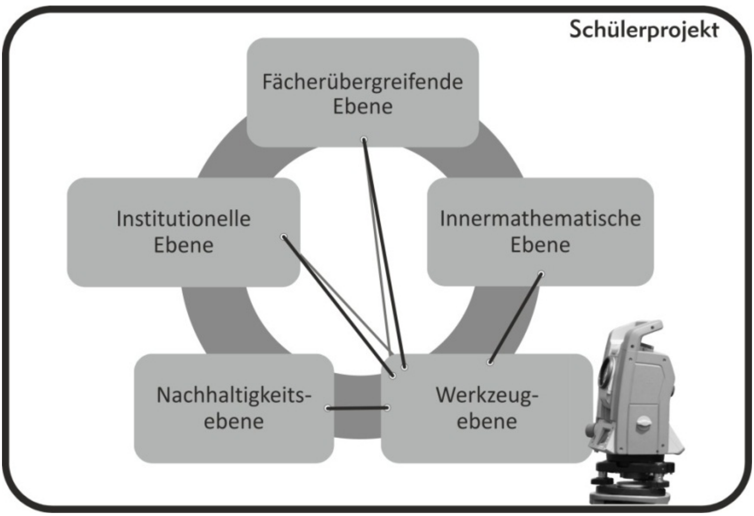


Abb. 11: Vernetzung zwischen den einzelnen Ebenen im Schülerprojekt, illustriert am Beispiel des Messwerkzeuges „Tachymeter".

Darüber hinaus sind auch die Ebenen untereinander durch eine Vielzahl von Relationen verbunden. Exemplarisch lässt sich eine dieser Verknüpfungen am vorgestellten Projekt zeigen (vgl. Abb. 11): da Vermessungsgeräte von der lokalen Fachhochschule entliehen wurden und die Fachhochschule im

Gegenzug für ihre Studiengänge werben konnte, besteht eine Verbindung zwischen der „Werkzeugebene“ und der „Institutionellen Ebene“. Letztere ist ferner über die Inhalte des Projektes – Vermessung, Datenauswertung – auch mit fächerübergreifenden Aspekten (Geographie, Informatik, Ingenieurwesen, …) in Beziehung zu setzten. Daneben spielen im Inneren moderner Vermessungswerkzeuge auch innermathematische Werkzeuge eine wichtige Rolle (Algorithmen, Sätze der elementaren Geometrie, …) und schließlich übernahm das Arbeiten mit dem Werkzeug im Feld bei den Schülerinnen und Schülern auch eine starke affektive Rolle.

Schülerprojekte wie die hier vorgestellten sind demnach Basis, Nährboden und Katalysator von Vernetzungen.

Literatur

Brinkmann, A. (2007). Vernetzungen im Mathematikunterricht. Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen. Hildesheim: Franzbecker.

Hischer, H. (2010). Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim: Franzbecker.

Ludwig, M. (2004). Geometrie beim Wort genommen. Math. Lehren, Nr. 124, S. 4-6

Riemer, W. (2009). Dem »Navi« auf der Spur: mit Google-Maps, Tabellenkalkulation, Analysis und Vektorrechnung. In: MNU 62/8. S. 468-477

Roth, J. (2010). Baggerarmsteuerung − Zusammenhänge rekonstruieren und Problemlösungen erarbeiten. In: Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2010). Der Mathematikunterricht, Heft 5, (56). Seelze-Velber: Friedrich Verlag, S. 35-46

Ruppert, M. (2010). Die Entwicklung eines Gesichtserkennungssystems – eine Projektaufgabe aus der Biometrie. In: Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2010). Der Mathematikunterricht, Heft 5, (56). Seelze-Velber: Friedrich Verlag, S. 21-34

Weigand, H.-G.; Wörler, J. (2010). Kreisverkehr oder Ampelsteuerung – ein Unterrichtsprojekt. In: Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2010). Der Mathematikunterricht, Heft 5, (56). Seelze-Velber: Friedrich Verlag, S. 4-20

Wörler, J. (2010). Konkrete Kunst im Schülerprojekt – geometrische Zusammenhänge erkennen und weiterentwickeln. In: Ludwig, M.; Oldenburg, R. (Hrsg.) (2010). Basiskompetenzen in der Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, S. 125-142

Anwendungsaufgaben im Geometrieunterricht

Lothar Profke

Zusammenfassung. Anwendungsaufgaben können im Mathematikunterricht viele didaktische Funktionen unterstützen. Eine davon ist das Vernetzen mathematischer Bereiche untereinander sowie mit Gebieten anderer Fächer, eine andere das Lehren des Modellierens von und in Sachsituationen mit Hilfe mathematischer Konzepte. Beides ist schon jetzt im „alltäglichen" Geometrieunterricht anhand von Schulbuchaufgaben zum Pflichtstoff möglich, was durch Beispiele aus allen Schulstufen belegt wird.

Einige Vorbemerkungen

Anwendungsaufgaben oder Modellierungen?

Geht es im (angeblich) *modernen* Mathematikunterricht um das Anwenden von Mathematik in außermathematischen Situationen, spricht man häufig vom *Modellieren*. Denn man unterstellt Anwendungs- und *Sachaufgaben*, sie seien bloße Einkleidungen gerade behandelter Mathematik mit mangelnder Authentizität und ohne richtige Aktivitäten zum Modellieren. Dagegen sehen (altmodische) *Anwender* in Vorschlägen zum Modellieren alte Forderungen und Hoffnungen nur neu verpackt, einschließlich methodischer Unzulänglichkeiten.

Tatsächlich unterscheiden sich die mit dem *Anwenden, Mathematisieren* und *Modellieren* verknüpften Lehrziele allenfalls oberflächlich. R. Strehl (1979) und H. Winter (^{3}1994) belegen dies seitens der *Anwender*. Daher gebrauche ich hier die Bezeichnungen *Anwenden*, *Mathematisieren* und *Modellieren* gleich berechtigt und gleich bedeutend.

Didaktische Funktionen von Anwendungsaufgaben

Anwendungsbeispiele können im Mathematikunterricht unterschiedliche didaktische Funktionen erfüllen. H. Winter nennt in (^{3}1994, S. 5; 1990):

- Sachrechnen als Lernstoff: Lehren von *Standardsituationen* zum *bürgerlichen Rechnen* (sowie zu anderen Bereichen)
- Sachrechnen als Lernprinzip: Unterstützen von Lernprozessen (Sachsituationen als Einstiege in Lernprozesse, Veranschaulichen mathematischer Konzepte und Festigen durch Anwendungen)

- Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung: Sachrechnen als Sachkunde, Modellieren und Mathematisieren
- Beitrag des Mathematikunterrichts zur *Aufklärung*: Sachinformationen sowie Möglichkeiten und Grenzen von Mathematik im Alltag

In diesem Aufsatz gebe ich Beispiele zu folgenden didaktischen Funktionen von Anwendungsaufgaben: Beherrschen von Standardsituationen, Modellieren realer Situationen, Unterrichten über die Realität, Schulen der Raumanschauung, Zusammenführen mehrerer Unterrichtsgegenstände, Festigen numerischer Fertigkeiten und Fähigkeiten (vgl. Profke 1985; 1991).

Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht

Der Lehrer braucht in der Routine des Schulalltags Beispiele und sucht nach solchen, die gut zum Stoff passen, welchen er *(über-)morgen, 3. Stunde, in seiner 7R* durchnehmen will oder muss; längstens eine oder zwei Unterrichtsstunden beanspruchen; leicht vorzubereiten sind (hinsichtlich Zeit, Material, Kosten, Informationsbeschaffung). In der Regel greift der Lehrer zum (eingeführten) Schulbuch. Schulbücher enthalten viele (Aufgaben-) Beispiele, welche von mehr oder weniger realistischen Situationen aus Alltag, Technik, Wirtschaft, … handeln:

- Sie passen ziemlich gut zum jeweils anstehenden Stoff (nach Ansicht der Autoren, in der Regel erfahrene Mathematikdidaktiker).
- Viele Beispiele haben einen wirklichkeitsnahen Hintergrund. Doch wird die jeweilige Sachsituation schon vereinfacht vorgestellt, weil sie nur dienende Funktion für das anstehende mathematische Konzept hat.
- *Der Lehrer kann nun „hinter“ einer solchen vereinfachten Sachsituation wirkliches Leben suchen, dann analysieren, welche Aktivitäten zum Modellieren man an dem Beispiel fördern könnte, und schließlich einige daraus für den aktuellen Unterricht auswählen.*
- Zwar liegt „das“ mathematische Modell (der Ansatz) häufig „auf der Hand“ (wenigstens für den Lehrer, seltener für Schüler) wegen der Stellung eines Anwendungsbeispiels im Stoff. Aber das Erkennen bzw. das Überprüfen der Angemessenheit des Modells leistet dann einen Beitrag zum Modellieren.

Modellieren besteht aus einem Bündel von Aktivitäten, natürlich abhängig vom jeweiligen Sachverhalt (vgl. etwa Profke 2000, 2010). Diese werden meistens zu unterschiedlich komplexen *Modellierungskreisläufen* angeordnet.

Im Mathematikunterricht kommt es nur selten zum mehrfachen Durchlaufen eines *Modellierungskreislaufs*. Zudem beschränkt man sich beim letzten Schritt des Kreislaufs *Überprüfen des gewählten Modells* oft nur auf eine Deutung des mathematischen Ergebnisses in der ursprünglichen Sachsituation anstatt auch zu untersuchen, ob dort gestellte Fragen ausreichend beantwortet, leitende Interessen berücksichtigt und gewünschte Ziele erreicht sind sowie (gegebenenfalls) hergestellte Objekte Qualitätsansprüche erfüllen.

Thesen

1. Schüler entdecken nicht von alleine das (Erforderliche zum) Modellieren; dieses muss man ihnen lehren.
2. Einzelne isolierte Unterrichtseinheiten zum Modellieren reichen nicht, um gewünschte Kompetenzen zu vermitteln.
3. Modellieren ist eine komplexe Tätigkeit. Man kann Teilfähigkeiten gesondert lehren und lernen.
4. Anwenden von Mathematik und das Modellieren außermathematischer Sachverhalte lassen sich *ohne großen zusätzlichen Aufwand* in den „alltäglichen“ Mathematikunterricht integrieren, indem man das Motivieren, Einführen, Festigen vorgeschriebener Stoffe, das Bearbeiten von Beispielen und Sachaufgaben (selbst von nur eingekleideten) aus dem eingeführten Schulbuch verknüpft mit *Teilaktivitäten zum Modellieren*.

   Diese Empfehlung ist nicht neu (vgl. Strehl 1979, S. 241, 243).
5. Metawissen zum Modellieren ist nicht erforderlich zum erfolgreichen Anwenden von Mathematik. Erfahrungen zu *Möglichkeiten und Grenzen von Mathematik* genügen.
6. Alles Bemühen um Verbesserung von Mathematikunterricht muss vor allem zum „alltäglichen“ Mathematikunterricht passen und sich an „mittelmäßige“ Lehrer richten.

   (Vgl. Becker u.a. 1979, S. 9) „Mittelmäßig“ ist hier kein Vorwurf, sondern beschreibt weitgehend die Realität.

Beispiele

Die folgenden Beispiele benutzen im Wesentlichen Aufgaben aus gängigen Schulbuchwerken (siehe Literaturverzeichnis), welche nach meiner Einschätzung nicht besonders progressiv sind, sondern auch von *mittelmäßigen* Lehrern benutzt werden wollen.

Nahezu alle Originalaufgaben enthalten mehr oder weniger informative Bilder, die hier nicht abgedruckt sind.

Bei jedem Beispiel kann der Lehrer versuchen, durch (wenige) zusätzliche Fragen und Impulse beim Schüler wenigstens *Teilaktivitäten zum Modellieren* in Gang zu setzen und zu trainieren sowie die Schulbuchaufgabe „wieder" mit „ursprünglicher" Wirklichkeit zu verknüpfen. Oft ergeben sich fast von selbst *Vernetzungen* mathematischer Bereiche untereinander sowie mit Gebieten anderer Fächer. Meine Vorschläge zu den Aufgaben sind keine besonderen, wie man sie halt von einem *mittelmäßigen* Lehrer erwarten kann.

Einiges davon stammt aus meiner eigenen Schulzeit (1947 - 1960), manch anderes lässt sich in heutigen Schulbüchern finden.

Weitere Beispiele in (Profke 1985, 1991, 2000, 2010). Ich erinnere auch an Aufgabensammlungen wie (Schmidt 1984, 1992).

Entfernungen

1. Aufgaben für die 4. und 5. Jahrgangsstufe

Auf Schildern an Autobahnen stehen die Entfernungen (in vollen km) zu einigen großen Städten. Berechne die Unterschiede zwischen den Städten (…).

Berechne anhand des gegebenen Ausschnitts einer Straßenkarte für einen Fernfahrer die Länge des Weges von Frankfurt nach Dortmund und weiter nach Osnabrück. Zurück nach Frankfurt nimmt er den kürzesten Weg.

Dies sind *Standardsituationen*, bei denen man (zunächst) nicht modellieren muss. Man subtrahiert bzw. addiert ein paar natürliche Zahlen und fügt den Ergebnissen (manchmal unbewusst) die Benennung „km" an.

Anhand solcher Aufgaben kann man (bereits in der Grundschule) erörtern:

- Wo liegen die Start- und Zielpunkte der Entfernungsangaben? Denke an deinen Wohnort, an eine Großstadt wie Berlin, an ein ausgedehntes Straßenkreuz.

- Ebenso bei Entfernungsangaben der Deutschen Bahn.
- Wie kann man zu Hause Wegelängen bestimmen und mit welchen Hilfsmitteln? (Straßen- und Landkarten, Tourenplaner im Internet, Entfernungstabellen, Messrad, Zentimetermaßstab und Kartenmaßstab)
- Wie lassen sich unterwegs Wegeentfernungen gewinnen? (Kilometerzähler, Schrittzähler, Hinweistafeln mit Entfernungsangaben, indirekt mittels Wegezeiten)
- Wie genau sind Entfernungsangaben? (23 km, Schulweg von etwa 20 Minuten, Fahr- bzw. Flugzeit 2 h 15 min, 2500 Schritte)

  10 Vaterunser langer Eisenbahntunnel (Rosegger, P. 1900: *Als ich das erste Mal auf dem Dampfwagen saß*)

  $1\,{}^{3}/_{8}$ Stunden nach Bischofsheim (Steinsäule an der B 278)

- Was kann mit *kürzestem Weg* und mit *kürzester Entfernung* gemeint sein? (geringste Länge, kleinste Wegezeit, Luftlinienentfernung, …)

Natürlich wird man im Unterricht nicht alles ansprechen und vielleicht auf noch ganz andere Fragen eingehen. Je nach Wahl und *Ausführlichkeit der Behandlung* kommt es zum Vernetzen des Rechnens mit natürlichen Zahlen, Längen und Zeitdauern untereinander sowie mit Fragen der Genauigkeit, Plänen und Karten (abstrahierendes Darstellen von Wirklichkeit, Maßstäbe), Messvorgängen, Festlegungen im Alltag.

2. Aufgabe ab der 7. Jahrgangsstufe

An einer Straße steht das Gefahrzeichen 110 der StVO mit der Angabe 10 %, an einer anderen Straße das Zeichen 112 mit der Angabe 12 %.

Abb. 1: Zeichen 110 und 112 der StVO mit Zusatzschild

a) *Wovor warnen diese Schilder?*

b) *Wie viel beträgt jeweils der Höhenunterschied auf 1,4 km Straßenlänge?*

c) *Wie groß ist jeweils der Neigungswinkel?*

Mögliche Zusatzimpulse (abhängend von der Jahrgangsstufe):

- Was haben die Angaben auf den Verkehrsschildern mit der Prozentrechnung zu tun?
- Ist bei Längenangaben von Verkehrswegen berücksichtigt, dass Gefäll- und Steigungsabschnitte länger sind als ihre Grundrisse? Schätze solche *Verlängerungen* ab. (Durch Konstruktion von Dreiecken, später durch Berechnung mittels des Satzes von Pythagoras oder *tan*) Welche Empfehlungen gibt es für (Berg-) Wanderer?
- Kläre die Bedeutung der Angabe auf dem Zusatzschild. (Auf den kommenden 1400 m *abwärts mit 10 % Gefälle* oder *mittlere Steigung 12 %* oder *stellenweise 10 % Gefälle*?)

Flächengrößen

3. Aufgabe ab der 7. Jahrgangsstufe

Zum Vermessen des abgebildeten Grundstücks mit den Ecken A, …, E wählt man AC als Standlinie und misst die Entfernungen dieser Standlinie zu den Grundstücksecken sowie die Abstände zu und zwischen den Lotfußpunkten F, G und H.

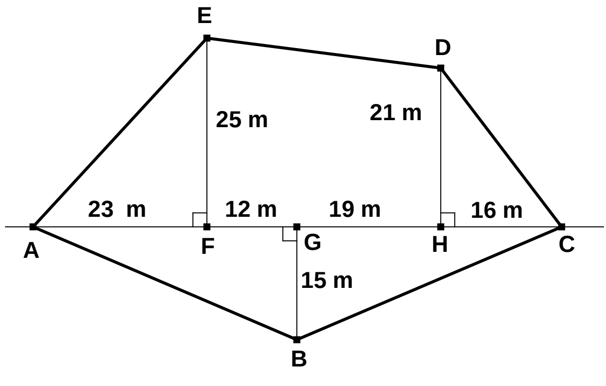


Abb.2: Grundstück vermessen

Bestimme den Flächeninhalt des Grundstücks.

Zwar behandelt diese Aufgabe keine *Standardsituation*, doch scheint das mathematische Modell klar zu sein, schon durch den Platz der Aufgabe im Abschnitt *Umfang und Flächeninhalte von Vielecken*.

Vorschläge für ergänzende Fragen und Aufträge:

- Muss die Standlinie durch zwei Ecken des Grundstücks gehen?
- Was ist, falls das Grundstück nicht ganz in einer Ebene und/oder (teilweise) an einem (steilen) Hang liegt? Kann man auch in solchen Fällen die gemessenen Daten gebrauchen? Welche Abstände sind gemeint?
- Was bedeuten etwa 13,26 a = 1326 m^2 Größe eines Hanggrundstücks? Wie viel Meter Weidezaun erfordert eine trapezförmige Wiese mit den Seitenlängen 112 m, 54 m, 87 m und 66 m an einem steilen Hang?
- Manchmal kennt man von einem Grundstück die Koordinaten seiner Ecken bezüglich eines lokalen kartesischen Koordinatensystems. Wie lässt sich aus diesen Koordinaten der Flächeninhalt des Grundstücks berechnen? (Nummeriert man die Ecken von 1 bis n durch, ergeben sich mit $A_0 = A_n$ und $A_{n+1} = A_1$ ziemlich einfach die Formeln:

$$2 * Flächeninhalt(A_1 \ldots A_n) = \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})\right|$$

$$2 * Flächeninhalt(A_1 \ldots A_n) = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\,(y_{i+1} - y_{i-1})\right|$$

Vgl. Beck & Profke 1984, S. 45 ff.)

- Landeskoordinaten der Grundstücksecken könnten sein:

Punkt	*Rechtswert*	*Hochwert*
A	*3.471.505,30*	*5.604.521,70*
B	*3.471.792,10*	*5.603.655,30*
C	*3.472.338,80*	*5.604.176,80*
D	*3.472.315,20*	*5.604.700,10*
E	*3.472.181,80*	*5.604.807,30*

Im Bereich des Grundstücks darf man das Landeskoordinatensystem als kartesisch annehmen: Orientierung im Uhrzeigersinn; die Hochwerte geben die Abstände vom Äquator an, die Rechtswerte die Abstände von 9° ö.L. + 3500 km. Allerdings sind für jeden Punkt die Koordinaten für seine orthogonale Projektion auf die Normalnull-Fläche angegeben. Mache vom Grundstück eine maßstäbliche Zeichnung. Berechne den Flächeninhalt des Grundstücks aus den Koordinaten der Ecken. Überprüfe die Rechnung mit Hilfe der Zeichnung.

- Die Größen von Grundstücken durch Bearbeitungszeiten messen. (verschiedene Morgen, Joch)
- Grundstücksgrößen aus Plänen und Karten mittels Rastern bestimmen. (möglich bereits im 4. Schuljahr)
- Im Grundbuch sind die Grundstücksgrößen nur auf volle Quadratmeter vermerkt. Weshalb wohl? Eine Kommune stellt den Eigentümern bebauter Grundstücke Übersichten zu, welche Teile ihrer Grundstücke befestigt sind. Die Größen dieser Teile sind aus Luftbildern des Maßstabs 1:500 entnommen und auf Quadratdezimeter genau angegeben. Was ist davon zu halten?

4. Aufgabe ab der 5. Jahrgangsstufe

(Gegeben die Grundrisse von Flachdachbungalows) Das Regenwasser der Dächer kann in Zisternen gesammelt werden. Während eines Gewitters fallen 5 mm Regen. Berechne für jeden Bungalow die (größte) Menge des in die Zisternen abgeleiteten Wassers.

Weitere Vorschläge für ergänzende Fragen und Aufträge:

- Wie kann man Millimeter Niederschlag messen?
- Häufig wird die Niederschlagsmenge in Litern je Quadratmeter angegeben. Wie rechnet man um in Millimeter Niederschlag?
- Eines der Gebäude aus der Aufgabe hat ein Satteldach mit 40° Dachneigung. Wie viel Regenwasser lässt sich mit dieser Dachform (maximal) sammeln?

Vermessungswesen

Die Aufgabe unter 3. passt auch zu diesem Abschnitt.

5. Aufgaben ab der 7. Jahrgangsstufe

Aus einem Hubschrauber in 70 m Höhe über Grund peilt man die Ränder eines breiten Flusses an und misst die Tiefenwinkel 30° und 55°. Wie breit ist der Fluss? Hinweis: Beim Tiefenwinkel ist ein Schenkel horizontal, der andere zeigt nach unten.

Fragen

- Legt der Hinweis *Tiefenwinkel* hinreichend fest?

- Wie muss man *Tiefenwinkel* messen, um die Breite eines Flusses zu bestimmen?
- Welche Geräte gibt es in der Praxis für Winkelmessungen?

Um die Länge c eines geradlinigen Tunnels durch einen Berg zu bestimmen, misst man vom Berggipfel C die Entfernungen a = 2,63 km und b = 4,70 km zu den Tunneleingängen B bzw. A sowie die Größe γ = 54,7° des Winkels zwischen den Visierlinien CA und CB. Wie lang ist der Tunnel?

Fragen und Aufträge

- Welche Geräte gibt es in der Praxis, um Längen und Winkelgrößen zu messen? (Theodoliten, Tachymeter) Welche Winkel kann man mit einem Theodoliten messen?
- Benötigt man die tatsächliche Tunnellänge oder den Grundriss davon? (Vgl. die Ergänzungen zu 1. und zu 2.)
- Wie müsste ein Theodolit eingerichtet werden, um Winkel zu messen, deren Trägerebenen weder horizontal noch vertikal liegen?
- Gestalte die Aufgabe wirklichkeitsnäher: Welche Daten braucht man in der Praxis zum eindeutigen (Re-) Konstruieren und zum Berechnen? Welche Hilfsmittel stehen zur Verfügung und welche Daten lassen sich damit gewinnen? Formuliere geeignete Aufgaben.
- Im Vermessungswesen orientiert man ebene Koordinatensysteme im Uhrzeigersinn: Die erste Achse weist nach Norden, die zweite nach Osten. Wie wirkt sich dies auf trigonometrische Rechnungen aus?
- Schätze den Einfluss ab, den die Krümmung der Erdoberfläche auf die Längen und die Winkelgröße hat.
- Erkunde, wie man bei großen Leichtathletik-Wettbewerben Wurf- und Stoßweiten ermittelt. Vergleiche mit der Aufgabe zur Tunnellänge.
- Welche Winkelmaße kommen in der Praxis vor? (Altgrad, Neugrad, Radiant, Prozent, Strich in der Seefahrt bzw. bei der Artillerie, Stunde) Wie rechnet man von einem Maß zu einem anderen um?

- Definiere im Raum Winkel zwischen zwei Ebenen, zwischen einer Geraden und einer Ebene, zwischen zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Anfang. Rechtfertige jeweils die Einschränkung der Winkelgrößen. (Ein *Uhrzeigersinn* ist im Raum meistens nicht ausgezeichnet.)

Körpernetze

Netze (einfacher) geometrischer Körper (Würfel, Quader, Drehzylinder, gerade Pyramiden, …) betrachtet man bereits in der Grundschule. Damit zusammenhängend oder bereits davor erfolgte die Begriffsbildung aus Gegenständen der Umwelt durch Absehen von allem Materiellen und Idealisieren zu geometrischen Formen (erstes Mathematisieren). Jetzt gilt es zu klären, *was Körpernetze sein sollen* (zweites Mathematisieren).

Körpernetze entstehen beim Abwickeln von Körperoberflächen.

Vorschläge für ergänzende Fragen und Aufträge (ab der 4. Jahrgangsstufe):

- Müssen *Körpernetze* zusammenhängen? Untersuche „Netze“ von Gegenständen bei Ausschneidebögen. Stelle Würfel, Pyramiden, … aus Plättchen her. Betrachte das „Netz“ eines (Dreh-) Kegels (samt Boden). Worauf muss man beim Auffalten und Zusammenkleben achten?

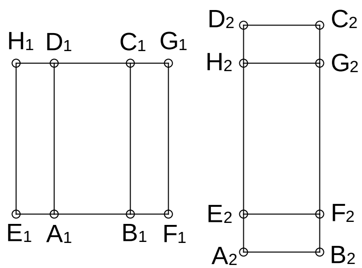


Abb. 3: Netz eines Quaders? Verheften gemäß den Beschriftungen

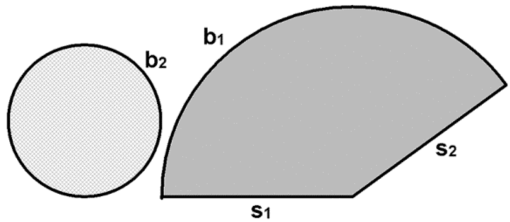


Abb. 4: Netz eines Drehkegelkörpers

- Wie sollen Verheftungslinien (Schnittlinien) aussehen und verlaufen? Untersuche die Verheftungslinien bei Schachteln, Getränketüten, Banderolen von Konservendosen, Papprollen.

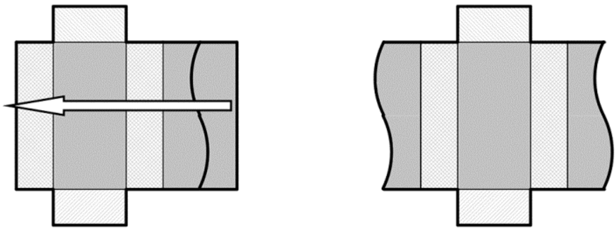


Abb. 5: Schneide Teil ab und füge ihn links an. Schnittlinie gibt neue Verheftungslinien.

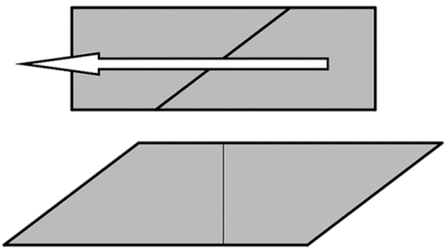


Abb. 6: Banderole einer Konservendose, Netz einer Papprolle

- Wie viele verschiedene Netze hat ein Körper? Wie *wollen* wir dabei *Verschiedenheit* festlegen?
- Können unterschiedliche Körper gleiche Netze besitzen? (Zum Beispiel ein Quader, bei dem wir eine Seitenfläche ersetzen durch eine Pyramide, die einmal nach außen, das andere Mal nach innen weist. Oder wir falten aus dem Netz eines regulären Oktaeders den Körper aus Abb. 7.)

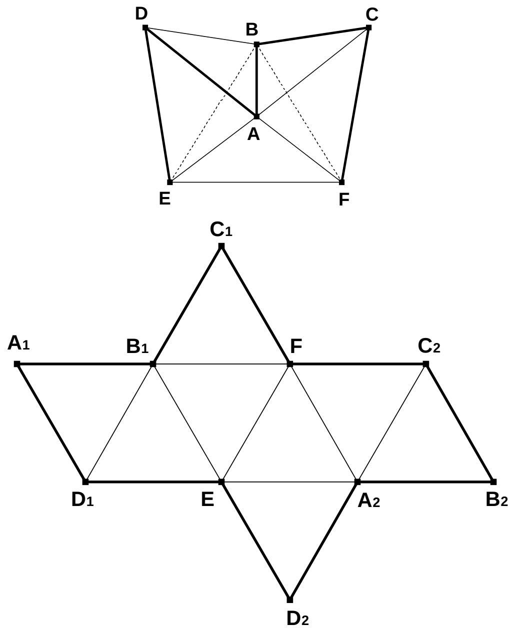


Abb. 7: Dreiecksachtflach und Netz

Daher gehören zu einem Körpernetz noch Vorschriften, wie die freien Kanten und Ecken aufzufalten und zu verheften sind.

- Papier ist ziemlich „geduldig“, oft auch Material aus Kunststoff. Vielleicht haben wir aus einem (angeblichen) Netz den gewünschten Körper nur „gewaltsam“ hergestellt, mit „Runzeln“ und „Spannungen“. Prüfe, ob das Herstellen auch „theoretisch“ gelingen würde.
- Verpackungen sind häufig geschickt gefaltet, zusammen gesteckt und nur an wenigen Stellen geklebt. Untersuche, weshalb dies so ist. (Vgl. Bender/Schreiber 1985, *Funktions- und Zweckanalysen*)

Fahrrad-Computer

6. Aufgabe ab der 4. oder der 7. Jahrgangsstufe

Damit ein Fahrrad-Computer richtig anzeigt, muss man den Umfang des vorderen Laufrades eingeben. Man kann diesen messen oder Tabellen entnehmen, welche dem Fahrrad-Computer beigegeben sind. Führe dies für ein 26“-Rad durch.

Zusätzliche Fragen und Aufträge:

- Wie kann man den Umfang des Laufrades beim Fahrrad bestimmen?
- Überprüfe die Einstellung eines Fahrrad-Computers. (Wege bekannter Längen abfahren; an Straßen zeigen Stationszeichen Entfernungen an.)
- Ein Fahrrad-Computer zeigt die gefahrene Strecke falsch an. Wie muss man die Einstellung ändern?
- Im Betrieb zeigt ein Fahrrad-Computer (≈ 1,5 %) längere Strecken an, als tatsächlich gefahren wurden (trotz sorgfältigen Messens des Umfangs beim vorderen Laufrad). Woran könnte dies liegen? Schätze die Einflüsse von Gründen ab. (Jemand behauptet, unter der Belastung des Fahrers verringert sich der effektive Raddurchmesser. Aber, sagen andere, die Reifenlänge bleibt doch gleich, selbst bei einem „Plattfuß".)
- Wie bestimmt ein Fahrrad-Computer die angezeigten Daten?
- Was bedeuten bei Fahrrad- und Autoreifen die eingeprägten Bezeichnungen? Überprüfe die Daten mit Hilfe geometrischer Formeln. Wie wirken sich abgefahrene Profile bei Autoreifen auf die vom Tachometer angezeigte Geschwindigkeit aus?

Graphen von Funktionen

7. Einführung ab der 9. Jahrgangsstufe

Eine (Achsen-) Streckung parallel zur y-Achse ist wie folgt definiert: Die x-Koordinaten aller Punkte ändern sich nicht, während ihre y-Koordinaten mit einer festem (Streck-) Faktor multipliziert werden.

Vorschläge für ergänzende Fragen und Aufträge:

- Definiere solche Abbildungen auch losgelöst von einem Koordinatensystem. Vergleiche mit zentrischen Streckungen.
- Stelle geometrische Eigenschaften von Achsenstreckungen zusammen. (Geraden-, Parallelen-, Teilverhältnistreue; Transformation von Flächeninhalten)
- Begründe einige geometrische Eigenschaften von Achsenstreckungen. (Man stößt auf eine richtige Umkehrung des zweiten Strahlensatzes.)

- Zeige: Die Graphen aller quadratischen Funktionen sind untereinander ähnlich. Gilt Entsprechendes für weitere Funktionenklassen?
- Verwende zum graphischen Darstellen von Funktionen auch nicht kartesische Koordinatensysteme. Versuche bei einfachen Funktionen vorauszusagen, was sich ergibt.

8. Übungsaufgabe für die 7. Jahrgangsstufe

Betrachte Rechtecke mit demselben Flächeninhalt 24 cm^2. Jeweils zwei ihrer Seiten sollen auf den Koordinatenachsen liegen und die Gegenecke des Ursprungs im 1. Quadranten. Auf welcher Kurve liegen diese „freien“ Ecken.

Weitere Aktivitäten:

- Zeichne in dasselbe Koordinatensystem die Kurven zu den Flächeninhalten 5 cm^2, 10 cm^2, 20 cm^2, …, 60 cm^2. Beschreibe, wie man damit (näherungsweise) Produkte und Quotienten zweier Zahlen bestimmen kann, Quadratwurzeln sowie den Flächeninhalt ausgeschnittener Papierrechtecke. (Vgl. Schweizer 1968, S. 252)
- Ändert man bei der vorigen Aktivität die Beschriftungen geeignet ab, kann man die Flächeninhalte ausgeschnittener Papierdreiecke bestimmen, nach weiteren Änderungen die Flächeninhalte von Vielecken aus Plänen und Karten. (Vgl. Beck & Profke 1984/1997)

Alltagssprache

Sprachschulung ist (wieder) eine Aufgabe (auch) des Mathematikunterrichts. Die *Bildungsstandards im Fach Mathematik* der KMK fordern unter der allgemeinen Kompetenz *Kommunizieren* die *sach- bzw. adressatengerechte Verwendung von Fachsprache*. Hierzu wird man keine eigenen Unterrichtseinheiten vorsehen, sondern im laufenden Unterricht bei passenden Gelegenheiten darauf eingehen.

Aus der Alltagssprache:

Viereckiges Zimmer, rechteckige Schachtel, (kreis-) runder Turm, dreieckiges Verkehrsschild, ebenes Grundstück, Würfelzucker, …

- Wie sehen solche Dinge aus? Beschreibe sie geometrisch!

- Sind solche geometrischen Beschreibungen verständlicher als die im Alltag gebrauchten Sprechweisen? (Beschreibungen sollen verständlich sein, was von der Sprechsituation abhängt. Im Alltag gelingt Klarheit oft ohne (mathematische) Fachsprache.)

Selbst- / Rückbezüglichkeit in Umgangssprache und Fachsprache:

Sich ausschließen, sich treffen, sich trennen, sich lieben, sich entschuldigen, …

Zwei Geraden schneiden sich. Dreiecke sind sich ähnlich. Figuren ergänzen sich. …

- Schneiden die Geraden sich (selber) oder einander? Kann (darf) man sich selbst entschuldigen oder sollte man beim anderen darum bitten?

Methodische Ratschläge

Zur Rolle des eingeführten Schulbuchs im Unterricht

Schulbücher enthalten viele (Aufgaben-) Beispiele, welche sich für „alle möglichen" didaktischen Funktionen eignen sowie zum Lehren von Teilaktivitäten des Modellierens. Anwendungen (Sachaufgaben) aus Schulbüchern stellen in der Regel bereits *vereinfachte Realmodelle* wirklicher Situationen vor. Lehrer und Schüler können versuchen, hierzu passende wirklichkeitsnahe Situationen zu rekonstruieren.

Gelingt dies nicht, analysiere man zusammen mit den Schülern, was an einem Beispiel unrealistisch ist und weshalb dieses dennoch im Schulbuch steht.

Zur Behandlung einer Sachaufgabe gehören eine Textanalyse, eine Sachanalyse, eine Datenanalyse, eine mathematische Analyse, eine Rechnung samt Kontrolle und schließlich die sachliche Auswertung (nach Baireuther 1990, S. 217 - 220, 228 - 231).

Methodisches zum Modellieren

- Man nehme die Sache bei einer Anwendungsaufgabe ernst, informiere darüber, gestalte die Situation persönlich ansprechend, verwende möglichst authentisches Material (damit die Aufgabe nicht nur realistisch aussieht).

- Teilaktivitäten zum Modellieren hebe man im Unterrichtsgespräch hervor, erarbeite sie nach Möglichkeit und bespreche sie schließlich.
- Wichtig sind ausführliche und ordentliche Tafelanschriebe und ebensolche Hefteinträge: Als Musterlösung und zur Unterstützung des Lernens sowie zum Lehren des Dokumentierens als einer Teilqualifikation des Modellierens. (Terme, Gleichungen, Funktionen, Figuren, … beschreiben je nach Situation ganz Verschiedenartiges. Daher gehört zu jedem Modell eine Erklärung: Was steht wofür?)

(Ausführlicher bei Profke 2010, S. 180 f.)

Noch offenes (mathematik-) didaktisches Problem

Auch im Biologie-, Chemie- und Physikunterricht kommen *Modelle* schon in der Sekundarstufe I vor. Lehrpläne für diese Fächer fordern s*achgerechtes Modellieren*, und manche *Übergangsprofile* von der Jahrgangsstufe 9 oder 10 in die gymnasiale Oberstufe enthalten die Kompetenz *heuristische Bedeutung von Modellen, Entwickeln von und Arbeiten mit Modellvorstellungen*. (Vgl. auch Neumann u.a. 2011)

Wie lassen sich solche Forderungen mit entsprechenden Lehrzielen zum Mathematikunterricht vernetzen?

Literatur

Baireuther, P. (1990). *Konkreter Mathematikunterricht*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker

Beck, U.; Profke, L. (1984). *Das Hyperbelverfahren zur graphischen Flächeninhaltsbestimmung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.* In: Vollrath (Hrsg.). *Praktische Geometrie – Darstellen, Messen, Berechnen*. Stuttgart: Klett, Reihe *Didaktische Materialien für die Hauptschule*, S. 40-82. Wiederabdruck in: Blum u.a. (1997). *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe Band 4, S. 1-37

Becker, G. u.a. (1979). *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I,* Bad Heilbrunn: Klinkhardt

Bender, P.; Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien: htp, Schriftenreihe Didaktik der Mathematik **12**

Müller, G.; Wittmann, E. (1977). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg

Neumann, I. u.a. (2011). *Modellieren aus mathematischer und physikalischer Perspektive*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Münster: WTM, S. 603-606

Profke. L. (1985). *Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht – vorwiegend erörtert am Geometrieunterricht der Sekundarstufe I*. In: JMD **6** (1), Paderborn: Schöningh, S. 15-43

Profke. L. (1988). *Zur Behandlung der Ähnlichkeitsgeometrie*. In: Didaktik der Mathematik **16** (1), München: bsv, S. 56-75

Profke. L. (1991). *Praktische Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht*. In: Mathematik in der Schule **29** (12), Berlin: Pädag. Zeitschriftenverl., S. 845-852, 861-867

Profke. L. (2000). *Modellbildung für alle Schüler!*. In: J. Hischer (Hrsg.): *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht.* Hildesheim/Berlin: Franzbecker, S. 34-38

Profke. L. (2010). *Anwendungen im Mathematikunterricht – noch immer nicht befriedigend gelöst.* In: K. Krüger & Ph. Ullmann (Hrsg.). *Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer*. Eichstätt: Polygon, S. 167-182

Schmidt, W. (1984). *Mathematikaufgaben. Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*. Stuttgart: Klett

Schmidt, W. (1992). *Mathematikaufgaben 7 - 10. Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*. Stuttgart: Klett

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg i. Br.: Herder

Volk, D. (1984). *Geometrie aus dem Handwerk. Genauer hinschauen beim Mauern und Häuserbauen*. Göttingen: Gegenwind, MUED-Schriftenreihe Unterrichtsprojekte **4**, S. 34-38

Winter, H. (1981). *Der didaktische Stellenwert des Sachrechnens im Mathematikunterricht der Grund- und Hauptschule*. In: Pädagogische Welt **35** (11), Donauwörth: Auer, S. 660-671

Winter, H. (1990). *Bürger und Mathematik*. In: ZDM **22** (4), Fachinformationszentrum Karlsruhe, S. 131-147

Winter, H. ([3]1994). *Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens. Funktionen des Sachrechnens. Unterrichtsprojekte*. Frankfurt a. M.: Cornelsen Scriptor, Lehrer-Bücherei: Grundschule

Schulbücher

Griesel, H.; Postel, H. (Hrsg.) (1986). *Mathematik heute. Leistungskurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie*. Hannover: Schroedel

Griesel, H.; Postel, H.; vom Hofe, R. (Hrsg.) (2002-2003). *Mathematik heute Hessen 5, 6 und 7 - 10 Bildungsgang Realschule*. Hannover: Schroedel 2001 und Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage

Griesel, H.; Gundlach, A.; Postel, H.; Suhr, F. (Hrsg.) (2006-2011). *Elemente der Mathematik [ab 5. Schuljahr, verschiedene Bundesländer]*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage

Schweizer, W. (Hrsg.) (1968). *Lambacher - Schweizer Mathematisches Unterrichtswerk Ausgabe B. Algebra 2*. Stuttgart: Klett

Wittmann, E. Ch.; Müller, G. N. (Hrsg.) (2004/2005). *Das Zahlenbuch 1 - 4*. Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf: Klett

Vernetzende Lernumgebungen nutzen – Das Beispiel Gleichdicks

Jürgen Roth

Zusammenfassung. Dieser Artikel basiert auf der Überzeugung des Autors, dass die Nutzung von vernetzenden Lernumgebungen zu einem effektiveren Lernprozess bei mathematischen Inhalten beitragen kann. Dazu wird zunächst diskutiert, was eine vernetzende Lernumgebung ausmacht. Darauf aufbauend wird das Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ der Universität Landau umrissen, das aus solchen vernetzenden Lernumgebungen besteht und am Beispiel der Laborstation „Gleichdicks“ konkretisiert.

Vernetzende Lernumgebungen!?

Vor der Nutzung von vernetzenden Lernumgebungen ist zunächst die Frage zu klären, was unter diesem Etikett verstanden werden soll. Dies ist schon deshalb nicht ganz leicht, weil sowohl der Begriff „Lernumgebung“ als auch der Begriff „Vernetzung“ in der neueren didaktischen Literatur zwar häufig verwendet, aber nur sehr selten definiert werden. Versuchen wir uns also diesen Begriffen etwas anzunähern.

Lernumgebung

In der Regel wird die Bezeichnung „Lernumgebung“ verwendet, wenn ein zur Unterstützung von Lernprozessen planvoll gestaltetes Gesamtarrangement gemeint ist. Reinmann/Mandl (2006) geben folgende Definition an:

> *„Eine durch Unterricht hergestellte Lernumgebung besteht aus einem Arrangement von Unterrichtsmethoden, Unterrichtstechniken, Lernmaterialien, Medien. Dieses Arrangement ist durch die besondere Qualität der aktuellen Lernsituation in zeitlicher, räumlicher und sozialer Hinsicht charakterisiert und schließt letztlich auch den jeweiligen kulturellen Kontext mit ein.“*
>
> (Reinmann und Mandl 2006, S. 615f)

Eine erfahrene Lehrkraft wird sich nach dieser sehr allgemein gehaltenen Definition fragen, welcher Unterricht nicht als Lernumgebung zu bezeichnen wäre. Aus der Perspektive der Mathematikdidaktik müssen Lernumgebungen, nicht nur aus diesem Grund, einer Reihe von weiteren Aspekten genügen. Wittmann (1998), für den Design und Erforschung von Lernumgebungen den Kern der Mathematikdidaktik darstellen, fordert etwa:

> *„Lernumgebungen bester Qualität, sogenannte substantielle Lernumgebungen, müssen folgenden Kriterien genügen:*
>
> *1. Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.*
>
> *2. Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/-innen bieten.*
>
> *3. Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepasst werden können.*
>
> *4. Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten.“*
>
> (Wittmann 1998, S. 338f)

Wollring (2009) charakterisiert Lernumgebungen u. a. wie folgt:

> *„Eine Lernumgebung ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine ‚gute Aufgabe‘ nennt. Eine Lernumgebung ist gewissermaßen eine* flexible Aufgabe *oder besser, eine* flexible große Aufgabe. *Sie besteht aus einem* Netzwerk kleinerer Aufgaben, die durch bestimmte Leitgedanken zusammen gebunden werden.“
>
> (Wollring 2009, S. 13, Hervorhebungen im Original)

Es gibt offensichtlich eine ganze Reihe von Perspektiven auf und Anforderungen an Lernumgebungen für den Mathematikunterricht. Entscheidend ist dabei, dass die Lernumgebungen mathematisch fundiert und reichhaltig genug sind, um damit wesentliche Entdeckungen machen und Erkenntnisse gewinnen oder vertiefen zu können. Gute Lernumgebungen regen Schülerinnen und Schüler dazu an, ihr eigenes Handeln zu reflektieren. Dies kann durch das Einfordern von Erklärungen und Beschreibungen des eigenen Tuns (in der Partnerarbeit und im Plenum) und durch geeignete Methoden der Ergebnissicherung unterstützt werden. Daneben müssen Lernumgebungen eine Binnendifferenzierung ermöglichen und logistisch leicht im Unterricht eingesetzt werden können. Nach Wollring (2009) dürfen sie außerdem nicht isoliert stehen, sondern müssen bewusst mit anderen Lernumgebungen vernetzt sein.

Die Zusammenstellung im folgenden Kasten stellt den Versuch dar, wesentliche Aspekte explizit zu benennen, die bei der Entwicklung und Beurteilung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Gerade auch mit Blick auf die Definition von Lernumgebungen bei Reinmann und Mandl (2006, S. 615f) sind die ersten beiden Punkte als einschränkende Spezifizierung zu sehen. Im Folgenden wird ausschließlich von Lernumgebungen gesprochen, wenn sie auf das selbständige Arbeiten von Schülerinnen und Schülern abgestellt sind und entdeckendes Lernen ermöglichen. Darüber hinaus sind aber auch die weiteren Punkte sehr wesentlich für eine gelungene mathematische Lernumgebung.

Lernumgebungen für den Mathematikunterricht

- bilden den Rahmen für das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuell Lernenden,
- sollen entdeckendes Lernen ermöglichen,
- umfassen geeignete Medien, Materialien sowie Aufgabenstellungen, die hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
- sind inhaltlich sinnvoll strukturiert und fachlich korrekt,
- bieten vielfältige Zugänge zu einem mathematischen Phänomen,
- setzen einen methodischen und sozialen Rahmen,
- fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus,
- enthalten Aufforderungen zur Dokumentation der Ergebnisse
- und bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen an.

(vgl. Vollrath und Roth, 2011, S. 150ff)

Vernetzung

In der aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion ist das Thema „Vernetzungen im Mathematikunterricht" in aller Munde. Im Jahr 2007 hat Astrid Brinkmann ihre Dissertation zu diesem Thema veröffentlicht, vor kurzem hat Horst Hischer (2010) ein ganzes Buch darüber verfasst und im Jahr 2009 wurde ein GDM-Arbeitskreis „Vernetzungen im Mathematikunterricht" ins Leben gerufen, der 2011 seinen ersten Tagungsband (Brinkmann 2011) herausgegeben hat. Durch welche Aspekte Vernetzungen im Mathematikunterricht charakterisiert sind, ist zwischen den Autoren durchaus strittig und wird häufig sehr weit gefasst. Der genannte GDM-Arbeitskreis beschäftigt sich nach eigener Darstellung auf seiner Internetseite (Brinkmann 2009) unter anderem mit der Verbindung von mathematischen Fachinhalten, den Beziehungen zwischen Mathematik und ihren Anwendungen, der Nutzung der Tätigkeiten des Modellierens und des Problemlösens als Vehikel zur Vernetzung, sowie mit der Thematisierung von Methoden zur Vernetzung wie etwa Mind Mapping.

Vor diesem Hintergrund wird deutlich, wie wichtig es ist, für die hier propagierten „vernetzenden Lernumgebungen“ anzugeben, was denn nun eigentlich vernetzt wird. Konkret sind hier vier Aspekte wesentlich, die Vernetzung von

- Lehrplaninhalten,
- individuellen Perspektiven,
- Medien und
- Lernorten.

Vernetzen von Lehrplaninhalten

Bei den hier vorgestellten vernetzenden Lernumgebungen steht immer ein Phänomen im Mittelpunkt. Um es zu verstehen ist in der Regel eine ganze Reihe von Inhalten der Mathematiklehrpläne verschiedener Jahrgangsstufen zu (re-) aktivieren und miteinander zu vernetzen. So können Beziehungen zwischen Lehrplanthemen hergestellt beziehungsweise erkannt werden, die Schülerinnen und Schüler sonst möglicherweise als unverbunden nebeneinander stehend wahrnehmen. Diese Art der Vernetzung beruht auf der *Anwendung* von Fähigkeiten und Kenntnissen aus verschiedensten mathematischen Inhaltsbereichen und hat das Verstehen, also das mathematische Durchdringen von Phänomenen zum Ziel.

Daneben bieten solche vernetzenden Lernumgebungen aber auch noch eine weitere Möglichkeit zur Vernetzung von Lehrplaninhalten. Hier geht es, ausgehend von einem Phänomen, um die *Erarbeitung* spezifischer Lehrplaninhalte. Auch hierzu müssen Vorkenntnisse (re-)aktiviert werden. Dahinter steht das genetische Prinzip, dessen Vorgehensweise Wagenschein (1968, S. 35) wie folgt beschreibt:

> *„Wir steigen also beim ‚Einstieg‘ von dem Problem aus hinab ins Elementare, wir suchen das, wonach es zu einer Erklärung verlangt. Eine Auswahl ist damit gegeben:* wir häufen nicht mehr auf Vorrat, *sondern suchen, was wir brauchen, wir verfahren also wie in der ursprünglichen Forschung.* Das Seltsame fordert uns heraus, und wir fordern ihm das Einfache ab.*“*
>
> (Wagenschein 1968, S. 35, Hervorhebungen im Original)

Vernetzt wird hier also durch die Erarbeitung von neuen Inhalten, aus dem Bedürfnis heraus, ein Phänomen zu verstehen. Dadurch werden wieder Beziehungen hergestellt. Der Anwendungsbezug wird nicht nachträglich, zum Erarbeiteten passend, konstruiert, sondern ist Ausgangspunkt der Überlegungen.

Vernetzen von individuellen Perspektiven

Die hier vorgestellten vernetzenden Lernumgebungen sind grundsätzlich für die gemeinsame Arbeit mehrerer Lernender an einem Phänomen ausgelegt. Daran entwickelt sich fast zwangsläufig eine intensive Kommunikation über mathematische Inhalte. Dadurch werden individuelle Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler auf die Mathematik offengelegt und in der gemeinsamen Auseinandersetzung mit dem Phänomen entweder ausgeschärft oder ggf. auch hinterfragt. Das gemeinsame Arbeiten von Lernenden kann insbesondere bei komplexeren Phänomenen auch deshalb sinnvoll sein, weil diese von einzelnen Lernenden allein oft gar nicht erfolgreich bearbeitet werden können. Erst im Zusammenspiel der verschiedenen Fähigkeiten der Beteiligten, ihrer unterschiedlichen Vorerfahrungen, Sicht-, Denk- und Herangehensweisen lassen sich solche Phänomene mathematisch durchdringen und Probleme erfolgreich lösen.

Vernetzen von Medien

Im Zusammenhang mit Vernetzungen im Mathematikunterricht wird ein Aspekt, nämlich das sinnvolle Zusammenwirken verschiedenster Medien, häufig nicht ausreichend beachtet. Dadurch gehen wesentliche Impulse für eine schülerzentrierte, eigenständige Erarbeitung von mathematischen Inhalten verloren, denn „ein geeigneter und individuell verantworteter Einsatz verschiedenster Medien [kann] eine entscheidende Komponente bei Problemlöseprozessen sein“ (Roth 2009, S. 167). Bei den im Folgenden dargestellten vernetzenden Lernumgebungen werden im Wesentlichen auf der Basis von dynamischen Mathematiksystemen erzeugte Simulationen, gegenständliche Modelle, „Papier und Bleistift“, sowie vereinzelt Videos als Medien eingesetzt. Dabei haben sich gegenständliche Modelle insbesondere für den guten Einstieg und den leichteren inhaltlichen Zugang zu Aspekten des betrachteten Phänomens als fruchtbar erwiesen, während die Simulationen ihre Stärken immer dann ausspielen, wenn die Beziehung zwischen dem Phänomen und dem mathematischen Gehalt herausgearbeitet wird. Dazu kann gerade das Ansteuern von Spezial- oder Grenzfällen beitragen, die so mit gegenständlichen Modellen in der Regel gar nicht umgesetzt werden können. Häufig ist es aber auch erst die Simulation, die Unzulänglichkeiten und Fehlinterpretation, die im Zusammenhang mit dem Arbeiten am gegenständlichen Modell aufgetreten sind, aufdecken und beheben hilft. Dazu ist es u. a. hilfreich, dass in Simulationen auch Fokussierungshilfen (z. B. farbliche oder gestalterische Hervorhebungen wesentlicher Aspekte) realisierbar sind, die ein und wieder ausgeblendet werden können.

Vernetzen von Lernorten

Im Zusammenhang mit außerschulischen Lernorten, wie dem Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“, ist darüber hinaus die Vernetzung der verschiedenen Lernorte der Schülerinnen und Schüler (Schule, außerschulischer Lernort und „Kinderzimmer“) ganz wesentlich. Inhalte werden im Unterricht im Klassenverband der Schule erarbeitet. Darauf aufbauend arbeiten die Schülerinnen und Schüler selbsttätig im Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“, anschließend werden die gemachten Erfahrungen im Unterricht wieder aufgegriffen und vertieft. Bei Bedarf können die Schülerinnen und Schüler jederzeit über die begleitenden Internetseiten, die unter der Adresse *www.mathe-labor.de* abrufbar sind, auf die nichtgegenständlichen Materialien der jeweiligen Laborstation zugreifen und so, je nach eigenem Interesse, ihre Arbeit am Thema auch von Zuhause aus noch vertiefen.

Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“

An der Universität Koblenz-Landau wird am Campus Landau von der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik (Sekundarstufen) das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ betrieben. Es ist als außerschulischer Lernort und Schülerlabor konzipiert, das aus vernetzten Lernumgebungen besteht. Diese unterstützen Schülerinnen und Schüler dabei, Phänomene mathematisch zu durchdringen. In das Mathematik-Labor werden ganze Schulklassen der Sekundarstufen eingeladen, die in Kleingruppen ca. drei Stunden lang an jeweils einem Thema arbeiten.

Durch *experimentellen* Umgang mit *gegenständlichen Modellen* und *systematische Variation in Computersimulationen* sollen sowohl das Verständnis technischer Vorgänge, als auch das mathematische Grundlagenwissen verbessert werden. Die Schülerinnen und Schüler erkennen durch eigenständiges (mathematisches) Experimentieren und Modellieren die zugrunde liegenden Prinzipien, setzen diese in Beziehung zu ihrem mathematischen Wissen und vernetzen beides durch das Arbeiten mit Simulationen. Erfahrungen mit den gegenständlichen Modellen und Simulationen werden *mathematisiert*, also aufbereitet, systematisiert und darauf aufbauend mathematische Darstellungen sowie analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht dabei um das Auffinden und Darstellen mathematischer Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen und evtl. die Überprüfung von Hypothesen. Dazu werden in den Laborlernumgebungen schriftliche gestufte Hilfen angeboten, die individuell nach Bedarf und abhängig vom gewählten Zugangsweg abgerufen werden können.

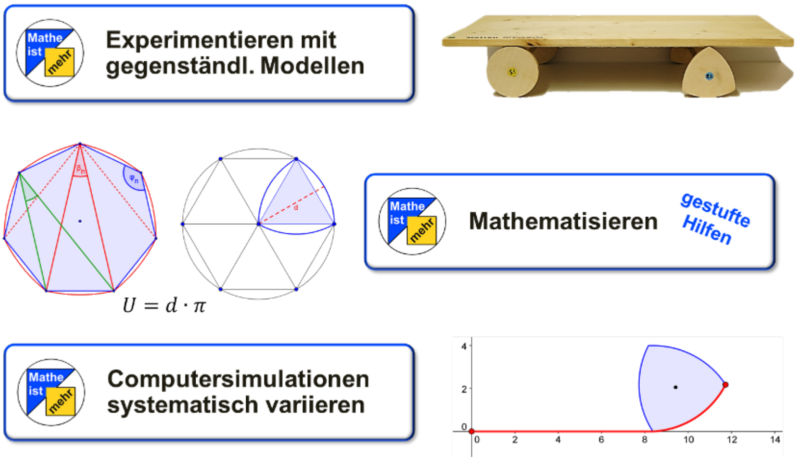


Abb. 1: Drei Komponenten des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Es gibt bereits bestehende und noch in der Entwicklung befindliche Laborstationen zu unterschiedlichen Themen, die sich grob in drei Kategorien einteilen lassen:

- *Innermathematische Themen* (Unendlich, figurierte Zahlen, Kryptologie, Rollkurven, historische Instrumente, Gleichdicks, Strahlensätze, Schaltalgebra, Graphentheorie, bedingte Wahrscheinlichkeit)
- *Themen mit Bezug zu den Naturwissenschaften* (Linsen, Brechung, Lochkamera, Schatten, Spiegel, schiefer Wurf)

- *Themen mit Alltagsbezug* (Einparken, Baggerarmsteuerung, Lotto, Vermessung, Fußball, GPS, Roulette)

Im Folgenden werden anhand der Laborstation „Gleichdicks“ (einem innermathematischen Thema) einige Aspekte von vernetzenden Lernumgebungen im Rahmen des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ konkretisiert.

„Gleichdicks“ – ein Beispiel für eine vernetzende Lernumgebung

Die Station „Gleichdicks“ geht vom Phänomen der Unterlegrollen aus. Diese wurden bereits im Altertum benutzt, um schwere Lasten, etwa Steinquader für den Bau von Pyramiden, zu transportieren. Dazu hat man, wie in Abbildung 2 dargestellt, runde Hölzer unter den Quader gelegt und ihn so rollend bewegt. Wenn der kreisförmige Querschnitt der Hölzer jeweils denselben Durchmesser hat, dann lässt sich der Quader auf diese Weise ohne zu wackeln transportieren.

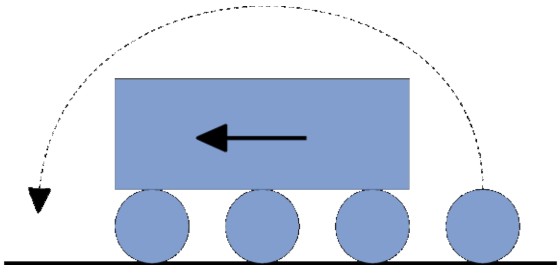


Abb. 2: Unterlegrollen

Aus der innermathematischen Perspektive stellt sich hier die Frage, ob das auch mit anderen Querschnitten der Unterleghölzer funktionieren würde, wie etwa mit denen in Abbildung 3.

Vor dem Weiterlesen lohnt sich eine kurze Reflexion, welche der Figuren wohl als Querschnitte für Unterleghölzer geeignet sind.[1] Diese Frage lässt sich gut mit Hilfe von gegenständlichen Modellen klären (vgl. Abbildung 4). Legt man nämlich, bei ebener Unterlage, ein Brett auf entsprechende Rollen, stützt sich von oben auf das Brett und bewegt es hin und her, so

[1] Es geht hier nur um die innermathematische Perspektive auf diese Frage. Physikalische Aspekte wie Gleichgewichtslagen, Druckverteilungen und Ähnliches werden bei den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt gelassen.

kann man sehr eindrücklich die Erfahrung machen, ob hier etwas „wackelt“, ob also eine Auf- und Abbewegung vorliegt oder das Brett immer denselben Abstand zur Unterlage behält. Dabei wird schnell deutlich, dass es einige sehr unterschiedliche Querschnitte gibt, die sich für Unterlegrollen eignen.

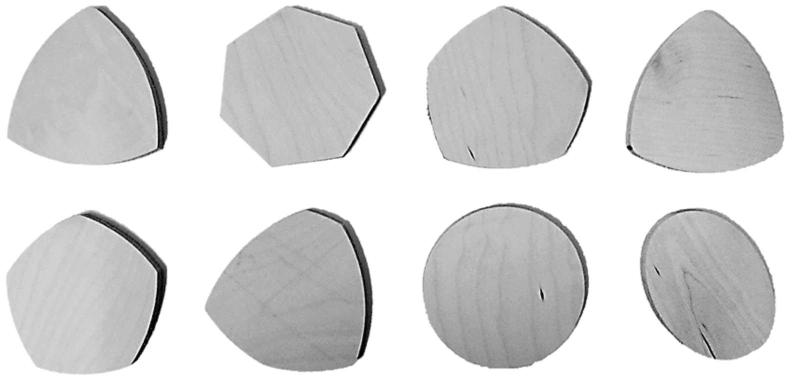


Abb. 3: Lassen sich diese Hölzer als Unterlegrollen verwenden?

Abb. 4: Interessante Unterlegrollen

Allein aus dieser Erfahrung lässt sich auch die wesentliche Bedingung für die gewünschte Funktionalität ableiten: Das aufgelegte Brett muss immer denselben Abstand zum Boden haben. Dazu müssen die Querschnittsfiguren in alle Richtungen dieselbe Dicke aufweisen, also sogenannte Gleichdicks sein.

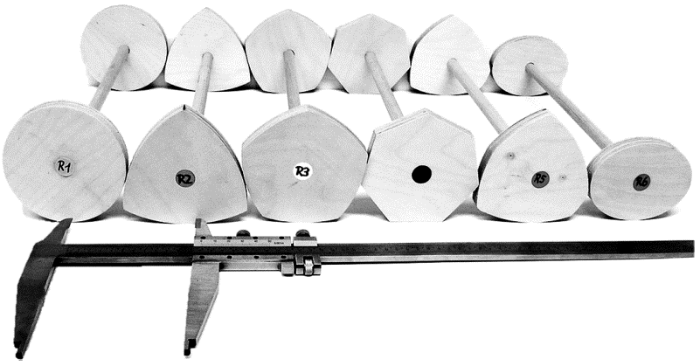


Abb. 5: Dicke messen

Mit Hilfe einer Schieblehre lässt sich dies an den gegenständlichen Modellen (vgl. Abbildung 5) überprüfen. Das Anlegen einer Schieblehre kann man sich auf Schülerniveau als Anlegen von zueinander parallelen Geraden an die Figur vorstellen. Diese Geraden „berühren" die Figur jeweils nur am Rand, d. h. an mindestens einem Randpunkt, aber nie im Inneren der Figur. Man nennt die Geraden auch „Stützgeraden". Abbildung 6 zeigt ein Stützgeradenpaar einer Figur bzgl. einer vorgegebenen Richtung.

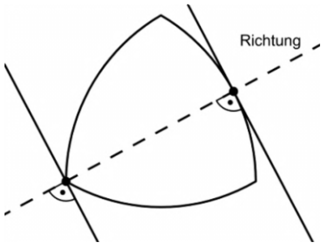


Abb. 6: Figur mit zueinander parallelen Stützgeraden in einer vorgegebenen Richtung.

Interessanterweise erkennen die Schülerinnen und Schüler beim Messen nicht immer, ob es sich um ein „Gleichdick" handelt oder nicht. So wird etwa ein reguläres Siebeneck von vielen Schülern nach dem Messen mit einer Schieblehre für ein Gleichdick gehalten, also eine Figur, die in alle Richtungen dieselbe Dicke besitzt. Es werden nämlich in der Regel nur Richtungen ausgewählt, in denen sich die Schieblehre gut anlegen lässt. Die Diagonallängen werden häufig gar nicht gemessen. Hier zeigt sich zum ersten Mal, dass eine Vernetzung verschiedener Medien von großem Vorteil für das Verständnis sein kann. Eine im Anschluss an das Arbeiten mit den gegenständlichen Modellen eingesetzte Simulation (vgl. Abb. 7), bei der die

Schülerinnen und Schüler ein zueinander paralleles Stützgeradenpaar der Figur „stetig“ um die Figur rotieren lassen können, wird aufgrund der Erfahrungen mit den gegenständlichen Modellen ohne Erläuterung verstanden.

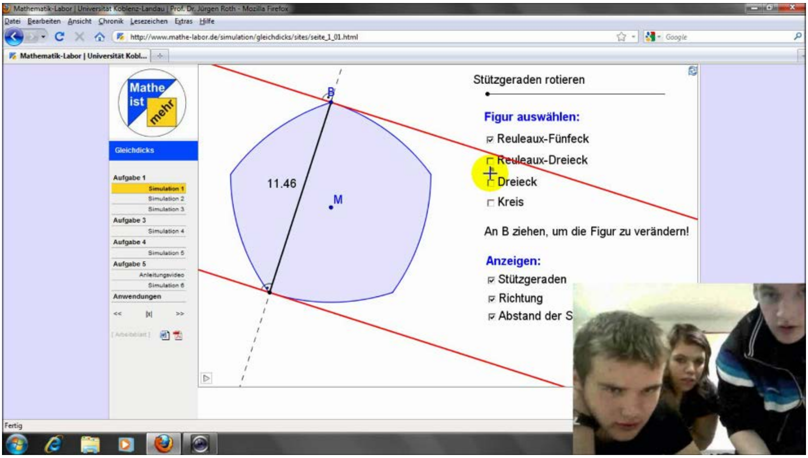


Abb. 7: Simulation mit zueinander parallelen Stützgeraden, die um die Figur gedreht werden können

Das Arbeiten mit gegenständlichen Modellen vor der systematischen Variation von Simulationen scheint also das Verständnis des Phänomens und damit den Zugang zum Arbeiten mit Simulationen zu erleichtern. Andererseits unterstützt die Simulation sehr deutlich die Fokussierung auf das Wesentliche und erleichtert die Erkenntnisgewinnung. Dies zeigt sich etwa daran, dass alle Schülerinnen und Schüler anhand der Simulation korrekt entscheiden, bei welcher Figur es sich um ein Gleichdick handelt und bei welcher nicht. Interessanterweise gelingt dies oft sogar schon, bevor die Schülerinnen und Schüler die Stützgeraden rotieren lassen und deren gegenseitiger Abstand beobachtet werden konnte. Dieser Blick auf das Wesentliche führt auch dazu, dass die Schülerinnen und Schüler zum Teil ganz bewusst Grenzfälle ansteuern und untersuchen.[2] So werden unter anderem auch ge-

[2] Die Analyse der Schülerarbeit an den Simulationen und gegenständlichen Modellen der Laborstation wurde durch die lückenlose Aufzeichnung (vgl. Abb. 7) und Kommentierung mit Hilfe der Software Morae (TechSmith 2011) deutlich erleichtert. Dabei wurde die im Laptop integrierte Webcam nicht nur für die Aufnahme der Schülerinnen und Schüler beim Arbeiten an den Simulationen verwendet. Durch

zielt die Situationen angesteuert, bei denen die Stützgeraden an Diagonalen anliegen. Dieses Vorgehen spielt beim realen Messvorgang mit der Schieblehre dagegen praktisch gar keine Rolle.

Gleichdicks sind offensichtlich als Unterlegrollen geeignet. Lassen sie sich aber auch als Räder an Achsen verwenden? Ein Experiment, bei dem man ein Brett auf die Achsen der Rollen aus Abbildung 5 legt, zeigt, dass das, abgesehen vom Kreis, bei keinem Gleichdick funktioniert (vgl. Abb. 8).

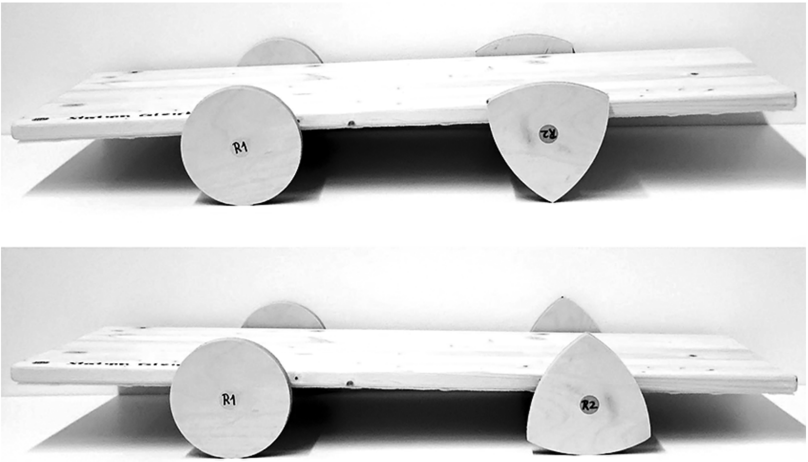


Abb. 8: Lassen sich Gleichdicks als Räder an Achsen verwenden?

Ein einfaches weiteres Experiment (vgl. Abbildung 9) macht deutlich, woran das liegt. Dazu durchbohrt man ein Gleichdick im Mittelpunkt[3] (der Radnabe), steckt einen Stift hindurch und rollt es auf einer Schiene ab. Im Gegensatz zum kreisförmigen Rad, dessen Mittelpunkt (Radnabe) eine Parallele zur Unterlage durchläuft, ergeben sich bei allen anderen Gleichdicks

geschickte Platzierung des Laptops und des Gruppentisches konnte so auch die gesamte Gruppenarbeitsphase ohne sichtbare und dadurch potentiell störende Kamera aufgezeichnet werden.

[3] Im Allgemeinen ist nicht sofort klar, was der Mittelpunkt eines Gleichdicks ist. Für Reuleaux-Polygone, also Gleichdicks, die ein reguläres Vieleck als Stützfigur besitzen, ist aber sofort einsichtig, dass der Mittelpunkt des Umkreises des Stützpolygons auch der Mittelpunkt des Reuleaux-Polygons ist.

wellenförmige Kurven. Der Abstand der Radnabe von der Unterlage variiert hier also. Dies lässt sich verstehen, wenn man sich Speichen in das „Rad“ hineindenkt. Anhand einer Simulation mit rotierender Speiche erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass bei allen Gleichdicks außer dem Kreis diese Speichen unterschiedlich lang sind. Aus diesem Grund muss eine Bewegung auf ebener Grundfläche zu einer Auf- und Abbewegung der Achse führen.

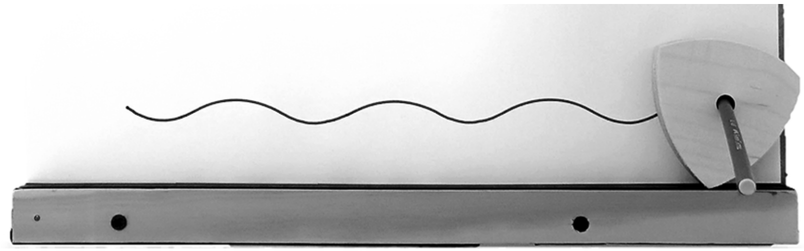


Abb. 9: Experiment zum Erzeugen der Bahnkurve des Mittelpunkts eines Reuleaux-Dreiecks

Das einfachste Gleichdick neben dem Kreis ist ein gleichseitiges Kreisbogendreieck. Bei diesem Gleichdick, dem sogenannten Reuleaux-Dreieck[4] (vgl. Abbildung 10), werden über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (Stützpolygon) Kreisbögen so konstruiert, dass jede Ecke der Mittelpunkt des gegenüberliegenden Kreisbogens ist. Bereits an diesem einfachen Gleichdick wird sehr schnell deutlich, welchen mathematischen Tiefgang man hier erreichen kann.

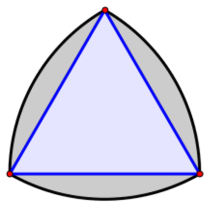


Abb. 10: Reuleaux-Dreieck

[4] Reuleaux-Polygone sind nach dem Professor für Maschinenlehre Franz Reuleaux (1829–1905) benannt.

Exkurs: Bahnkurve des Mittelpunkts des Reuleaux-Dreiecks

Fragt man sich, welche Bahnkurve von der Radachse eines Reuleaux-Dreiecks durchlaufen wird, dann ergeben sich neben leicht fassbaren Aspekten auch solche, die nicht offensichtlich und deutlich anspruchsvoller sind. Dadurch ergeben sich Möglichkeiten zur Differenzierung für sehr leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

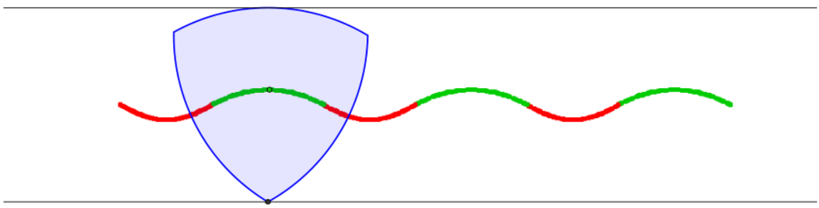


Abb. 10a: Bahnkurve des Mittelpunkts des Reuleaux-Dreiecks beim Abrollen

Bei der genauen Beobachtung des Bewegungsablaufs (vgl. Abbildung 10a) fällt auf, dass es Phasen gibt, in denen das Reuleaux-Dreieck um einen seiner Eckpunkte kippt. Beim Kippen bleibt die „Radnabe“ immer gleich weit vom Drehpunkt entfernt. Der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreiecks bewegt sich in diesen Phasen also jeweils auf einem Kreisbogen (vgl. Abbildung 10b).

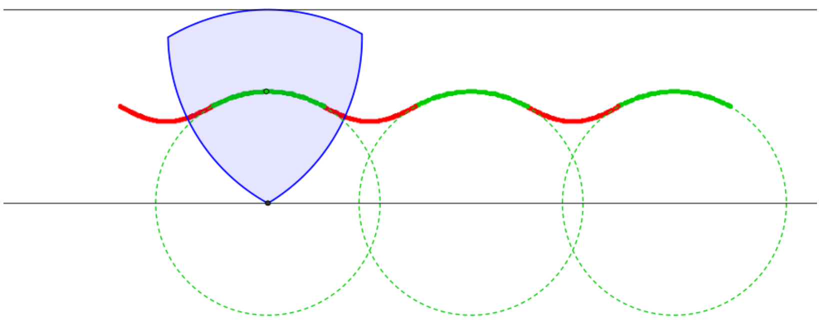


Abb. 10b: Teilkurven: Kreisbogenstücke beim Drehen um jeweils einen Eckpunkt des Reuleaux-Dreiecks

Daneben gibt es Phasen in denen das Reuleaux-Dreieck auf einer seiner Seiten (Kreisbogen) abrollt. Dies lässt sich als Abrollen eines Kreises auf der Unterlage interpretieren (vgl. Abbildung 10c). Wenn man sich die Bewegung fortgesetzt vorstellt, dann erkennt man mit einiger Erfahrung die Situation einer Zykloide. In dieser Phase kann der Mittelpunkt des Reuleaux-Dreiecks also als (Ventilend-)Punkt auf einem Fahrradreifen interpretiert werden, der auf einer Geraden abrollt.

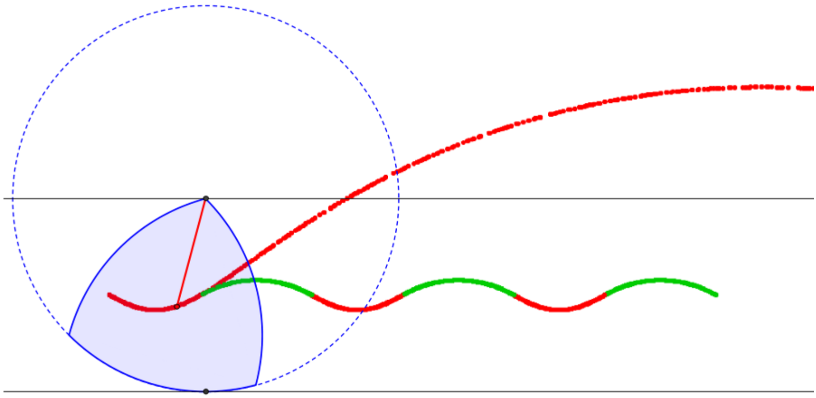


Abb. 10c: Teilkurven: Beim Abrollen auf einer „Seite“ des Reuleaux-Dreiecks entstehen Zykloidenabschnitte

Insgesamt ist die Bahnkurve des Mittelpunkts also eine zusammengesetzte Kurve aus Kreisbogenstücken, die aus der Drehung um jeweils einen Eckpunkt resultieren und Zykloidenabschnitten, die beim Abrollen auf jeweils einer Seite des Reuleaux-Dreiecks entstehen. Die Abbildungen 10b und 10c zeigen Momentaufnahmen dieser Teilbewegungen mit angedeuteten Fortsetzungen der jeweiligen Teilkurven.

Intuitiv erwartet man, dass die Bahnkurve symmetrisch bzgl. der Unterlage (untere Gerade) und der aufliegenden Last (obere Gerade) ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie man sich anhand der Bewegung eines Eckpunkts des Reuleaux-Dreiecks leicht klar machen kann. Wenn der Punkt die untere Gerade berührt, dann kippt das Reuleaux-Dreieck gerade um diesen Eckpunkt. Wenn der Punkt allerdings die obere Gerade berührt, dann rollt das Reuleaux-Dreieck gerade auf dem gegenüberliegenden Kreisbogen ab. Die Bahnkurve eines solchen Eckpunkts (vgl. Abbildung 10d) macht dies noch einmal sehr deutlich. Sie setzt sich in Abbildung 10d von links nach rechts aus einem Zykloidenstück (Abrollen am angrenzenden Kreisbogen), einem Kreisbogenstück (Kippen um die benachbarte Ecke), einer Geraden (Abrollen auf dem gegenüberliegenden Kreisbogenstück), einem Kreisbogenstück (Kippen um die andere benachbarte Ecke) und schließlich wieder einem

Zykloidenstück (Abrollen am anderen angrenzenden Kreisbogen) usw. zusammen.[5]

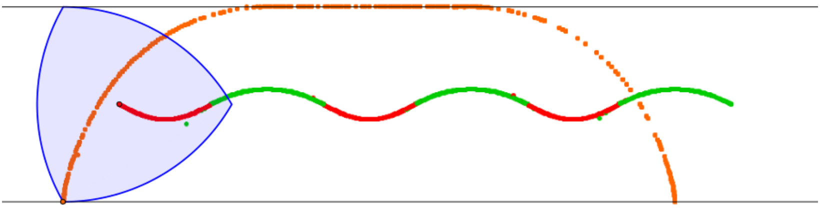


Abb. 10d: Bahnkurve eines Eckpunkts des Reuleaux-Dreiecks

Dieser Exkurs sollte das mathematische Potential andeuten, das das Thema „Gleichdicks" eröffnet. Im Rahmen einer Laborstation des Mathematik-Labors können davon nur Teile bearbeitet werden. Interessierten Schülern bietet sich aber die Gelegenheit, sich in vielfältiger Weise weiter damit auseinanderzusetzen, etwa im Rahmen von Facharbeiten.

Konstruktion von Gleichdicks

Nach den Erfahrungen, die die Schülerinnen und Schüler bis hierhin im Rahmen der Laborstation mit Gleichdicks gesammelt haben, stellt sich die Frage, wie derartige Gleichdicks konstruiert werden können. Das Reuleaux-Dreieck lässt sich mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks als Stützpolygon aus Kreisbögen konstruieren, deren Mittelpunkt in einem Eckpunkt liegt und die jeweils durch die beiden übrigen Eckpunkte verlaufen. Für die Schülerinnen und Schüler ist die Frage interessant, ob auch über allen anderen regelmäßigen n-Ecken reguläre Reuleaux-Polygone erzeugt werden können. Zu diesem Zweck erhalten sie auf Papier vorgegebene reguläre *n*-Ecken als Stützpolygone und sollen auf dieser Basis, jeweils mit Hilfe eines Zirkels, Reuleaux-Polygone konstruieren.

Jeder Schüler der Gruppe wählt sich ein Stützpolygon aus (vgl. Abbildung 11a) und soll zunächst einfach versuchen, eine entsprechende Figur zu konstruieren. Dabei gelangen einige Schülerinnen und Schüler schnell zum Er-

[5] Eine genauere Erörterung der Frage, warum die Mittelpunktskurve nicht symmetrisch bzgl. Unterlage und Unterkante des Rollguts ist, findet sich bei Walser (2011c). Dort wird unter anderem auch auf verschiedene mögliche Bezugssysteme eingegangen.

folg, indem sie jeweils einen Eckpunkt des Stützpolygons als Kreismittelpunkt benutzen und einen Kreisbogen durch die Endpunkte der gegenüberliegenden Strecke zeichnen. Nachdem sie diesen Vorgang *n* Mal bei ihrem *n*-Eck wiederholt haben, schließt sich ihr Reuleaux-Polygon.

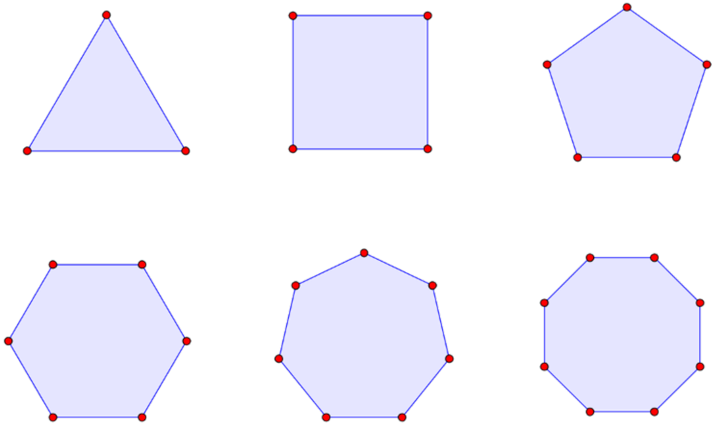


Abb. 11a: Mögliche Stützpolygone für Reuleaux-Polygone?

Andere Schülerinnen und Schüler haben weniger Glück. Bei ihren Stützpolygonen funktioniert diese Strategie offensichtlich nicht. Es wird schnell deutlich, dass das bei *n*-Ecken mit gerader Eckenzahl grundsätzlich nicht funktioniert (vgl. Abbildung 11b).

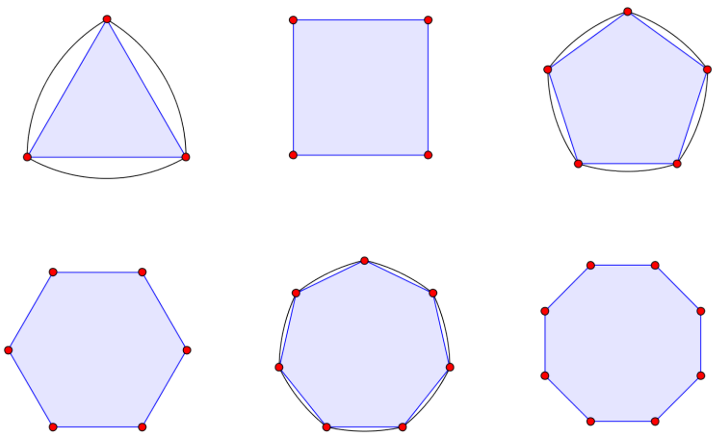


Abb. 11b: Die Schülerinnen und Schüler erkennen, das die Konstruktion nur für Stützpolygone mit ungeradzahliger Eckenanzahl funktioniert

Die Argumente der Schülerinnen und Schüler dafür, warum das so ist, sind zum Teil interessant. Sie erkennen jedoch alle, dass dies daran liegt, dass die zur Konstruktion des Kreisbogens über der entsprechenden Seite des Stützpolygons gegenüberliegende Ecke bei gerader Anzahl der Ecken fehlt. Hier muss natürlich ein Eckpunkt vorhanden sein, der auf der Mittelsenkrechten zur gewählten Seite liegt. Dies ist aber nur bei ungerader Eckenzahl der Fall.

Darüber hinaus gibt es noch eine ganze Reihe von Konstruktionsmöglichkeiten für ganz unterschiedlichen Gleichdicktypen, die in Reichweite der Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I sind. Im Rahmen der Station wird folgender Konstruktionstyp thematisiert und von den Schülerinnen und Schülern umgesetzt, bei dem unregelmäßige Gleichdicks so aus Kreisbogenstücken zusammengesetzt werden, dass keine Ecken entstehen.

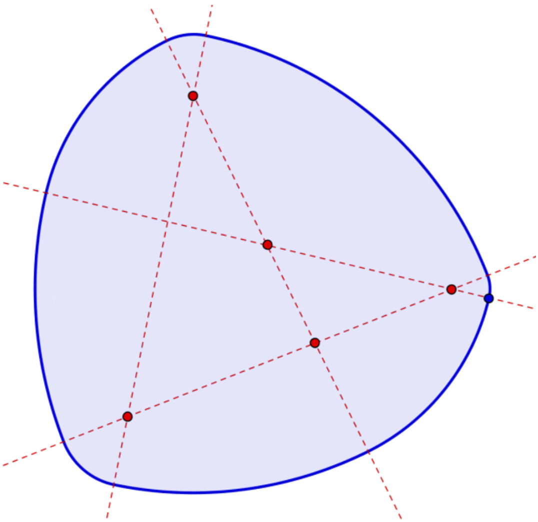


Abb. 12: Unregelmäßiges Gleichdick

Das in Abbildung 12 dargestellte Gleichdick wurde auf der Basis der gestrichelt eingezeichneten Geraden konstruiert. Dazu wählt man zunächst einen geeigneten Punkt auf einer der Geraden (in der Abbildung der Punkt ganz rechts). Von diesem Punkt soll ein Kreisbogen konstruiert werden, der bis zur nächsten Geraden verläuft und beide beteiligten Geraden jeweils senkrecht schneidet. Letzteres ist nötig, damit die jeweils aneinanderstoßenden Kreisbogenstücke am Berührpunkt eine gemeinsame Tangente besitzen, das fertige Gleichdick also keine Ecken hat. Dies lässt sich nur dadurch realisieren, dass der Schnittpunkt der beiden beteiligten Geraden der Mittelpunkt des zu konstruierenden Kreisbogens ist. Der nächste Kreisbogen verläuft dann in analoger Weise bis zur nächsten Geraden. Für die Schülerinnen und Schüler die an der Laborstation arbeiten, wurde dazu ein Anleitungsvideo erstellt, das auf der Seite *www.mathe-labor.de* abgerufen werden kann.

Warum handelt es sich bei der Figur in Abbildung 12 um ein Gleichdick? Um dies zu klären, ist zu überprüfen, ob die Figur in alle Richtungen dieselbe Dicke besitzt. Zunächst ist die Dicke der Figur in Richtung einer der eingezeichneten Geraden nichts anderes als die Länge der von der Figur aus der Geraden ausgeschnittenen Strecke. Diese Strecke ist die Summe der beiden Radien der Kreisbögen zwischen dieser Geraden und der folgenden Geraden. Also ist die von der Figur aus der folgenden Geraden ausgeschnittene Strecke wieder genauso lang wie die vorherige Strecke, da sie sich aus denselben Radien zusammensetzt. Dreht man in Gedanken die erste Gerade um den Schnittpunkt mit der folgenden Geraden, so ist leicht zu sehen, dass die Dicke der Figur zwischen diesen beiden Geraden immer gleich bleibt. Dieselbe Argumentation gilt für die Dicke der Figur zwischen je zwei sich schneidenden Geraden. Die Folge ist, dass die Figur in der dargestellten Konfiguration ein Gleichdick ist und dass die Kreisbögen sich insbesondere schließen.

Es sei hier vor dem Eindruck gewarnt, dass alle Gleichdicks sich aus Kreisbögen zusammensetzen. Walser (2011b) beschreibt etwa Gleichdicks, die sich aus Evolventenbögen zusammensetzen.

Umfang von Gleichdicks

Wie steht es mit den Umfängen von verschiedenen Gleichdicks mit denselben Dicken? Schülerinnen und Schüler können für ausgewählte Familien von Gleichdicks den *Satz von Barbier* entdecken und auf verschiedene Weisen begründen. Er lautet:

Eine ebene Figur konstanter Breite b besitzt den Umfang πb.

Die Schülerinnen und Schüler untersuchen den Umfang von verschiedenen Gleichdicks gleicher Dicke mit Hilfe einer Simulation, mit der man Gleichdicks „abwickeln“ kann (vgl. Abb. 13). Dabei entdecken sie, dass einige Gleichdicks, die dieselbe Dicke wie ein Kreis besitzen, auch denselben Umfang wie der Kreis haben. Da die Dicke des Kreises sein Durchmesser ist, ergibt sich für den Wert des Umfangs $u = d \cdot \pi$. Ob dies etwa für das Reuleaux-Dreieck wirklich zutrifft, lässt sich mit Hilfe von ganz unterschiedlichen Zugängen erarbeiten. Dadurch eröffnen sich vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung.

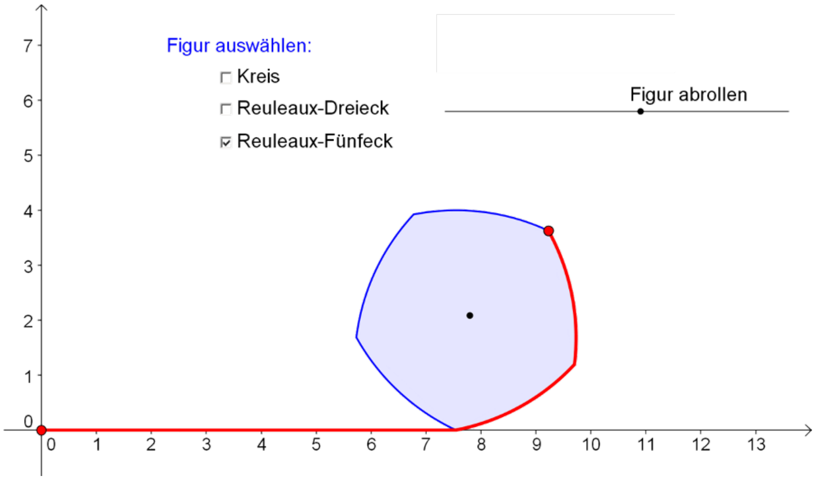


Abb. 13: Simulation zum „Abwickeln“ von Gleichdicks

1. Zugang

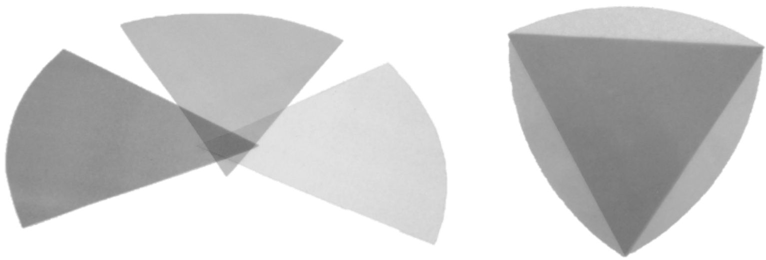


Abb. 14: Reuleaux-Dreieck aus kongruenten Kreissektoren legen

Auf sehr elementarer Ebene kann der Umfang eines Reuleaux-Dreiecks enaktiv erarbeitet werden. Da das Reuleaux-Dreieck auf der Basis eines gleichseitigen Stützdreiecks konstruiert wird, kann es aus drei kongruenten Kreissektoren zum Mittelpunktswinkel 60° gelegt werden (vgl. Abb. 14). Wenn die Schülerinnen und Schüler dies mit Foliensektoren durchgeführt haben, ist es kein Problem mehr, diese Sektoren so umzulegen, dass der Umfang des Reuleaux-Dreiecks direkt erkennbar ist (vgl. Abb. 15).

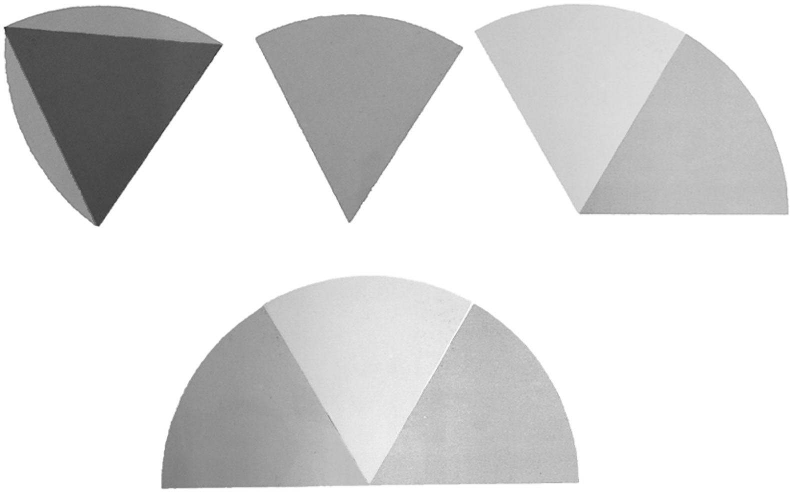


Abb. 15: Umfang des Reuleaux-Dreiecks enaktiv bestimmen.

Da alle Innenwinkelgrößen im gleichseitigen Dreieck 60° betragen, ergänzen sich die Mittelpunktswinkel der drei Kreissektoren zu 180°. Damit ist der Umfang des Reuleaux-Dreiecks halb so groß wie der Umfang des Kreises mit der Dicke *d* des Reuleaux-Dreiecks als Radius. Also ergibt sich für den Umfang des Reuleaux-Dreiecks:

$$u_{RD} = d \cdot \pi$$

2. Zugang

Alternativ können sich die Schülerinnen und Schüler den Umfang des Reuleaux-Dreiecks auch anhand der Zeichnung in Abbildung 16 erarbeiten.

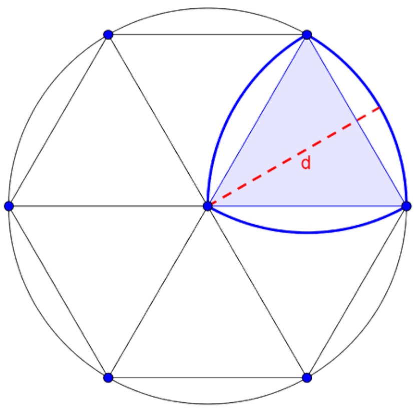


Abb. 16: Herleitung des Umfangs eines Reuleaux-Dreiecks anhand der Konstruktionszeichnung

3. Zugang

Wenn etwas mehr geometrische Vorkenntnisse (insbesondere über den Umfangswinkelsatz) vorhanden sind, können leistungsfähigere Schülerinnen und Schüler den Satz von Barbier sogar für alle Reuleaux-Polygone herleiten. Der Umfang eines Reuleaux-*n*-Ecks setzt sich aus der Länge von *n* kongruenten Kreisbögen zusammen (vgl. Abb. 17). Der Radius dieser Kreisbögen ist gerade die Dicke *d* des Reuleaux-*n*-Ecks. Wenn man den zugehörigen Mittelpunktswinkel β_n bestimmen kann, ergibt sich der Umfang u_n des Reuleaux-*n*-Ecks zu

$$u_n = n \cdot d \cdot \beta_n \qquad (*)$$

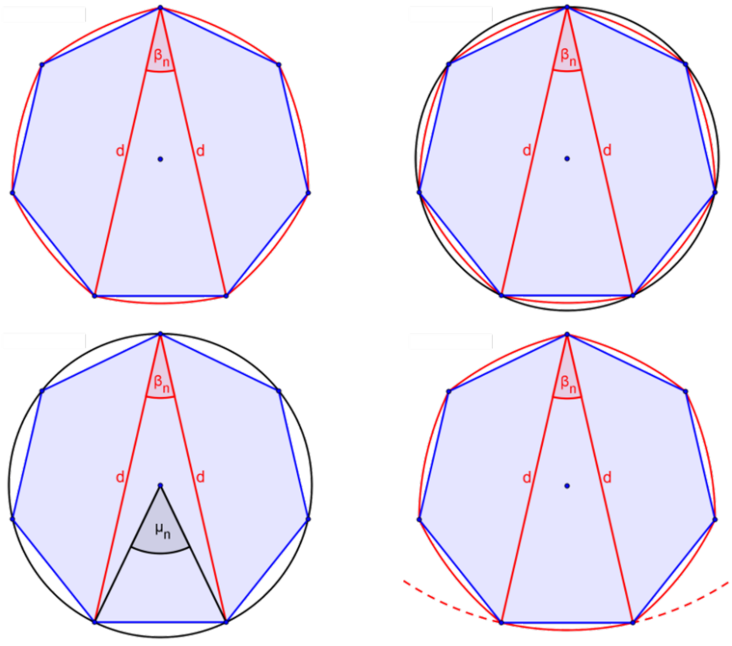


Abb. 17: Umfang von Reuleaux-Polygonen mit Hilfe des Umfangswinkelsatzes erarbeiten

Das Stützpolygon des Reuleaux-*n*-Ecks besitzt einen Umkreis. Folglich ist β_n der Umfangswinkel zum zugehörigen Mittelpunktswinkel μ_n. Dieser beträgt aber 1/*n* des Vollwinkels. Nach dem Umfangswinkelsatz ergibt sich:

$$\beta_n = \frac{\mu_n}{2} = \frac{\frac{2\pi}{n}}{2} = \frac{\pi}{n}$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (*): $u_n = d \cdot \pi$.

Anwendungen

Den Abschluss der Laborstation und gleichzeitig eine weitere Möglichkeit zur Differenzierung bietet auf der begleitenden Internetseite der Unterpunkt „Anwendungen“. Hier wird ein breites Angebot gesetzt, aus dem die Schülerinnen und Schüler nach eigenem Interesse auswählen können. Dadurch werden wesentliche erarbeitete Aspekte noch einmal aufgegriffen und vertieft sowie Grundvorstellungen zu Gleichdicks in verschiedenen Kontexten (re-)aktiviert. Unter diesen Anwendungen befinden sich folgende Aspekte:

Mit Hilfe eines Bohrers mit einem Reuleaux-Dreieck als Querschnitt kann man nahezu „quadratische“ Löcher bohren. Dabei muss der Mittelpunkt des Reuleauxdreiecks allerdings auf einer aus vier Ellipsenbögen zusammengesetzten Kurve bewegt werden (vgl. Schierscher 2005). Um dies nachvollziehen zu können, gibt es bei der Station ein Holzmodell und eine entsprechende Simulation (vgl. Abbildung 18). Das Reuleaux-Dreieck der Dicke *d* ist beim Holzmodell in ein Quadrat der Seitenlänge d eingesperrt, lässt sich darin bewegen und überstreicht dabei einen erheblich größeren Teil der Quadratfläche als ein Kreis mit Durchmesser *d*.

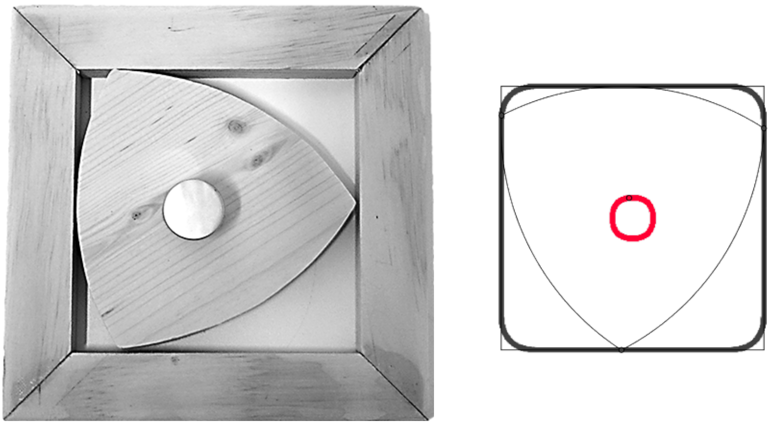


Abb. 18: „Quadratische“ Löcher bohren

Warum sind Kanaldeckel eigentlich häufig rund? Eine einfache Antwort lautet: Damit sie nicht in den offenen Kanalschacht fallen können. Die Folge ist, dass sich alle Gleichdicks dafür eignen, aufgrund des geringen Materialverbrauchs sogar insbesondere Reuleaux-Dreiecke. Dies wird anhand von verschiedenen Kanaldeckelmodellen erfahrbar (vgl. Abbildung 19).

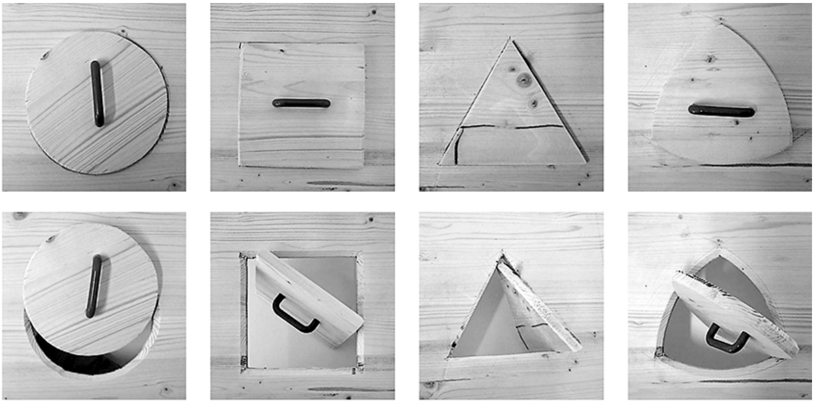


Abb. 19: Kanaldeckel

Auch Münzen und Knöpfe existieren aus naheliegenden Gründen (Automatenschlitze, Knopflöcher) in der Form von Gleichdicks. Bei Sicherheitsverschlüssen, etwa an Hydranten in New York (Lehmann 2004), werden hin und wieder Schrauben eingesetzt, deren Köpfe ein Reuleaux-Dreieck als Querschnitt besitzen. Diese sind mit einer Zange oder einem normalen Schraubenschlüssel nicht zu öffnen, weil diese abrutschen. Als letzte Anwendung wird noch der Wankelmotor erwähnt und mit einer dynamischen Konstruktionszeichnung dargestellt, dessen Rotationskolben ebenfalls einen Querschnitt in Form eines Reuleaux-Dreiecks besitzt. Gleichdicks gibt es übrigens nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raum. Neben der Kugel gibt es noch eine ganze Reihe weiterer räumlicher Gleichdicks (vgl. Weber (2006) sowie Kawohl und Weber (2011)).

Das Phänomen „Gleichdicks" besitzt interessante Bezüge zu Anwendungen, aber auch zur Kreisgeometrie des Mathematikunterrichts, die in einzelnen Aspekten über die Verallgemeinerung zum Gleichdick noch besser durchschaut werden kann. Aus diesem Grund aber auch wegen der guten Möglichkeiten, die sich für eine Verzahnung von gegenständlichen Modellen und Simulationen ergeben, sind Gleichdicks eine ideale phänomenologische Grundlage für eine vernetzende mathematikhaltige Lernumgebung.

Anmerkung

Weitere interessante Aspekte zum Thema Gleichdicks findet man in alphabetischer Reihenfolge unter anderem bei Appell (2011), Kawohl (1998), Kawohl und Weber (2001), Mayer (1995), Rademacher/Toepliz (1933), Schierscher (2005), Stühler (2000), Walser (2011c), Walser (2011b), Walser (2011c), Weber (2006) und Zeitler (1981).

Literatur

Appell, Kristina (2011): Gleichdicks – Figuren konstanter Breite erkunden. In mathematik lehren 165, S. 20-24

Brinkmann, Astrid (2007): Vernetzungen im Mathematikunterricht. Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen. Hildesheim; Berlin: Franzbecker

Brinkmann, Astrid (2009): Vernetzt Vernetzen Lernen. *http://www.math-edu.de/Vernetzungen.html* (abgerufen am 08.12.2011)

Brinkmann, Astrid (2011) (Hrsg.): Mathe vernetzt – Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht, Band 1. Hallbergmoos: Aulis-Verlag

Hischer, Horst (2010): Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim: Franzbecker

Kawohl, Bernd (1998): Was ist eine runde Sache? In: GAMM Mitteilungen, 21, S. 43-56

Kawohl, Bernd; Weber, Christof (2011): Meissner's Mysterious Bodies. In: The Mathematical Intelligencer 33 (3), S. 94–101

Lehmann, Ingmar (2004): π als Helfer der New Yorker Feuerwehr. *http://www.brd.nrw.de/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/pi/pi.pdf* (abgerufen am 08.12.2011)

Mayer, Anton E. (1995): Der Inhalt der Gleichdicke. Abschätzungen für ebene Gleichdicke. In: Mathematische Annalen, 110 (1), S. 97-127

Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): Kurven konstanter Breite. In: Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1933): Von Zahlen und Figuren. Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik. Berlin: Julius Springer, S. 137-150

Reinmann, Gabi; Mandl, Heinz (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: Bernd Weidenmann, Andreas Krapp (Hrsg.): Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. Weinheim: Beltz, S. 613–658.

Roth, Jürgen (2009): Geometrie und der Bagger − Anschauung, Begriffe und Ideen vernetzen. In: Neubrand, Michael (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM-Verlag, S. 167-171

Schierscher, Georg (2005): Das Reuleaux-Dreieck – ein bizarrer Rotor und Kurvengenerator. In: mathematik lehren 130, S. 2, 48-51

Stühler, Andrea (2000): Gleichdicks – Kurven konstanter Dicke. In: mathematik lehren 98, S. 49-51

TechSmith (2011): Morae – Software für Usability Tests und Marktforschung. *http://www.techsmith.de/morae.asp* (abgerufen am 08.12.2011)

Vollrath, Hans-Joachim; Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

Wagenschein, Martin (1968): Verstehen lehren. Genetisch – sokratisch – exemplarisch. Weinheim: Beltz

Walser, Hans (2011a): Gleichdick. *http://www.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/G/Gleichdick/Gleichdick.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Walser, Hans (2011b): Gleichdick mit Kartoffeln. *http://jones.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/G/Gleichdick_Kartoffeln/Gleichdick_Kartoffeln.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Walser, Hans (2011c): Reuleaux-Dreiecke. *http://jones.math.unibas.ch/~walser/Miniaturen/R/Reuleaux/Reuleaux.htm* (abgerufen am 08.12.2011)

Weber, Christof (2006): Gleichdick – Körper konstanter Breite. *http://www.swisseduc.ch/mathematik/material/gleichdick/* (abgerufen am 08.12.2011)

Wittmann, Erich Christian (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. Beiträge zur Lehrerbildung, 16 (3), S. 329–342

Wollring, Bernd (2009): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Peter-Koop, Andrea; Lilitakis, Georg; Spindeler, Brigitte (Hrsg.): Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematik in der Grundschule. Offenburg: Mildenberger Verlag, S. 9-23

Zeitler, Herbert (1981): Über Gleichdicks – Anregungen und Erfahrungen zum Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. In: Didaktik der Mathematik 4, S. 250-275

Früh krümmt sich, was ein Häkchen werden will

Hans Walser

Zusammenfassung. Der Krümmungsbegriff wird von verschiedener Seite her angegangen. Vernetzung mit Schokoladekugeln, didaktischen Grundfragen, Modellierungsproblemen in Unterricht und Praxis, Topologie, Verkehrs-Trassen sowie einem UNESCO Welterbe.

Die Modellierung des schönen Scheins

Funktionsgrafen sind schöne Kurven.
Nicht jede schöne Kurve ist ein Funktionsgraf.

Ein Dauerbrenner in der Mathematikdidaktik ist die Frage, wie Sach- und Anwendungsbezüge aus der so genannten realen Welt in den Schulunterricht eingebracht werden können. Der aktuelle Lösungsansatz läuft über das Stichwort „Modellierung". Im Folgenden zwei gut gemeinte Beispiele.

Beispiel 1 (Abituraufgabe 2009): Eine X ist gut geformt, wenn der Umriss etwa folgende Form hat (Abb. 1):

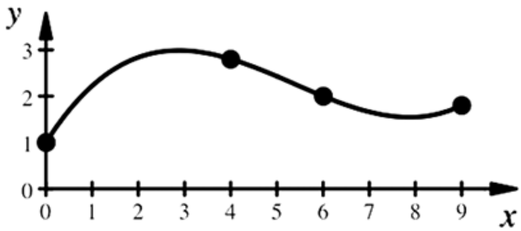


Abb. 1: Die gute Form

Der Prüfling sieht sofort, dass es darum geht, eine Kurve durch vier Punkte einzupassen. Der Sachzusammenhang mit der X ist belanglos. Auch die Aufgabensteller wissen das, und zudem wissen sie, dass die Prüflinge das ebenso wissen. Aber der Lehrplan fordert einen Sachzusammenhang, und so wird halt einer herangezogen. (Bei X soll es sich um eine Computermaus handeln.)

Dieses augenzwinkernde Einvernehmen zwischen Aufgabensteller und Prüfling über die gemeinsame Ignorierung der salbungsvollen Formulierungen des Lehrplans erklärt auch die Schludrigkeit der Aufgabenstellung. Es wird nicht gesagt, aus welcher Perspektive der Umriss zu sehen ist. Am rechten Rand wurde der Abschluss vergessen. Die Prüflinge wissen ja ohnehin, dass da noch eine Integrationsaufgabe im Busch ist, und dann ist der rechte Rand halt die obere Integrationsgrenze und somit senkrecht. Aus demselben Grund hat man sich auch nicht die Mühe genommen, Worte über den linken und den unteren Rand zu verlieren. Bei allen bisherigen Aufgaben waren das ja die Koordinatenachsen, warum sollte es hier anders sein?

„Kurve durch vier Punkte" ist eine Reflexaufgabe: Kubische Parabel.

Wir sind ja alle so sozialisiert worden, dass die kubische Parabel durch vier Punkte eindeutig gegeben sei. Das ist jedoch falsch, wie eine Auswahl von kubischen Parabeln durch die immer gleichen vier Punkte zeigt (Abb. 2).

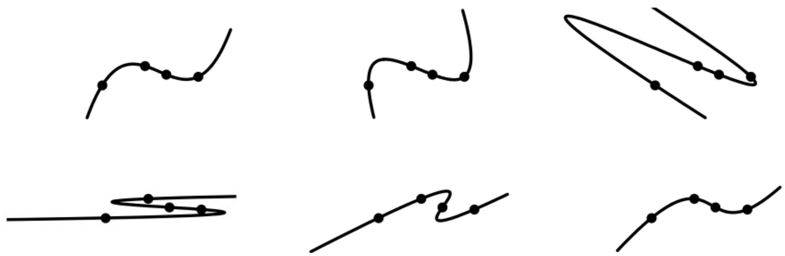


Abb. 2: Kubische Parabeln

Der Hintergrund dieses Fehlers ist eine Verwechslung einer Kurve in einer koordinatenfreien Geometrie und einem Funktionsgraf. Vier Punkte sind als geometrische Objekte durch ihre relative Lage gegeben und unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. In unserem Kontext mit einer Polynomfunktion dritten Grades sind die „Punkte" aber keine geometrischen Objekte, sondern Zahlenpaare mit asymmetrischer Bedeutung: der x-Wert ist der Input, der y-Wert der Output. Eine Veränderung dieser Werte als Folge eines gedrehten Koordinatensystems führt zu veränderten Funktionsgrafen.

Beispiel 2 (Abituraufgabe): Überwurfstraße

Die Koordinatenachsen stellen ein Autobahnkreuz dar. Dazu soll eine Überwurfstraße gebaut werden (Abb. 3).

Effektiv verlangt wird eine kubische Parabel, die mit einem Viertelbogen eines Kreises kombiniert werden soll. Für das Auge sieht das schön aus. Weniger schön ist es für den Autofahrer, der von der geraden Trasse herkommend in die Kurve fahren muss. In der Abbildung 4 ist zusätzlich zur kubischen Parabel deren Krümmung (anders skaliert) angegeben. An der Übergangsstelle ist die Krümmung beinahe maximal, die Übergangsstelle ist also sehr schlecht gewählt.

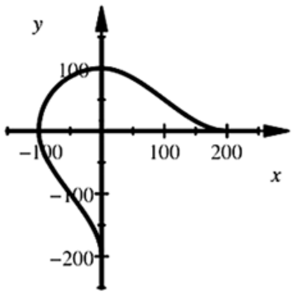


Abb. 3: Überwurfstraße

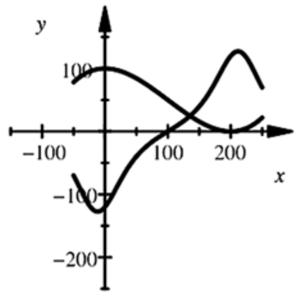


Abb. 4: Kubische Parabel mit Krümmung

Verwechslungen

Bei den geschilderten Aufgaben sind Funktionsgrafen zu geometrischen Zwecken missbraucht worden. Damit werden zwei fundamentale Bereiche der Mathematik vermengt.

(1) In der Geometrie sind die Koordinatenachsen gleichberechtigt und auch gleich skaliert. Eine sachgerechte Kurvendarstellung kann etwa durch eine Parameterdarstellung, zum Beispiel durch Bézier-Kurven, erreicht werden.

(2) Demgegenüber dienen Funktionsgrafen der Visualisierung eines funktionalen Zusammenhangs. Die beiden Achsen haben unterschiedliche Bedeutung (Input, Output), in aller Regel auch unterschiedliche Maßeinheiten und sind unterschiedlich skaliert. Es handelt sich bei Funktionsgrafen um die Modellierung oder Visualisierung eines funktionalen Zusammenhanges.

Dichotomie

Wir sehen an unseren Beispielen zwei Aspekte des Begriffs „Modellierung“. Beschränken wir uns auf den äußeren Schein, sind kubische Parabeln durchaus passable Lösungen. Wollen wir das Problem unter physikalischen Bedingungen behandeln, kommen wir zu einer Modellierung in mathematischer Sprache, welche einigen Aufwand erfordert.

Die im Unterricht fehlenden sachgemäßen Mittel und Methoden verleiten dazu, eine Frage aus der Umwelt didaktisch aufzuarbeiten. Dadurch kann sie aber verfälscht werden und hat nur noch eine oberflächliche und äußerliche Bedeutung. Dies ist bei vielen Beispielen aus der Modewelle „Modellierung“ so, vgl. (Baumann 2007) und (Kroll 2010).

Wenn immer Lehrer versuchen, das „Leben“ ins Schulzimmer zu bringen, wird es aus der Sicht der Schülerinnen und Schüler zur Schulaufgabe. In der Schule kann es daher keine „authentischen“ Aufgaben geben. Die Realsituation bleibt außen vor, vgl. (Leiss 2010), (Prediger 2010). Es ist eine Lebenslüge von uns Lehrern, zu glauben, das Leben könne in die Schule gebracht werden. Eine analoge Lebenslüge treffen wir an, wenn vorgegeben wird, nicht Stoff, sondern Kompetenzen zu unterrichten. Aus der Sicht der Schulkinder werden dann Kompetenzen zu Schulstoff. Die Pädagogik ist ein Teil von jener Kraft, die stets das Gute will und stets das Schlechte schafft.

Während im 19. Jahrhundert, etwa beim bitterbösen Friederich, bitt’re Arzenei als Erziehungsmittel eingesetzt wurde (Hoffmann 1845), wird heute eher versucht, Medizin Kindern mundgerecht zu machen, indem die Medizin in Schokolade eingegossen wird. Da in den Apotheken die Lagerbedingungen nicht immer schokoladegerecht sind, ergibt sich ein Beigeschmack, der von einem verwöhnten (schweizerischen) Kind so kommentiert wird: „DaschmeggtwetütschiSchoggi“. (Das schmeckt wie deutsche Schokolade.)

Der Versuch, Schulaufgaben durch einen Sachbezug attraktiv zu gestalten, schmeckt wie deutsche Schokolade.

Ikonen

„Eingekleidete“ Aufgaben haben mnemotechnische Bedeutung. Ein Problemverhalt wird mit einer Ikone identifiziert. Eine klassische Ikone ist etwa die Kaninchengeschichte für die Fibonacci-Folge. Es ist durchaus angebracht, mit solchen Ikonen zu arbeiten. Dies muss aber im Sinne der pädagogischen Ehrlichkeit den Schülerinnen und Schülern offen gelegt werden. Es handelt sich nicht um „authentische“ Situationen.

Die Mail

Subject: Warum, warum ist die Banane krumm?

Date: January 17, 2010 10:51:06 AM GMT+01:00

Sehr geehrter Herr Walser, mein Name ist A. und ich bin zur Zeit Abiturientin an der B-Schule in C. Ich bin sehr interessiert in Dingen die Mathe betreffen, allerdings nicht unbedingt nur im sturen Unterrichtsstoff, sondern eher in den Zusammenhängen zwischen der Welt und diesem Fach.

Vor einigen Tagen las ich Ihre Arbeit zur Kurvenkrümmung im Internet, dabei bin ich auch auf die Scherzfrage „Warum, warum ist die Banane krumm" gestoßen. Leider kann ich mir trotz Ihrer Hinweise nicht erklären, wie jene Krümmung berechnet wird, daher würde ich Sie bitten, mir anhand einer Beispielaufgabe dies zu erklären.

Ich würde mich freuen eine Antwort von Ihnen in meinem Postfach erwarten zu dürfen!

Mit freundlichen Grüßen, A.

Die nachfolgenden Ausführungen gehen auf diese Anfrage zurück. Insbesondere wird der Krümmungsbegriff hinterfragt.

Privilegien

Diese Mail illustriert, dass Bildung immer ein Privileg der interessierten, aktiven und mutigen Menschen ist. Es gab immer wieder Versuche, dies zu ändern und Bildung sozusagen zu verordnen. So entstand die Schulpflicht. Allerdings kann damit nur Ausbildung vermittelt werden. Bildung selber ist nicht vermittelbar. So wichtig das Recht auf Bildung ist, eine Pflicht auf Bildung besteht nicht. Das Recht auf Dummheit ist auch ein Menschenrecht. – Ich möchte damit aber nicht junge Leute davon abhalten, Lehrerin oder Lehrer zu werden. Der Lehrberuf hat viel Schönes, auch wenn einige Ideale abzuschminken sind.

Krümmung

In Internet kann man lesen: *Die zweite Ableitung ist die Krümmung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x.*

Sehen wir das am Beispiel der Parabel an:

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2$$

Die zweite Ableitung ist konstant. Aber eine Kurve mit konstanter Krümmung ist doch ein Kreis? Was ist hier schief gelaufen? (Natürlich kann man einwenden, es sei oben von der Krümmung einer *Funktion* und nicht von der Krümmung ihres *Funktionsgrafen* die Rede. Im Schulunterricht geht diese subtile Unterscheidung wohl unter. Zudem ist es nicht sinnvoll, einen geometrischen Begriff wie die Krümmung auf Funktionen zu übertragen.)

Bogenlänge als Parameter

Bei einer mit ihrer eigenen Bogenlänge s parametrisierten Kurve $\vec{x}(s)$ ist die Krümmung tatsächlich betragsmäßig gleich der zweiten Ableitung, also $|\vec{x}''(s)|$. Bei unserer Parabel ist dies aber nicht der Fall. Zudem ist die Berechnung der Bogenlänge oft mit einem nicht leicht lösbaren Integral verbunden. Ausnahmen sind etwa die logarithmischen Spiralen. Die Abbildung 5 zeigt als Beispiel dazu die so genannte Goldene Spirale (Müller-Sommer 2012) mit ihrer senkrecht abgetragenen Krümmung.

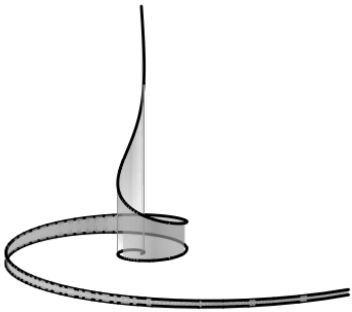


Abb. 5: Die Goldene Spirale und ihre Krümmung

Steigung und Steigungswinkel

Im Unterricht (nur dort?) werden gelegentlich die Begriffe Steigung und Steigungswinkel verwechselt (Abb. 6).

Abb. 6: Steigung und Steigungswinkel

Steigungen können mit Steigungsdreiecken visualisiert werden. Die Abbildung 7 zeigt eine gleichmäßig wachsende Steigung.

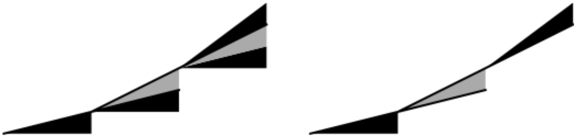


Abb. 7: Gleichmäßig wachsende Steigung

Mit einer gleichmäßig wachsenden Steigung ergibt sich eine quadratische Parabel (Abb. 8).

Abb. 8: Quadratische Parabel

Wir können die Steigung aber auch gleichmäßig beschleunigt wachsen lassen (Abb. 9), so ergibt sich eine kubische Parabel (Abb. 10).

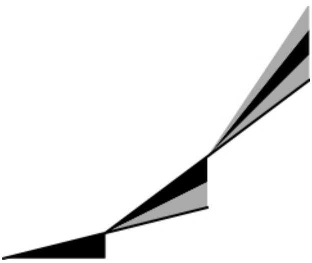


Abb. 9: Gleichmäßig beschleunigtes Wachstum der Steigung

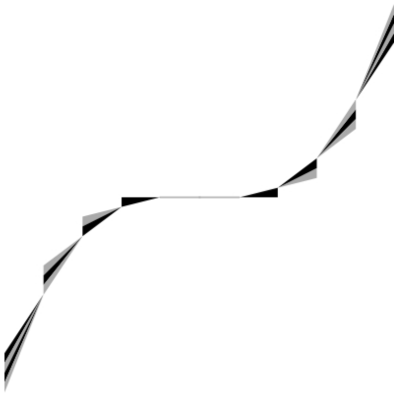


Abb. 10: Kubische Parabel

Winkel können durch Sektoren visualisiert werden. Abb. 11 zeigt einen gleichmäßig wachsenden Winkel. Das gibt insgesamt einen Kreis (Abb. 12).

Abb. 11: Gleichmäßig wachsender Winkel

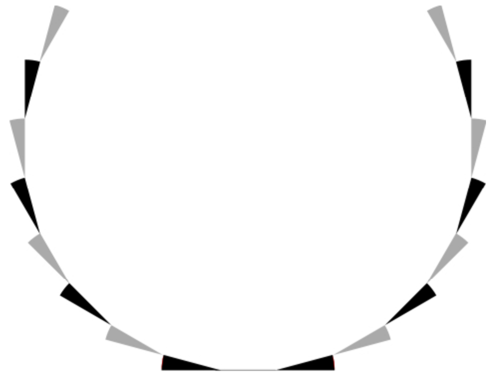


Abb. 12: Kreis

Wir können den Winkel aber auch gleichmäßig beschleunigt wachsen lassen (Abb. 13), dies führt zu einer spiralförmigen Kurve (Abb. 14).

Abb. 13: Gleichmäßig beschleunigt wachsender Winkel

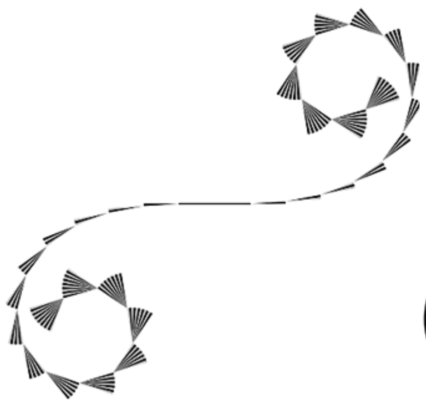


Abb. 14: Spirale

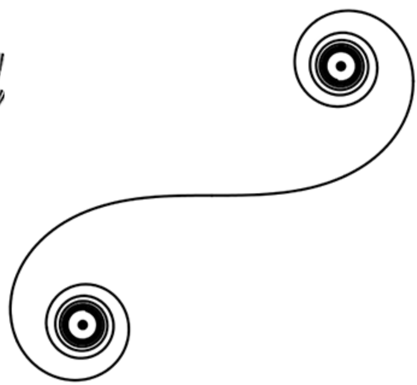


Abb. 15: Klothoide

Bei infinitesimal kleiner Schrittlänge ergibt sich die Klothoide (Abb. 15). Klothoiden haben eine gleichmäßig zunehmende Kurvenkrümmung. Daher werden Klothoidenbögen als Verkehrs-Trassen verwendet.

Gleiskreis

Mein Enkel meinte kürzlich, das helle Gleisstück rechts sei länger als das dunkle links, was man ja am oberen Ende gut feststellen kann (Abb. 16). Er war dann recht verblüfft, als ich die beiden Gleisstücke vertauschte.

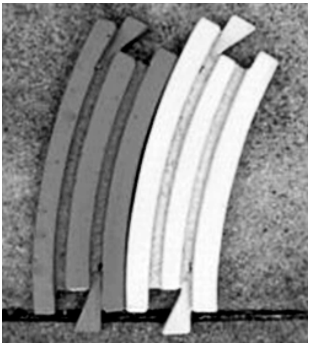


Abb. 16: Welches Gleisstück ist das längere?

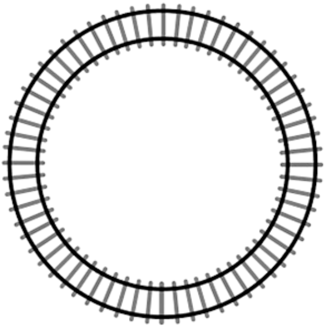


Abb. 17: Gleiskreis

Der Längenunterschied besteht lediglich zwischen der äußeren und der inneren Schiene eines gebogenen Gleisstücks. Bei einem Gleiskreis (Abb. 17) erhalten wir für den Unterschied Δl zwischen der äußeren und der inneren Schienenlänge:

$$\Delta l = \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) 2\pi - \left(r - \frac{\Delta r}{2}\right) 2\pi = 2\pi \Delta r\,.$$

Der Unterschied hängt also nur von der Spurbreite Δr, nicht aber vom Kreisradius r ab. Wenn wir die Spurbreite auf 1 normieren, ergibt sich der Unterschied 2π. Wir definieren dies als *totale Krümmung* des Gleiskreises.

Opas Eisenbahn-Anlage

Die Gleisanlage ist aus zwei Halbkreisen und zwei geraden Stücken zusammengesetzt (Abb. 18). Sie hat ebenfalls die totale Krümmung 2π, da die geraden Stücke nichts zur totalen Krümmung beitragen.

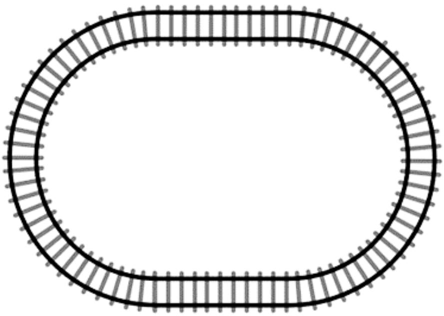


Abb. 18: Opas Eisenbahn-Anlage

Die Abbildung 18 suggeriert, dass die angeblich geraden Teile etwas eingedrückt sind. Durch Nachprüfen oder durch Abdecken der beiden Halbkreise können wir uns aber überzeugen, dass die geraden Teile wirklich gerade sind. Offenbar weigert sich unsere Wahrnehmung, einen abrupten Übergang zwischen geraden und gebogenen Gleisteilen für möglich zu halten.

Auch die Lok weigert sich. Wenn sie mit vollem Tempo vom geraden Gleisstück in die Kurve gefahren wird, kippt sie aus den Schienen. Wir müssen entweder das Tempo stark drosseln, oder bei der Kurve mit einer ganz kleinen Krümmung beginnen, die allmählich erhöht wird, also mit einem Klothoidenbogen arbeiten (Abb. 19). Dank der allmählich wachsenden Krümmung kann auch die für die Krümmung nötige Überhöhung der äußeren Schiene allmählich angegangen werden. Es ist gar nicht leicht, von Auge den Übergang vom geraden zum gekrümmten Stück zu lokalisieren.

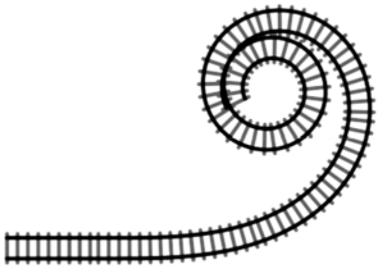


Abb. 19: Allmähliche Krümmungszunahme

Ab einer bestimmten Krümmung können wir einen Klothoidenbogen entweder durch einen Kreisbogen gleicher Krümmung fortsetzen, oder aber durch einen weiteren Klothoidenbogen mit abnehmender Krümmung. Im Beispiel der Abbildung 20 haben wir zwei relativ kurze gerade Teilstücke und vier Klothoidenbögen. Die totale Krümmung ist ebenfalls 2π.

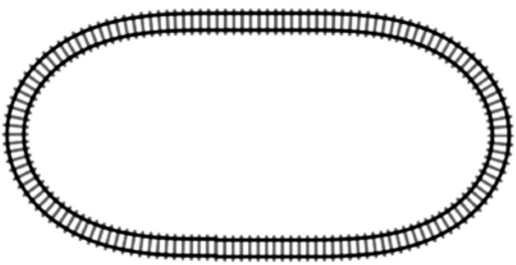


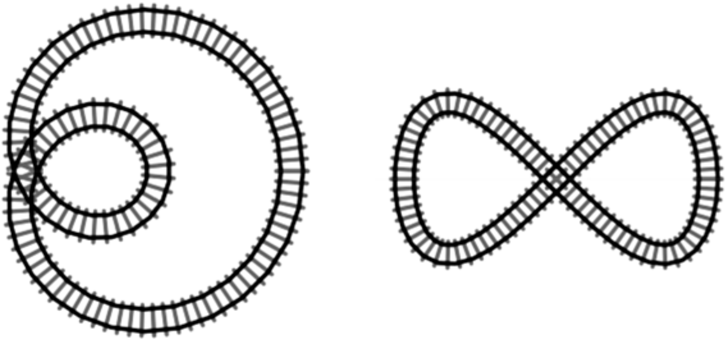
Abb. 20: Gleisanlage

Topologische Invariante

Die totale Krümmung ist bei einer geschlossenen Gleisanlage eine topologische Invariante. Bei einer Kreistopologie haben wir die totale Krümmung 2π. Die Abbildung 21 zeigt ein weiteres Beispiel.

Abb. 21: Ellipse

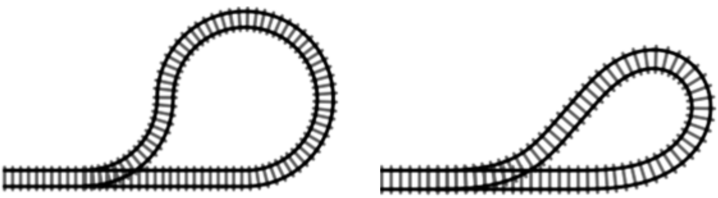
Bei einer Schlinge (Abb. 22a) erhalten wir die totale Krümmung 4π, wir machen zwei Runden. Eine Achterbahn (Abb. 22b) hat die totale Krümmung null, da sich positiv und negativ gekrümmte Teile neutralisieren.



a) b)

Abb. 22: Schlinge und Achterbahn

In unseren bisherigen Beispielen waren die totalen Krümmungen immer Vielfache von 2π. Bei einer Wendeschleife (Abb. 23) ist die totale Krümmung π. Die Wendeschleife ist eine Art Möbiusband, die beiden Schienen sind nicht trennbar. Das Beispiel der Abbildung 23a ist aus geraden Stücken und Kreisbögen zusammengesetzt und hat mehrere Krümmungssprünge, das Beispiel der Abbildung 23b aus geraden Stücken und Klothoidenbögen.



a) b)

Abb. 23: Wendeschleifen

Lokale Krümmung

Die Abbildung 24 zeigt ein nicht geschlossenes Gleisstück. In diesem Beispiel gelten folgende Daten:

Trassenlänge = 7.0

Spurweite = 1

Schienenlänge rechts = 7.617

Schienenlänge links = 6.383

Totale Krümmung = 1.234 (entspricht 70.69°)

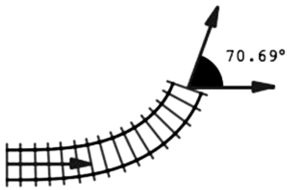


Abb. 24: Gleisstück

Die totale Krümmung entspricht der totalen Richtungsänderung. Durch eine Limesbildung erhalten wir die lokale Krümmung:

$$\text{Krümmung} = \lim_{\text{Trassenlänge} \to 0} \frac{\text{Totale Krümmung}}{\text{Trassenlänge}}$$

In den Abbildungen 25 bis 27 ist jeweils zum entsprechenden Gleisbild rechtwinklig dazu die Krümmung eingezeichnet. Wir erkennen die Krümmungssprünge sofort.

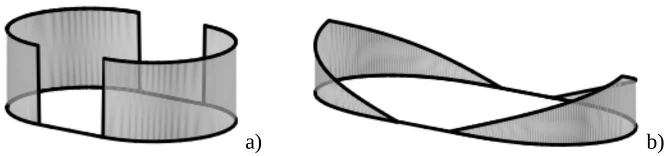


Abb. 25: Großvaters Eisenbahn-Anlage; Anlage mit Klothoidenbögen

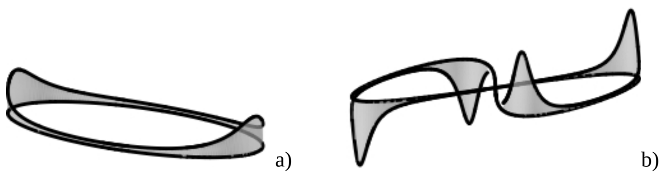


Abb. 26: Ellipse und Achterbahn

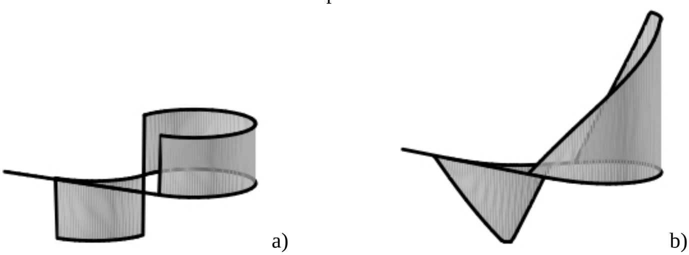


Abb. 27: Wendeschleife mit und ohne Krümmungssprünge

Krümmung im Alltag

Die Abbildung 28 zeigt den Landwasserviadukt der Rhätischen Bahn. Teile des Netzes dieser Bahn sind zum UNESCO Welterbe erklärt worden.

Abb. 28: Landwasser-Viadukt

Wir erkennen, dass die einzelnen Brückenjoche von oben gesehen geradlinig gebaut wurden. Lediglich die Gleis-Trasse ist gleichmäßig gekrümmt. Aus der Sicht eines Zugpassagiers ändert sich daher der Abstand zum Brückengeländer bei der Brückendurchfahrt. Dies ergibt einen weiteren Zugang zum Krümmungsbegriff: Wie weit ist eine Sehne mit Standardlänge maximal von der Kurve entfernt?

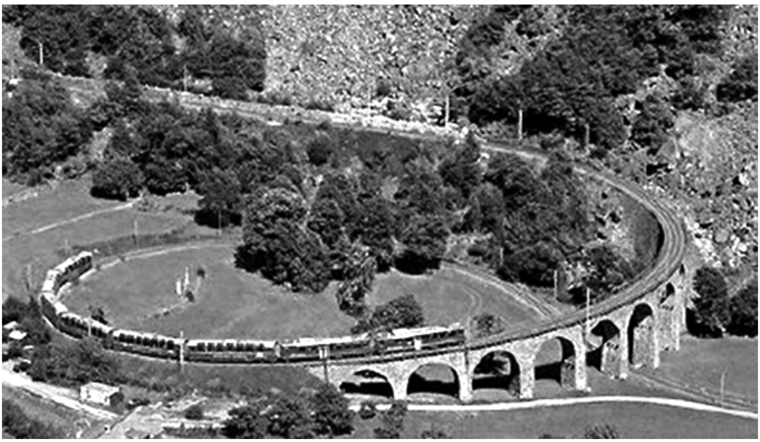


Abb. 29: Brusio Viadukt

Beim Durchfahren des Viaduktes bei Brusio (Abb. 29) erleben wir eine totale Krümmung von etwa 2π. Da sich das Geleise aber auch in die Höhe schraubt, ergibt sich zusätzlich zur Krümmung auch eine Torsion.

Literatur

Baumann, Astrid (2007): Modeerscheinungen und goldene Kälber in der Mathematikdidaktik. Beiträge zur Experimentalphysik, Didaktik und Computergestützten Physik. Herausgegeben von Kolling Stefan. Berlin: Logos-Verlag 2007. S. 17-36.

Hoffmann, Heinrich (1845): Der Struwwelpeter. 1844/45

Jegge, Jürg (1979): Angst macht krumm. Erziehen oder Zahnrädchenschleifen. Gümligen, Zytglogge 1979.

Kroll, Wolfgang (2010): Computer-Algebra-Systeme. Didaktische Überlegungen zum Einsatz im Unterricht und in Prüfungen. MNU Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. 63/5, 2010, S. 304-309.

Leiss, Dominik (2010): Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie. Journal für Mathematik-Didaktik. Band 31, Heft 2, Oktober 2010, S. 197-226.

Müller-Sommer, Hartmut (2012): Entdeckungen an der Goldenen Spirale. MU Der Mathematikunterricht. Die Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt. Jahrgang 58. Heft 1, Februar 2012. Friedrich Verlag, Seelze.

Prediger, Susanne (2010): Über das Verhältnis von Theorien und wissenschaftlichen Praktiken – am Beispiel von Schwierigkeiten mit Textaufgaben. Journal für Mathematik-Didaktik. Band 31, Heft 2, Oktober 2010, S. 167-195.

Internetseiten

http://www.uni-protokolle.de/foren/viewt/152775,0.html (7. 11. 2011)

Abbildungsnachweis

Abb. 18 und Abb. 19: Copyright Graubünden Ferien (www.graubuenden.ch)

Connections between Secondary and Tertiary Curricula for Linear Algebra with Focus on the Concept of a Determinant – Proposal with Technology Support

Ana Donevska Todorova

Abstract. The paper discusses the concept of a Determinant and its connections to other mathematical concepts in courses of Linear Algebra, at both secondary and tertiary levels from a curricular point of view. It also identifies two recourses for students' difficulties in understanding the concept and offers a teaching approach with Applets created by Dynamic Geometric Software. The designed Applets are supported by proposed exercises, which aim to widen students' concept images of a Determinant.

Theoretical Background

Part II of the book (Dorier 2002) devoted to teaching and learning issues in Linear Algebra ends with conclusions and perspectives for further research:

> *Many questions have been left open for new research works. Linear Algebra is connected to the students' previous knowledge in various mathematical fields. What can the researcher assume about the state of this knowledge? Is it possible to refer only to the official curriculum? Moreover, there is a change of 'culture' between secondary and university teaching.* (Dorier 2002, p. 276)

These questions are inspiration for this paper, which is an attempt to describe some connections between secondary and tertiary[1] level curricula for courses in Linear Algebra. It focuses on conceptual changes between these two levels of the mentioned courses. The main accent in the paper is set on developing *concepts* (concept definitions and concept images) *of a determinant* at both, secondary and tertiary, levels. The meaning of 'concept definition' and 'concept image' is understood as defined by Tall & Vinner (1981). According to Vinner, the concept images of a person consist of the set of the concepts' properties and a set of all pictures that have been associated with the concept in the person's mind (Vinner 1983). Konyalioğlu, İpek and Işik affirm that in order to handle concepts, one needs concept images, not only concept definitions (Konyalioğlu, İpek & Işik 2003).

[1] The secondary level means 11^{th} or 12^{th} grade high school, namely students at the age of 16-18 years, while tertiary level means beginners at university, i.e. 18-20 years.

No concept image is viable without mathematical connections. One of the most appealing aspects in Linear Algebra, yet a serious source of difficulty for students is the "endless" number of mathematical connections one can (must) create in studying it. Relationships between systems of linear equations, matrices, linear transformations and determinants can be build in numerous ways, and problems about systems of linear equations are equivalent to problems about matrices, which, in turn are equivalent to problems of linear transformations. In this respect, Linear Algebra is different from any other lower division topic in mathematics. (Harel 1997, p. 111)

According to Uhlig, one must explain and rely on the meaningful relationships between the various ingredients (Uhlig 2003) when teaching Linear Algebra. The overwhelming amount of new definitions and the lack of connections between them and what students already know in mathematics (Dorier 2002) could be recourse for students' difficulties in Linear Algebra.

In order to detect students' difficulties in learning and understanding the concept of a determinant, the research begins at the university level. Namely, Strang (MIT)2 starts his lecture on Determinants at the beginning of the second half of the course Linear Algebra, defining the determinant as a number associated with a squared matrix and on the very beginning he says:

Do I give you the formula for the Determinant all in one gulp? I don't think so! That big formula has got too much packed in it. I would rather start with three properties[3] *of the determinant.* (Strang 2010)

Obviously, Strang has detected many students' difficulties through the years, so he prefers to start the lecture with determinants' properties (lecture 18), rather than with its formal definition (lecture 19) and then refers to their applications in geometry (lecture 20). Students in the class have previously studied about vector spaces, matrices and linear mappings, yet are not prepared to acknowledge the definition of a determinant. Which are the reasons? "That big formula has got too much packed in it" can be interpreted as: it holds all the connections included in the concept of a determinant, as being its formal definition. The variety of many connections in a single formula could be a resource for insufficient students' concept images. Is it possible that other resources for these difficulties come from students'

[2] Massachusetts Institute of Technology

[3] Referred to as three axioms in the proposed teaching approach, latter on in the text.

background knowledge and what should the instructor assume about the previous students' knowledge based on the curriculum? How to teach the concept of a determinant at the secondary level, yet avoid probable barriers or restrictions of the concept at the university stage of the courses? The following paragraph discusses these questions.

Connections with the Concept of a Determinant from a Curricular Point of View

From a curricular point of view at both levels, the course of Linear Algebra may start with nearly any of its subjects, such as starting with linear transformation, or row reduction, or linear equations, or bases and basis change, or matrix representations, or determinants, for example. According to Uhlig, in order to convey a coherent understanding of the whole field of Linear Algebra, what comes first dictates to a degree what comes next and how well Linear Algebra is understood at the end (Uhlig 2003). Some authors (Uhlig 2003; Jacob 1995) recommend a 'fundamental' concept, namely Linear Transformations, and use it to introduce and explain almost every other subject, concept, and area of elementary Linear Algebra. This approach may be considered useful at university level, but restricting the diversity of the topics in the course at secondary level, would be a pity for the students not having a chance to form a variety of concept images, as for example in the case of determinants. If the concept of a determinant in the high school curriculum[4] is introduced and mainly focused on determinants' applications in analysis of solution sets and methods for solving systems of linear equations, for example as in (Тренчевски К., Тренчевски Г., Крстеска, & Здравеска 2004), than other aspects of the concept, for example connections to elementary or analytic geometry, are omitted. This may be considered as a barrier in understanding the concept in its comprehensiveness and may initiate inadequate concept images.

> *However, the role of the study of systems of linear equations, served as a framework, upon which an embryonic theory of linearity was built and most of the elementary concepts of linear algebra took decades of reflection on questions that today seem so obvious to us. The theory of determinants was the*

[4] Curricula in southeast European countries are oriented on this application and follow the historical development of determinants prior the vector spaces.

> *framework for all questions dealing with linearity. From a didactical viewpoint, the historical analysis shows the consistency of starting with the study of systems of linear equations when teaching linear algebra. But, it also gives reasons for finding tools other than determinants, which would avoid the technical difficulties they engender. Alternative didactical approaches can be offered in which the Gaussian elimination can be used for solving systems of linear equations.* (Dorier 2002, p. 5)

According to the curricula[5] for Linear Algebra and Analytic Geometry in Berlin, Germany, the concept of a determinant is not obligatory, but only optional for the 11th grade students in Gymnasiums. It is up to the teacher to decide whether to teach this concept at the end of the course or not. Some German textbooks[6] provide the definition of a determinant using the area of a triangle and doubling it to the area of a parallelogram. In this approach the geometric aspects of the concept are used for the concept definition. However, no properties of determinants or further explanations for possible connections between volume of solids and determinants of order 3 are mentioned in the textbook. This approach may again be considered as a barrier for the upper level of the course, because it does not refer to completeness of the concept (properties and extension to determinant of order 3 and n).

Thus, the instructor at the university level must be aware that the previous students' knowledge based on the curriculum consists of a few concept images (very often only one) of a determinant. So, he/she should be prepared to assist students in widening their concept images, establishing connections between different concept images and between the concept images and the concept definitions, and activating the appropriate concept image when solving a particular problem.

In order to provide undoubtedly perceptive on the variety of connections between the concept of a determinant and other mathematical concepts from a curricular point of view, the diagram on Figure 1[7] shows some related concepts to the definition of a determinant within the course Linear Alge-

---

[5] Mathematik im mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil der Sekundarstufe II, MA-3+: Lineare Algebra und Analytische Geometrie (2009) sowie Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe, Mathematik, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006).

[6] For example, the chapter I.6 "Der Flächeninhalt eines Dreiecks", p.16-18 in the textbook Honsberg, 1968.

[7] Note: The diagram shouldn't be interpreted as determinants being the core of Linear Algebra.

bra, as well as within other courses as Geometry, Analytic Geometry and Combinatorics. (Connections to other concepts exist, for example to applications of determinants in other mathematical courses, for example Differential Geometry, but the priority in this paper is to discuss the introductory definition of the concept of a determinant and students' understanding this concept, or the use of the determinant concept in introducing very closely related concepts).

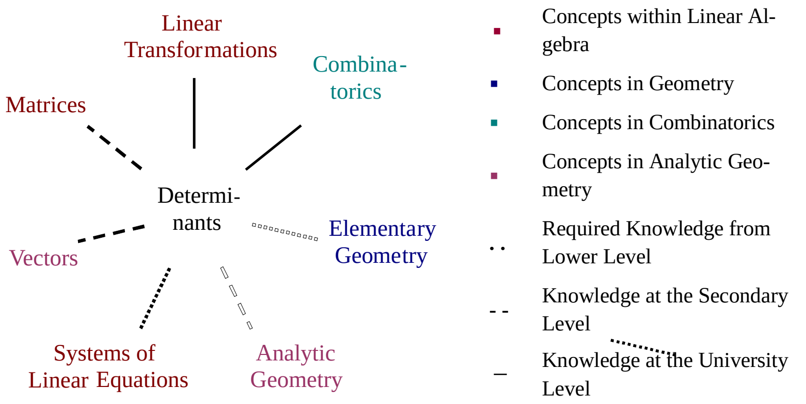


Fig. 1: Connections between the Concept of a Determinant and Other Mathematical Concepts

The diagram shows that if the introduction to Determinants is at the secondary level, than required students' knowledge is from the lower level in geometry and systems of linear equations (dotted lines). At the same level, connections of the concept lead to vectors, matrices and analytic geometry (dashed lines), but at the tertiary level, knowledge in linear transformations and combinatorics is required. Furthermore, how these particular connections are being observed in this paper can be seen in the following Table 1.

Systems of Linear Equations	Multiplication/Addition and Substitution Methods, Cramer's Rule
Elementary Geometry	Area (Volume) of Geometric Figures (Solids)
Matrices	Numerical Characteristic of Squared Matrices, Test for Invertibility of Squared Matrices
Vectors	Test for Collinear (Coplanar) Vectors, Mixed Product of Vectors
Analytic Geometry	Test for Collinear (Coplanar) Points, Equation of a Line (Plane) Through Two (Three) Points

Linear Transformations	Determinant Function
Combinatorics	Permutations

Table 1: Specified Connections

As exposed in the diagram and in the table above, there is a possibility to introduce the concept of a determinant using functions. So, the determinant can be treated as a function which assigns a number to a squared matrix of order *n* for any positive integer *n*. It is possible to define this function by an explicit formula generalizing those of order 2 or 3, but the formula is unwieldy for *n* large (and is hardly used in practice). Thus, another approach which characterizes determinants by their essential properties, called axioms for determinant function (Strang 2010) can be used. The proposed teaching approach, further on in the text, is based on these axioms.

Shortly summarized, there is no unique way to introduce the concept of a determinant. The aim of the instructor should be to include more of its aspects in an comprehensible approach when teaching linear algebra. This paper suggests technological support in order to achieve this aim.

The Role of Visualizations and Technology

Linear Algebra is usually perceived as a difficult subject by university students (Konyalioğlu, İpek & Işik 2003). Similarly, Artique (1999) pointed out that mathematical work in linear algebra mobilizes several systems of representations, including graphics, pictures, symbolic writing, natural language, and others. Abstract concepts in Linear Algebra can be presented algebraically and with geometrical models. On the basis of a teaching experiment, Harel (1989) emphasizes the role of visual representations. Thus, according to him, the abstract concepts can be taught to the students in three phases: *visualization* of the concept and the process, *representation*, and the *establishment of the dimension of* $\mathbf{R}^n$ of the concept. It is considered that geometrical structures supported algebraically on the teaching concepts in linear algebra develop the concept and concepts' properties in the students' understanding and it is required to teach preconditions, such as point settings in $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$ (Konyalioğlu, İpek & Işik 2003). The suggested three phases and the progressive increase in abstractions: from geometry in $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$ and then to $\mathbf{R}^n$ by Harel (1989) are taken into consideration when designing the proposed approach with GeoGebra applets offered in the next paragraph of this paper. Dorier and Harel emphasize that visualization studies of abstract Linear Algebra are the most urgent thing in the research agenda with respect to instruction methods (Dorier 2000; Harel 1989). According to Filler, very often, mathematics teaching is dominated by a rather mechanical execution of algebraic calculations. Visualizations can support a vivid understanding of solution methods as well as intuitive structural conception (Filler 2010). Campe (2011) recommends keeping two goals in mind: (1) The technology must support the mathematical concept, and (2) The technology must enhance students' learning of those concepts. According to Campe (2011), technology, when used effectively, can strengthen conceptual understanding and aid long-term retention. Students learn to formulate conjectures, make connections, and substantiate conclusions for themselves, so that they take the ownership of the knowledge and spend less time as passive listeners (Campe 2011).

Proposed Teaching Approach

This part of the paper presents a proposal for introducing the concept of a determinant with axioms 1, 2, 3*a* and 3*b* (on the next page) at the secondary and university level with the aid of interactive geometry in $\mathbf{R}^2$, having in mind the connections shown in the Figure 1 and previous students' knowledge according to the curricula. If the concept of a determinant has already been introduced, then the proposed applets[8] can be exploited for observing properties of determinants. Applet 1 on Figure 2 utilizes sliders[9] as linear visualizations of the variables multiplying the determinant. Both applets provide connections of the concept of a determinant with: vectors (addition and multiplication of a vector by a scalar), plane geometry (area of plane geometric figures as triangles, squares, rectangles and parallelograms, and congruence of triangles) and algebraic notation of a determinant.

[8] The design of the applets has been inspired by Weller (1979).

[9] With the rise of dynamic mathematics learning environments, sliders are increasingly used as a pedagogical tool to create interactive mathematical activities that encourage students to explore mathematical ideas (Bu; Haciomeroglu, 2010).

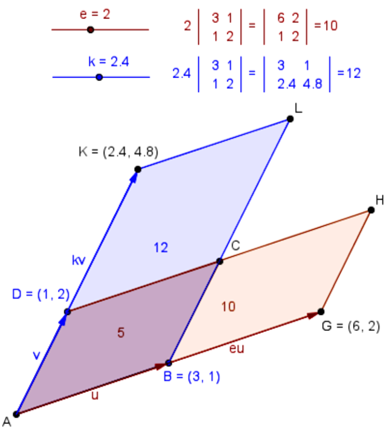


Fig. 2 (Applet 1): Visualization of Axiom 3a

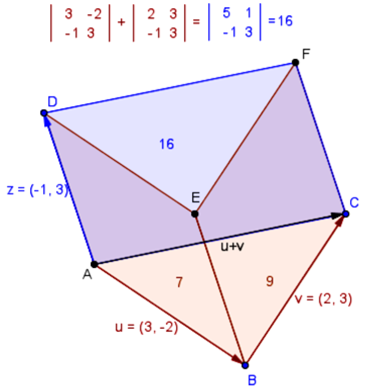


Fig. 3 (Applet 2): Visualization of Axiom 3b

The interactivity of the both applets offers changes of the magnitude and direction of the given vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ and $\vec{z}$ (by dragging their terminal points) and changes of the variables *e* and *k* (by moving the sliders). These changes affect the shape of the geometric figures and their areas, as well as the entries of the corresponding determinants, simultaneously. Thus, the applets provide the first phase, *visualization* of the concept of the three phases that Harel (1989) described (on the previous page). The second phase is the *representation* of the concept. The concept of a Determinant is mostly algebraic in nature, thus the algebraic representation must be emphasized and it is provided by the axioms 1, 2, 3*a* and 3*b*, distinguishing the notation at the two different levels, as follows:

Secondary Level Approach with Connections to Geometry (*Required Knowledge in Elementary Geometry and Vectors*)	Tertiary Level Approach Treating the Determinant as a Function (*Required Knowledge in Matrices and Linear Transformations*)
1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$	**1.** $\det I = 1$
2. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$	**2.** $f(r_1, r_2) = -f(r_2, r_1)$[10]

[10] $\det A = f(r_1, r_2),\ r_1, r_2, r_1', r_2' \in \mathbf{R}^2$

3*a*. (Applet 1)

$$e \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ea & eb \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$$

3*a*. (Applet 1)

$$e \cdot f(r_1, r_2) = f(e \cdot r_1, r_2),\ e \in \mathbf{R}$$

$$k \cdot f(r_1, r_2) = f(r_1, k \cdot r_2),\ k \in \mathbf{R}$$

3*b*. (Applet 2)

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

3*b*. (Applet 2)

$$f(r_1, r_2) + f(r_1', r_2) = f(r_1 + r_1', r_2)$$
$$f(r_1, r_2) + f(r_1, r_2') = f(r_1, r_2 + r_2')$$

Note for the tertiary level approach: When treating the determinant as a linear function of each row, leaving the other row (all the other rows) the same, it is important to emphasize that it does not means that $\det(A+B) = \det A + \det B$. Thus, it is important that the students distinguish the linearity of the determinant function in the sense of each of its rows and not of the whole determinant.

Further on, the second phase is supported by *proposed exercises*, which foster an environment that could be conductive to students offering their own ways of thinking, and establishing connections between different concept images and the concept definition (including the concept representation), which is naturally pretty algebraic. Thus, students would have the opportunity to develop their visualization ideas and to reflect on their own previous knowledge rather than to calculate and end up with possible numerical errors. Therefore instead of the isolated exercises (on the left), the approach suggests the proposed exercises (on the right), which are particularly related to each of the applets 1 and 2.

Isolated Exercises

1. $2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

Proposed Exercises (with the Applet 1)

Double the length of one side of the parallelogram $ABCD$. (Set one of the sliders at 2 and the other one at 1). How does it affect its area? Write your answer with determinants' notation. Compare the length and the direction of the vectors $\vec{u}$ and $e \cdot \vec{u}$ (or $\vec{v}$ and $k \cdot \vec{v}$). What is their relation to the determinant?

2. $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ T or F	Double the lengths of both sides of the parallelogram $ABCD$. How does it affect its area, the entries in each row and the value of the determinant?
3. $x = ?$ *if* $\begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	Double one of the sides of the parallelogram $ABCD$ and triple the other one. How does it affect its area? Write your answer with determinants' notation and compare it to the previous exercise.
4. a) $n\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$ b) $n\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ?$ $n, a, b, c, d \in R$	Explore for other real numbers and generalize your answer.
5. $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$	Set the vertex B at $B(-3,1)$. Explain the relation between the area of the parallelogram $ABCD$ and the determinant.
6. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ?$	Set both sliders at 1, and B and D to $B(1,0)$ and $D(0,1)$, respectively. Which geometric figure is obtained? Which of the axioms for determinants is provided?
7. $\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} = ?$	Can a determinant represent area of a rectangle? Investigate how!
Isolated Exercises	**Proposed Exercises (with the Applet 2)**
8. $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix}$	What is the relation between the vectors $\vec{u}, \vec{v}$ and $\vec{z}$, and the determinants?
9. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{vmatrix}$	Explain the relation between the areas of the parallelograms on the applet and the determinants. Prove your answer with geometric means and with determinants.
10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lvert 0 \rvert = ?$	Set both points B and C at $(1,0)$ and D at $(0,1)$. Which geometric figure and axiom are obtained?

The third phase (Harel 1989) is the *establishment of the concept in dimension n,* beginning with $n = 3$. For this purpose, there is a necessity that the exercises refer to the volumes of parallelepipeds (the unit cube in the case of axiom 1 and exercises 6 and 10 or boxes in exercise 7), vectors in space (exercises 1 and 8) and determinants of order 3. Once this process of generalization from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$ is described, widening the representation to a determinant of order *n* should follow.

Conclusions

In order students to develop effective concept images in Linear Algebra, they must learn to not just memorize concept definitions but must construct concept images that will enable them to *remember* what they learned, *think in general terms*, *communicate* and *connect* mathematical ideas (Harel 1997). This paper detects two main recourses of students' difficulties in understanding the concept of a determinant: the variety of connections in the concept and students' background knowledge based on the curriculum, which the instructor should keep in mind. It emphasizes the role of visualizing aspects of the concept of a determinant to provide connections between more of its aspects and contribute to widen students' concept images. The designed applets and the related exercises aim to spend mere focus on computing and manipulating determinants, and more focus on understanding the concept of a determinant. They also aim to motivate students to: observe, explore, discover, assume, explain, and prove. They focus on using previous students' knowledge, generalizing ideas and developing learning processes and strategies, rather than just repeating particular mathematical skills and results.

References

Artique, M. (1999). The Teaching and Learning of Mathematics at the University Level. In: Notices of the AMS 46 (11), 1377-1385.

Bu, L.; Haciomeroglu, E. S. (2010). Sliders in Dynamic mathematics learning environments: their pedagogical roles. In: Math. Comput. Educ. 44, No. 3, 213-221.

Campe, Karen D. (2011). Strategies for Implementing Technology. In: Mathematics Teacher 104, No. 8, 620-625.

Dorier, J-L. (2002). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. On the teaching of linear algebra. Springer.

Dorier J.-L. (2000). On the Teaching of Linear Algebra. Mathematics Education Library, ISBN-10: 0792365399, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Filler, A. (2010). Visualizing Geometrically – Understanding Algebraically: Systems of Linear Equations in the Lower and Upper Secondary School Level. In: Prax. Math. Sch. 52, No 32, 31-36.

Harel, G. (1989). Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes. In: Focus Lear. Probl. Math. 11(2), 139-148.

Harel, G. (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations: Moving Beyond Concept Definition. In: Carlson D., Johnson, C, Lay, D., Porter, D., Watkins, A, & Watkins, W. (Eds.). *Resources for Teaching Linear Algebra*,. MAA Notes, Vol. 42, 107-126.

Honsberg, H. (1968). Analytische Geometrie, Bayerischer Schulbuch-Verlag, München.

Jacob, B. (1995). Linear Functions and Matrix Theory. Springer.

Konyalioğlu, A. C.; İpek A. S; Işik, A. (2003). On the Teaching of Linear Algebra at the University Level: The Role of Visualization in the Teaching of Vector Spaces. In: Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education. Vol. 7, No. 1, 59-67.

Strang, G. (2010). MIT Open Course Ware. Transcript of the lecture 18. http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-18-properties-of-determinants/

Tall D.; Vinner S. (1981). Concept Image, Concept Definition in Mathematics, with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Sciences in Mathematics 12, 151-169.

Тренчевски К.; Тренчевски Г.; Крстеска Б.; Здравеска С. (2004). Линеарна алгебра и аналитичка геометрија – за трета година реформирано гимназиско образование. Просветно дело АД Скопје.

Uhlig, F. (2003). A New Unified, Balanced, and Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra. In: Linear Algebra and Its Applications. Vol. 361, 1, 147–159.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and Notation of a Function. In: International Journal of Mathematics Education, Science and Technology. 14, 293-305.

Weller, H. (1979). Determinanten in einem Kurs Lineare Algebra. In: Didaktik der Mathematik 7, 62-72.

Geographische Informations-Systeme analysieren – den Begriff Skalarprodukt erarbeiten

Ralf Wagner

Zusammenfassung. Gerade in der Analytischen Geometrie ist es wesentlich, Grundvorstellungen für wichtige Konzepte zu erarbeiten. Es wird eine Lernumgebung vorgestellt, in der eine Anwendungssituation unter Nutzung Geographischer Informations-Systeme (GIS) erforscht wird. Dies kann Schüler bei der selbstständigen Erarbeitung von Grundvorstellungen unterstützen. Möglichkeiten zur vernetzten Verwendung von GIS und DGS und Wege zur Integration in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II werden vor diesem Hintergrund diskutiert.

Hintergrund

Bedeutung des Skalarproduktes

Die Bedeutung der Analytischen Geometrie für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II wird in der didaktischen Literatur aus unterschiedlichen Perspektiven heraus dargestellt, wobei insbesondere das Verhältnis zur Linearen Algebra hervorgehoben werden muss. Tietze (2000, S. 37) stellt drei grundlegende Arten dar, mit Analytischer Geometrie umzugehen. Eine abstrakte Sichtweise sieht die Analytische Geometrie als Bestandteil der Linearen Algebra, wobei Begriffe wie Geraden und Ebenen als Nebenklassen bezüglich eines Vektorraumes betrachtet und Bilinearformen wie das Skalarprodukt als abstrakte Homomorphismen behandelt werden. Ebenso formal-axiomatisch ist die Begründung des Vektorraumbegriffs auf einer auf Punkten, Geraden und Inzidenzen basierenden synthetischen Geometrie. Näher an der Anschauung hingegen ist die Behandlung im Rahmen einer Koordinatengeometrie oder als eine durch Pfeilklassenvektoren geprägte vektorielle Analytische Geometrie.

Es soll hier nicht grundlegend auf didaktische Entscheidungen bezüglich der Behandlung der Analytischen Geometrie im Unterricht der Sekundarstufe II eigegangen werden, die der einen oder anderen der oben genannten Strömungen folgen. Es sei darauf hingewiesen, dass sich in der historischen Entwicklung sehr unterschiedliche Entwicklungen abgezeichnet haben, wobei mitunter axiomatisch-deduktive Vorgehensweisen und zu anderen Zeiten stärker anwendungsorientierte Ansätze dominierten. Eine ausführliche Darstellung dieser Sachverhalte ist in Tietze (2000, S. 93ff.) zu finden.

In diesem Artikel wird eine in das Konzept „Mathematik-Labor“ (siehe Appel; Roth; Weigand 2008) eingebettete Lernumgebung aus dem Inhaltsbereich der Analytischen Geometrie vorgestellt. Es geht um eine anwendungsorientierte Erarbeitung des grundlegenden Konzepts des Skalarproduktes und eng damit zusammenhängend der Orthogonalität von Vektoren bzw. Geraden. Tietze (2000, S. 37) stellt das Skalarprodukt und das Längen- bzw. Winkelmaß als Bestandteil der Leitidee „Lineare Funktionale und ihre geometrische Bedeutung“ und als Elemente zentraler Mathematisierungsmuster heraus. Dies gilt sowohl im Rahmen der Koordinatengeometrie als auch der vektoriellen Analytischen Geometrie. Das Skalarprodukt ist der fundamentalen Idee des „Messens“ zuzuordnen, da es eine allgemeine Winkelmessung und speziell ein Kriterium für das Vorhandensein von Orthogonalität darstellt.

Eine grundlegende bereichsspezifische Strategie, die auch bei der hier vorgestellten Erarbeitung des Begriffes Skalarprodukt eine Rolle spielt, ist das „Geometrisieren algebraischer Sachverhalte und das Algebraisieren geometrischer Sachverhalte“. Dies geht auf Klein und Lietzmann zurück, die das fusionistische Prinzip zur Lösung bestimmter Probleme propagieren. Darüber hinaus kann dieser Ansatz aber auch bei der Erarbeitung und Einführung neuer Begriffe eine Rolle spielen. Hier kommt der von Schmid (2005, S.160 ff.) beschriebenen Durchmischung von synthetischer und rein analytischer Geometrie eine wichtige Rolle zu. Bei der Konzeption der im Nachfolgenden vorgestellten Lernumgebung wird die von Schmid (2005, S.173) geforderte Konkretisierung neu gewonnener Erkenntnisse umgesetzt, indem die vorher eingeführten Begriffe Geradengleichung und Länge in einem neuen Kontext angewandt werden. Die Wichtigkeit dieser Vorgehensweise unterstreicht Schmid (2005, S. 173), indem er fordert, dass „die Leistungsfähigkeit der neuen Methoden (...) sich auch an neuen Fragestellungen (...) erweisen“ muss.

Die Bedeutung geographischer Informationen

Geographische bzw. geokodierte Informationen spielen im Alltag der Schülerinnen und Schüler eine immer größere Rolle. Während geographische Informationen vor einigen Jahren lediglich bei der Verwendung von Navigationsgeräten genutzt wurden, sind in neuerer Zeit vielfältige derartige Angebote und Anwendungen zugänglich. Man denke nur an entsprechende Webangebote, von denen das bekannteste wohl Google-Earth ist, mit deren

Hilfe vielfältige Erfahrungen mit Geoinformationen möglich sind. Neben den reinen Karteninformationen kann ein vielfältiges Angebot an Zusatzinformationen wie beispielsweise zu Verkehrswegen, Sehenswürdigkeiten, zu Naturschauplätzen, aber auch historisches Kartenmaterial oder aktuelle Wolkeninformationen genutzt werden. Wichtig zu erwähnen sind an dieser Stelle die Interaktionsmöglichkeiten des Nutzers. Diese bestehen unter anderem im Import oder dem Einfügen eigener Informationen wie aufgezeichneten GPS-Daten oder auch geokodierten Text- und Bilddaten, die dann auch anderen Nutzern zur Verfügung gestellt werden können. Darüber hinaus sind auch das Einfügen von Polygonen und das Messen von Abständen möglich. In diesem Zusammenhang ist das Projekt „OpenStreetMap" zu nennen, in dem durch die dahinter stehende Gemeinschaft freies Kartenmaterial der gesamten Welt erstellt wird und zum Herunterladen zur Verfügung steht. Dies wird weiter untern noch einmal in der vorgestellten Lernumgebung eine Rolle spielen. Neben diesen und ähnlichen Webanwendungen haben Geoinformationen besonders auch durch die fortschreitende Verbreitung moderner Smartphones Einzug in den Alltag gefunden. Hier ist es durch geeignete Applikationen möglich, Geodaten beispielsweise zur Navigation oder zur ortsbezogenen Informationsbeschaffung zu verwenden oder eigene GPS-Daten von beispielsweise zurückgelegten Wanderungen oder absolvierten Trainingsstrecken im Sport aufzuzeichnen.

Im Zusammenhang mit der Zurverfügungstellung geokodierter wissenschaftlicher Daten spielen so genannte Web-Mapping-Dienste oder online verfügbare Geographische Informations-Systeme (GIS, siehe weiter unten) eine wichtige Rolle. Als Beispiel sei auf das GeoPortal des Landes Rheinland-Pfalz verwiesen, das eine Auswahl der Geodatenbestände des Landes online in Form einer interaktiven Karte zur Verfügung stellt. GIS-Anwendungen spielen in vielen Berufen überall da eine wichtige Rolle, wo Geodaten systematisch interpretiert und analysiert werden. Erwähnt seien hier die Bereiche Städte- und Verkehrsplanung sowie das Desaster-Management bei Naturkatastrophen oder Epidemien. Eine umfassende Darstellung der Bedeutung und der Anwendungsgebiete von GIS findet man bei Bolstad (2008, S.1 ff.). Auf ein Beispiel zur Lärmkartierung des Bundesministeriums für Umwelt wird weiter unten eingegangen.

Zusammenspiel von GIS und DGS in einer Lernumgebung

Betrachtung der relevanten Bildungsstandards und Curricula

An dieser Stelle soll zunächst ein Blick auf die für die vorgestellte Lernumgebung relevanten Abschnitte der Bildungsstandards geworfen werden. Zum einen wird dargestellt, an welchen Stellen Geographische Informations-Systeme in den Bildungsstandards des Faches Geographie zu finden sind. Dies rechtfertigt auf der einen Seite, GIS im Unterricht und damit auch im Mathematikunterricht einzusetzen, da der Umgang damit den Schülerinnen und Schülern durchaus zuzutrauen ist. Auf der anderen Seite kann durch den Umgang mit einem solchen System im Mathematikunterricht auch ein interdisziplinärer Beitrag zum Geographieunterricht geleistet werden und somit eine Vernetzung zwischen Mathematik und Geographie erfolgen. Neben den Bildungsstandards aus der Geographie werden natürlich die entsprechenden relevanten Aspekte aus den Rahmenlehrplänen Mathematik am Beispiel des Landes Rheinland-Pfalz betrachtet.

Geographische Informations-Systeme sind fester Bestandteil der Bildungsstandards des Faches Geographie. In den Bildungsstandards im Fach Geographie für den Mittleren Schulabschluss ist innerhalb des Kompetenzbereiches Räumliche Orientierung unter der Überschrift „O3 Fähigkeit zu einem angemessenen Umgang mit Karten (Kartenkompetenz)“ der Standard „einfache thematische Karten mit WebGIS erstellen“ (S10) aufgeführt. In den Bildungsstandards für Geographie im Rahmen des Fächerverbundes Geographie – Wirtschaft – Gemeinschaftskunde Gymnasium – Klassen 6, 8, 10, Kursstufe sind GIS an den folgenden Stellen zu finden.

- Klasse 8, fachspezifische Methodenkompetenz: thematische Karten interpretieren und erstellen sowie Geographische Informationssysteme (GIS-Darstellungen) nutzen (S. 241).
- Kursstufe (2-stündig, 4-stündig), fachspezifische Methodenkompetenz: elektronische Informationsquellen wie Geographische Informationssysteme (GIS-Anwendungen), Multimedia-Anwendungen, Datenbanken und Internet als Informationssysteme zur Auswertung aktuell statistischer und grafischer Informationen (wie Wetterdaten, Satellitenbilder) nutzen (S. 243, S. 245).

Bezüglich der Bildungsstandards Mathematik wird beispielhaft der Rahmenlehrplan Mathematik des Landes Rheinland-Pfalz für die Klassenstufen

5 – 9/10 und der Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach für die Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe betrachtet. Dabei werden sowohl die das Skalarprodukt betreffenden Abschnitte, als auch die damit zusammenhängenden, die Leitideen 2 und 3 betreffenden Stellen aus der Sekundarstufe I berücksichtigt.

- Orientierungsstufe, Leitidee 3: *Raum und Form*, dabei Bezüge zu Leitidee 2: *Messen und Größen*
  - Beziehungen „parallel zu“, „senkrecht zu“ einschließlich der üblichen Symbole sachgerecht nutzen
  - Abstand als kürzeste Entfernung nutzen
  - Winkel schätzen, messen und zeichnen
- Klassenstufen 7 und 8, Leitidee 3: *Raum und Form*, dabei Bezüge zu Leitidee 2: *Messen und Größen*
  - Mittelsenkrechten und Winkelhalbierende zeichnen und deren Eigenschaften in Sachsituationen anwenden
  - Kreistangente in einem vorgegebenen Berührpunkt zeichnen und dieses in Sachsituationen anwenden
- Klassenstufen 9 und 10, Leitidee 3: *Raum und Form*
  - Den Satz von Pythagoras begründen und in Sachsituationen anwenden

Die Thematik Skalarprodukt lässt sich im Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach unter der Überschrift „Lineare Algebra/Analytische Geometrie“ finden. Im rheinland-pfälzischen Lehrplan ist dieser Bereich im Grund- und im Leistungsfach in jeweils drei Wahlgebiete mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung und dennoch einem Grundbestand an fachlichen Inhalten unterteilt, „um den Lehrerinnen und Lehrern einen möglichst großen Spielraum für didaktische Entscheidungen einzuräumen (...)“ (S. 31). An dieser Stelle sollen die Wahlgebiete des Leistungsfaches betrachtet und die dem Thema Skalarprodukt vorausgehenden sowie die daran anschließenden Thematiken beleuchtet werden.

Wahlpflichtgebiet 1: Vektorielle analytische Geometrie

Im Lehrplan heißt es: „Im Mittelpunkt dieses Wahlpflichtgebiets “Vektorielle analytische Geometrie” stehen die Anwendung vektorieller Methoden zur Bearbeitung geometrischer Fragestellungen und, entsprechend der Zielsetzung des Leistungskurses, zum Beweis geometrischer Sätze. Hinzu kommt das Ziel, das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch Zeichnen von Geraden und Ebenen zu fördern.“ Unterteilt ist dieser Wahlbereich in die Abschnitte „Lineare Gleichungssysteme“, „Vektoralgebra“, „Analytische Geometrie“ und „Ausblick auf den Vektorraum“ in dieser Reihenfolge. Nach der Behandlung Linearer Gleichungssysteme mit Anwendungen in der Bestimmung von Lagebeziehungen beispielsweise von Geraden und Ebenen (wobei die entsprechenden Parametergleichungen erst im Abschnitt Analytische Geometrie verortet sind) schließt sich der Abschnitt Vektoralgebra an, in welchem das Skalarprodukt verortet ist und zum Beweis elementargeometrischer Sätze angewandt werden soll. Im Abschnitt Analytische Geometrie schließen sich die Behandlung der Hesseschen Normalenform und der Berechnung von Abständen und Winkeln im Raum an, wobei das Skalarprodukt und der damit zusammenhängende Begriff der Orthogonalität eine große Rolle spielen.

Wahlpflichtgebiet 2: Vektoren und Matrizen

Hierbei dominiert die Matrizenrechnung. Das Thema Skalarprodukt ist auch hier im Abschnitt „Vektoralgebra zu finden, ebenfalls soll dieses zum Beweis elementargeometrischer Sätze angewandt werden. Jedoch werden Parametergleichungen von Geraden und Ebenen sowie die Bestimmung von Längen und Winkeln nicht explizit erwähnt, sondern es schließt sich ein umfassender Abschnitt zur Matrizenrechnung und deren Anwendung an.

Wahlpflichtgebiet 3: Vektorräume und lineare Abbildungen; Anwendungen

In diesem Gebiet stehen der Vektorraumbegriff und das Konzept der linearen Abbildungen stark im Vordergrund. Auch hier ist das Skalarprodukt im Abschnitt „Vektoralgebra“ verortet, der sich an den Abschnitt „Lineare Gleichungssysteme“ anschließt. Es folgen die Abschnitte “Vektorräume“ und „Lineare Abbildungen“.

Inhaltliche und didaktische Konzeption

Das Konzept „Mathematik-Labor“, in welche die hier vorgestellte Lernumgebung eingebettet ist, wurde von Appel, Roth und Weigand (2008) vorgestellt. Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf der Vernetzung der drei Phasen

- „Experimentieren mit gegenständlichen Modellen“,
- „Mathematisieren“ und
- „Computersimulationen systematisch variieren“.

In Roth (2010) wird betont, dass die mathematische Durchdringung von Phänomenen und in diesem Zusammenhang auch die Vertiefung von Grundlagenwissen zentrale Anliegen sind.

In der vorgestellten Lernumgebung steht auf der fachlichen Seite die angeleitete selbstständige Erarbeitung des Begriffes „Skalarprodukt" unter Rückgriff auf bereits bekannte Konzepte im Mittelpunkt. Eingebettet und motiviert ist dieser Prozess in eine Problemstellung, in der es um die Berechnung von Lärmkorridoren in einem Geographischen Informations-System anhand dort vorhandener geokodierter Daten geht. Dies wird vernetzt mit der Erarbeitung im dynamischen Geometriesystem (DGS) GeoGebra.

Die Motivation erfolgt durch die Problematik der Lärmentwicklung entlang von Bahnstrecken. Dies wird durch eine entsprechende Videodatei thematisiert und auf die Dokumentation von Schienenverkehrslärm durch das Eisenbahnbundesamt verwiesen. Dort ist eine große Datenmenge in der Datenbank einer entsprechenden Web-GIS Anwendung vorhanden und es können Darstellungen zu Lärmkartierungen für das Bundesgebiet betrachtet und auszugsweise heruntergeladen werden. An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie eine solche Lärmkartierung technisch, aber auch mathematisch durchgeführt werden kann.

Mit Hilfe eines gedruckten Kartenausschnittes mit Bahnstrecken innerhalb einer Ortschaft werden die Schülerinnen und Schüler dazu angeleitet, selbst Lärmkorridore zu konstruieren. Genutzt werden soll dabei aus der Mittelstufe bekanntes Wissen zur Konstruktion von Parallelen unter Zuhilfenahme von Senkrechten. Bereits an dieser Stelle soll ein Bewusstsein dafür geschaffen werden, dass der Begriff Orthogonalität dabei eine große Rolle spielt. Ein besonderes Augenmerk wird auf die Behandlung der Stellen geworfen, an denen eine Richtungsänderung erfolgt, die entsprechende Bahnstrecke also einen „Knick" hat. Hier ist Raum für die Entwicklung eigener Ansätze durch die Schülerinnen und Schüler. Entsprechend der Konzeption des Mathematik-Labors werden hier zu den Arbeitsaufträgen gestufte Hilfen angeboten, um auch bei Problemen ein möglichst selbstständiges Weiterarbeiten zu gewährleisten.

In Geo-Informations-Systemen können solche Korridore durch so genannte Pufferverfahren (Buffer) erzeugt werden. Entsprechende Literatur dazu wie beispielsweise Bill (1996, S. 39) führt die beiden in der Abbildung 1 dargestellten Möglichkeiten dar, welche die genannten Knickstellen auf unterschiedliche Art und Weise behandeln.

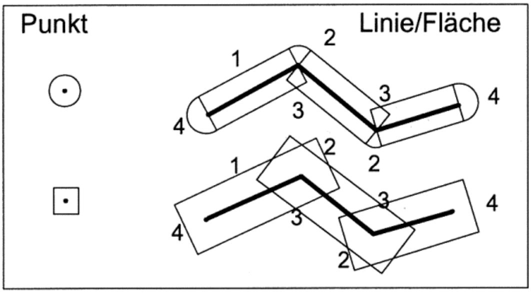


Abb. 1: In GIS angewandte Pufferverfahren (Bill, 1996, S. 39)

Mit Hilfe der Daten aus einer vorgegebenen Tabelle sollen die Schülerinnen und Schüler nun selbst in einem Geo-Informations-System Puffer um eine durch die Stadt Landau verlaufende Bahnlinie erzeugen.

Für die Zwecke des Unterrichtseinsatzes eignet sich das System QGIS[1] besonders. Dabei handelt es sich um ein so genanntes Desktop-GIS, das auf dem verwendeten Rechner installiert werden muss, im Gegensatz zu einem im Webbrowser verwendbaren Web-GIS. Auf dem Markt ist eine Vielzahl derartiger Software erhältlich, darunter kommerzielle Produkte wie beispielsweise ArcGIS oder OpenSource Programme wie GRASS GIS oder eben das erwähnte QGIS. Dieses wird hier präferiert, da es einerseits im Vergleich zu anderen Systemen durch die intuitivere Benutzeroberfläche einfacher handhabbar ist, andererseits aber dennoch eine Vielzahl an GIS-Funktionalität mit sich bringt, darunter eben auch die Möglichkeit zur Puffergenerierung. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass – bei Verwendung einer entsprechenden Erweiterung – frei verfügbares OpenStreetMap-Material[2] einfach importiert werden kann.

Abhängig von der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit können die Schülerinnen und Schüler die in das GIS zu importierenden Daten selbst beschaffen und so zu einem professionellen Arbeiten mit einem authentischen Computerwerkzeug angeleitet werden. Um den zeitlichen Rahmen innerhalb der Lernumgebung nicht zu sprengen werden hier die bereits im-

[1] http://www.qgis.org/

[2] http://www.openstreetmap.org/

portierten Daten bereitgestellt und können von den Schülerinnen und Schülern gleich zur Puffergenerierung nutzt werden. Da die Berechnung von Schienenverkehrslärm aufwendig und komplex ist, werden hier auf mit Hilfe eines online-Rechners[3] erstellte Daten zurückgegriffen, in welchen in einer Tabelle vorhandene Daten eingegeben zur Berechnung entsprechende dB-Werte eingegeben werden können. Durch Verwendung dieses Werkzeugs ist eine Anpassung an lokale Daten möglich. Eine Beispielrechnung ist in Abb. 2, ein Bearbeitungsbeispiel in QGIS in Abb. 3 dargestellt.

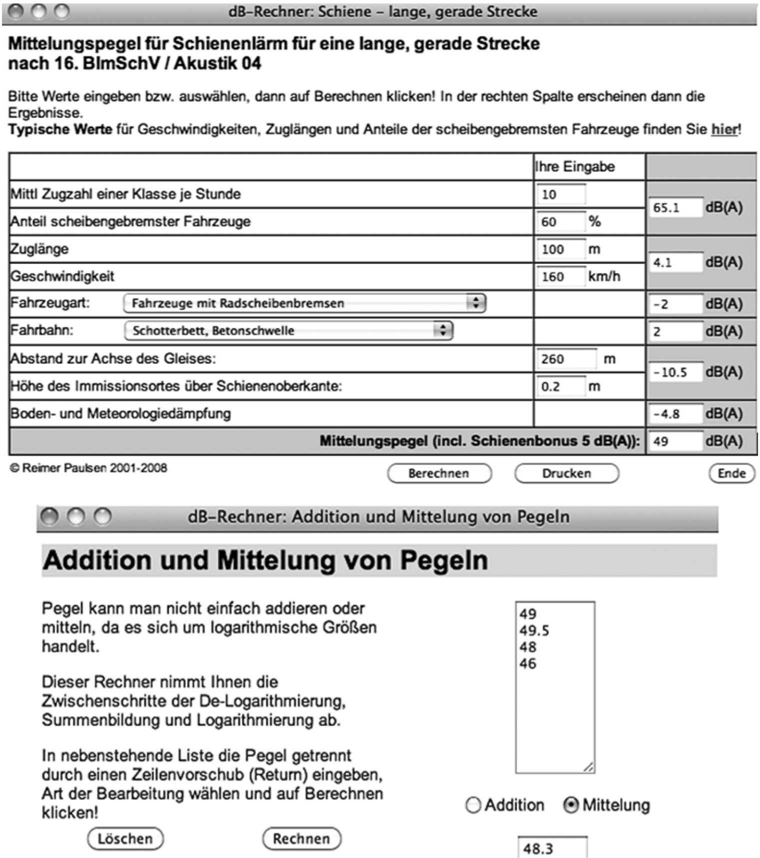


Abb. 2: Berechnung mit Hilfe des Lärmrechners des Wirtschaftsministeriums Baden-Württemberg

[3] http://www.staedtebauliche-laermfibel.de/index-12.htm

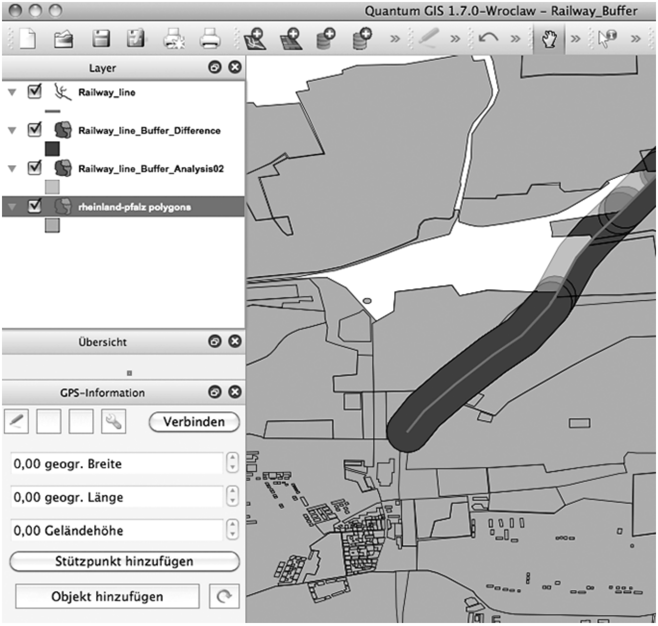


Abb. 3: Pufferanalyse in QGIS basierend auf den OpenStreetMap-Daten für Landau

Es stellt sich nun aber die Frage, wie ein Korridor oder Puffer innerhalb eines GIS berechnet werden kann, da hier ja Zirkel und Lineal nicht zur Verfügung stehen. An dieser Stelle erfolgt ein Informationsteil in Form eines Textes über GIS und die dort vorhandenen Datenformate, bei denen man im Allgemeinen zwischen Raster- und Vektordaten unterscheidet. Eine Darstellung dieser Sachverhalte ist bei Neteler (2008, S. 21 ff.) oder bei Longley (2005, S. 64 ff.) zu finden. Sollen Bahnstrecken, Straßen oder auch Hochspannungsleitungen in einem Geographischen Informationssystem als individuelle Objekte handhabbar sein, dann ist es sinnvoll, diese in Form von Vektordaten zu speichern. Auf die genauen informationstechnischen Hintergründe kann an dieser Stelle nicht detaillierter eingegangen werden. Im Prinzip werden die genannten Objekte aber als Streckenzüge im System repräsentiert, die entsprechende Knotenpunkte miteinander verbinden. Diese Knotenpunkte werden eindeutig durch ihre im System hinterlegten Koordinaten bestimmt. Diese können als Ortsvektoren interpretiert und gehandhabt werden. An dieser Stelle sei auf die Wichtigkeit des verwendeten Koordinatensystems hingewiesen. Die Berechnungen, die innerhalb der vorgestellten Lernumgebung durchgeführt werden, beziehen sich auf ein zweidimensionales rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, die Daten, welche aus der OpenStreetMap-Karte importiert werden, sind bezüglich der UTM-Projektion des WGS 84 Ellipsoides gespeichert. Detaillierte Informationen über Projektionen und Koordinatensysteme in GIS sind in Longley (2005, S. 110 ff.) zu finden, an dieser Stelle soll dennoch kurz darauf eingegangen werden. Um Orten auf der Erdoberfläche eine eindeutige Position im Raum und schließlich auch in einer zweidimensionalen Darstellung zuzuordnen, muss eine Reihe von Transformationen betrachtet werden, welche allgemein in Abbildung 4 dargestellt sind. Dabei wird die unregelmäßige Erdoberfläche durch in der Regel ein so genanntes Geoid oder einen Ellipsoid approximiert. Das Geoid ist ein geophysikalisches Modell, welches sich zur Beschreibung der Erdoberfläche auf das Schwerefeld der Erde und dabei auf Flächen gleichen Schwerepotentials bezieht. Weitere Informationen dazu findet man im Zusammenhang mit der GRACE-Mission[4]. Der hier angesprochene WGS 84 Ellipsoid hat eine große Halbachse der Länge a = 6 378 137 m, eine kleine Halbachse der Länge b = 6 356 752 m und gemäß f = (a-b)/a eine Abplattung von f ≈ 298,257 m. Zu einer zweidimensionalen Darstellung gelangt man dann durch eine Projektion dieses Ellipsoids, diese erfolgt bei der Universellen Transversalen Mercator (UTM) Projektion bezüglich eines Zylinders. Die daraus entstehende zweidimensionale Kartenprojektion ist in 60 Zonen der Breite 6° unterteilt, welche wiederum horizontal in Streifen der Länge 8° unterteilt sind.

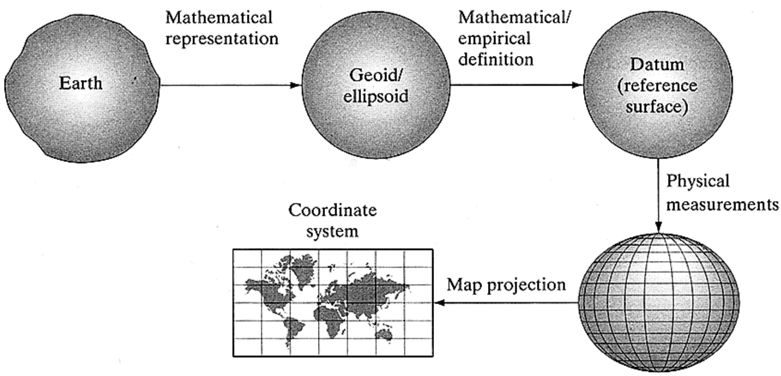


Abb. 4: Vorgehen bei der Georeferenzierung (Lo und Yeung S.36)

[4] http://www.dlr.de/rb/desktopdefault.aspx/tabid-6813/11188_read-6309/

Nun wird die Erarbeitung des Begriffes Skalarprodukt angebahnt. Dies geschieht unter Zuhilfenahme des Dynamischen Geometrie Systems (DGS) GeoGebra. Durch dieses ist auf eine sehr vereinfachte Art und Weise die zweckmäßige Nachbildung von an dieser Stelle notwendigen Funktionalitäten eines GIS möglich, die Verwendung eines Koordinatensystems, die Möglichkeit, Kartenmaterial als Bilddateien zu importieren und die Behandlung von Punkten als individuelle Objekte. Die Reduktion und Zurückführung auf ein eventuell bereits bekanntes Werkzeug ist hier ein Grund für dessen Verwendung anstelle eines GIS. Ein weiterer Grund ist die Möglichkeit, die in GeoGebra vorhandene Eingabezeile zu verwenden, um die mit Hilfe des Skalarproduktes berechneten orthogonalen Vektoren durch *Vektor*[*Anfangspunkt A, Endpunkt B*] und anschließend die entsprechenden parallelen Geraden durch *Gerade*[*Punkt, Richtungsvektor v*] generieren zu lassen und so zu kontrollieren.

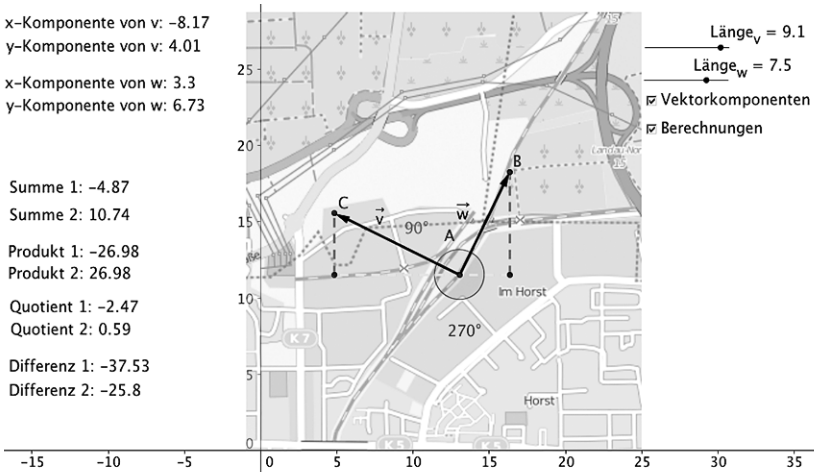


Abb. 5: GeoGebra-Simulation zur Betrachtung des Zusammenhangs der Komponenten zweier Vektoren

Um eine Grundidee davon zu erhalten, wie sich die Komponenten zweier zueinander orthogonaler Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ verhalten, wenn die Operationen $v_i + w_i$, $v_i - w_i$, $v_i : w_i$, $v_i \cdot w_i$, $i \in \{1,2\}$ darauf angewandt werden, sollen die Schülerinnen und Schüler diese Terme mit Hilfe eines GeoGebra-Appletts an (mindestens) vier selbstgewählten beliebigen Beispielen in einer ersten Aufgabenstellung betrachten. In einem darauf folgenden Auftrag sollen durch entsprechende Schieberegler vorgegebene zueinander orthogonale

Vektoren betrachtet und erkannt werden, dass (unter Vernachlässigung von Messungenauigkeiten) $v_1 \cdot w_1 = -v_2 \cdot w_2$ gilt. Diese Entdeckung wird im weiteren Verlauf wieder aufgegriffen.

Zurück zur Generierung eines Pufferbereiches um einen gegebenen Vektor respektive die entsprechenden Verbindungsstrecken gegebener Punkte durch Parallelenkonstruktionen. Entsprechend der Konstruktion einer Parallelen mit Zirkel und Lineal ist hier die Berechnung eines zum betrachteten Vektor orthogonalen Vektors erforderlich. Zunächst werden dazu ein durch einen Vektor repräsentierten Streckenabschnitt und ein dazu orthogonaler Vektor betrachtet, wobei durch einen dritten Vektor ein Vektordreieck gebildet wird. Die Schülerinnen und Schüler sollen mit dem Hinweis auf die Betrachtung von Flächen auf die folgende algebraische Beschreibung gelangen (in Anlehnung an Freudigmann, S.250 ff.).

$$\| \vec{z} \|^2 = \| \vec{w} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 \tag{1}$$

Diese Gleichung muss nach dem Satz des Pythagoras für das dargestellte rechtwinklige Dreieck gelten. Nun sollen beide Seiten dieser Gleichung separat aufbauend auf dem bereits bekannten Längen- bzw. Normbegriff betrachtet werden, was auf folgende Situation führt.

$$\begin{aligned} \| \vec{z} \|^2 = \| \vec{v} - \vec{w} \|^2 &= \left(\sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}\right)^2 \\ &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 \\ &= (v_1^2 - 2v_1 w_1 + w_1^2) + (v_2^2 - 2v_2 w_2 + w_2^2) \\ &= (v_1^2 + v_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) - 2(v_1 w_1 + v_2 w_2) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\| \vec{w} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} + \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = (w_1^2 + w_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) \tag{3}$$

Die in (1) dargestellte Gleichheit ist bei Betrachtung der Vektorlängen gemäß (2) und (3) also nur gültig, falls $2(v_1 w_1 + v_2 w_2) = 0$ bzw. äquivalent dazu

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0 \tag{*}$$

gilt. Der Term $(v_1 w_1 + v_2 w_2)$ wird dann zur Definition des (euklidischen) Skalarproduktes verwendet, wobei durch (*) ein Kriterium für die Orthogonalität (zunächst) zweidimensionaler Vektoren festgehalten wird.

Mit dem Orthogonalitätskriterium ist es möglich, einen zu einem gegebenen Vektor orthogonalen Vektor zu berechnen. Dies ist bei gegebenem Vektor $\vec{v}$ durch Betrachtung der Gleichung $(v_1 w_1 + v_2 w_2) = 0$ und Wahl von entweder w_1 oder w_2 auf theoretisch unendlich viele Möglichkeiten durchführbar. In einem Arbeitsauftrag werden die Schülerinnen und Schüler dazu aufgefordert darüber nachzudenken, wie eine Lösung „auf einen Blick“ schnell gefunden werden kann gemäß $w = (v_1, -v_2)$ oder $w = (-v_1, v_2)$. Vorbereitend auf die Berechnung von Parallelen mit Pufferabstand R zum jeweiligen Ausgangsvektor wird in einer Aufgabenstellung die Skalierung eines vorhandenen Vektors $\vec{w}$ auf die Länge R wiederholend thematisiert.

Darauf aufbauend sollen dann entsprechende Pufferzonen der Breite R erzeugt werden. Dazu sollen die für die Konstruktion mit Zirkel und Lineal erforderlichen Schritte aufgelistet und das hier notwendige rechnerische Vorgehen geplant werden.

Konstruktion	**Berechnung**
Konstruktion einer Lotgeraden	Berechnung eines zu $\vec{v}$ orthogonalen Vektors $\vec{w}$
Abtragen des Radius R auf der Lotgeraden	Skalierung von $\vec{w}$ auf die Länge R gemäß $\vec{w_s} = R \cdot \frac{\vec{w}}{\Vert\vec{w}\Vert}$
Schnittpunkt mit der Lotgeraden	Erzeugung der Geraden $g: \vec{x} = (\vec{a} + \vec{w_s}) + \vec{v} \cdot s$
Konstruktion einer weiteren Lotgeraden durch diesen Schnittpunkt	

Durch dieses Vorgehen können zu jedem gegebenen Streckenabschnitt entsprechende Parallelen berechnet werden. Dies soll an dieser Stelle nun auch explizit an einer in einem GeoGebra-Arbeitsblatt vorgegebenen Situation mit einem aus zwei Vektoren bestehenden Vektorzug durchgeführt werden. Interessant ist dabei die Behandlung der entstehenden „Knickstellen“, also an den gemeinsamen Punkten zweier benachbarter Vektoren. Wie in Abb. 1 dargestellt, sind zwei grundsätzliche Lösungen in Geo-Informations-Systemen verbreitet, hier soll die im oberen Teil dargestellte verwendet werden. Wie in der Abbildung zu erkennen ist, wird dabei an jeder Übergangsstelle einmal ein Schnittpunkt zweier Geraden erzeugt und einmal ein Kreisbogen. Die Schülerinnen und Schüler sollen an dem in Abbildung 6 veranschaulichten Modell aus zusammengehefteten zueinander kongruenten Rechteckstreifen überlegen, wie mit dem Anfangs- und dem Endpunkt des

Vektorzugs sowie mit den an den Übergangsstellen entstehenden „Lücken“ sinnvoll umgegangen werden kann. Sinnvoll heißt dabei, dass die Begrenzungslinie des entstehenden Puffers an jeder Stelle den gleichen Abstand zum betrachteten Vektorzug aufweisen soll, was wie in der Abbildung dargestellt durch Verwendung geeigneter Kreisbögen möglich ist.

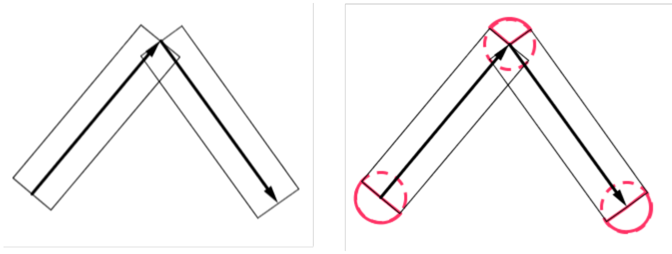


Abb. 6: Modell aus kongruenten Rechteckstreifen zur Betrachtung der Übergangsstellen

Die Entscheidung, wann welches Vorgehen anzuwenden ist, lässt sich durch folgende Regeln beschreiben:

- Erzeuge den Schnittpunkt der entsprechenden Geraden auf der „Seite“, auf welcher für den Winkel α_1 gilt: $0° < \alpha_1 < 180°$
- Erzeuge einen Kreisbogen zwischen entsprechenden Strecken der Trägergeraden auf der „Seite“, auf welcher für den Winkel α_2 gilt: $180° < \alpha_2 < 360°$.
- Wenn am Übergangspunkt ein gestreckter Winkel α vorhanden ist, dann verwende die parallelen Geraden für beide benachbarten Vektoren.

Es ist offensichtlich, dass zur Entscheidung hierbei der entsprechende Winkel zwischen benachbarten Vektoren berechnet werden muss. Bei der Betrachtung dieses Sachverhalts bietet es sich an, die zur Koordinatendarstellung des Skalarproduktes gleichberechtigte Winkeldarstellung zu erarbeiten und so einen wichtigen geometrischen Aspekt herauszustellen.

Wenn vom Winkel zwischen zwei Vektoren die Rede ist, dann stellt sich die Frage, welcher Winkel denn sinnvollerweise als solcher bezeichnet werden soll. Dazu arbeiten die Schülerinnen und Schüler mit der in Abbildung 7 dargestellten GeoGebra-Simulation, bei welcher zwei Vektoren in ihrer Richtung festgelegt entlang der entsprechenden Geraden verschoben werden können. Dabei soll erarbeitet werden, wie sinnvollerweise Winkel zwischen Vektoren gemessen werden, nämlich durch Wahl geeigneter Repräsentanten mit gemeinsamem Anfangspunkt, wobei als Winkel dann der kleinere der beiden möglichen festgelegt wird.

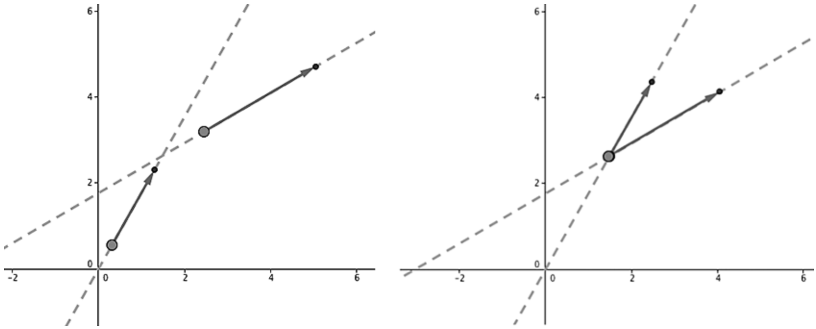


Abb. 7: Festlegung des Winkels zwischen zwei Vektoren

Zunächst wird den Schülerinnen und Schülern ein GeoGebra-Arbeitsblatt zur Verfügung gestellt, welches zwei Vektoren mit gemeinsamem Anfangspunkt und den eingeschlossenen Winkel zeigt. Außerdem sind die Werte der Terme $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ sowie des Winkels α dargestellt. Durch Variation der Vektoren soll erkannt werden, dass das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \overrightarrow{b}$ wesentlich mit dem Winkel α und mit $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ zusammenhängt. Dies wird im ersten Schritt an beliebigen und in einem anschließenden Arbeitsauftrag an durch Schieberegler vorgegebenen Situationen untersucht, in welchen die Vektoren orthogonal oder linear abhängig zueinander in Stellung gebracht werden.

Die Herleitung der Formel

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

für $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ erfolgt unter Verwendung des Cosinussatzes, wobei dies für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit demselben Anfangspunkt und eingeschlossenem Winkel α geschieht. Die für die Pufferberechnung verwendeten Vektoren beginnen nicht am selben Anfangspunkt, was für die Herleitung durch entsprechendes Verschieben erreicht wird (siehe Abbildung 8). Der für die Entscheidung zum Umgang mit der betrachteten Übergangsstelle gesuchte Winkel berechnet sich demnach durch $180° - \alpha$. In der Aufgabenstellung innerhalb der Lernumgebung wird die folgende Abbildung verwendet.

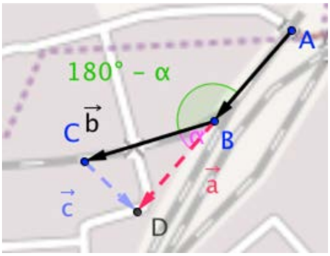


Abb. 8: Veranschaulichung zur Herleitung der Winkelformel für das Skalarprodukt

Der durch die Vektorlängen ausgedrückte Kosinussatz lautet mit Herleitung der gesuchten Formel wie folgt:

$$\| \vec{c} \|^2 = \| \vec{a} - \vec{b} \|^2 = \| \vec{a} \|^2 + \| \vec{b} \|^2 - 2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2}\right)^2 - 2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2$$

$$= -2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2$$

$$= -2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2a_1b_1 - 2a_2b_2 = -2 \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \, cos(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\| \vec{a} \| \| \vec{b} \|}$$

Da nicht erwartet werden kann, dass der Kosinussatz im Allgemeinen Gegenstand des Unterrichtes war, wird dieser an dieser Stelle genannt und den Schülerinnen und Schülern zudem die Möglichkeit gegeben, die Begründung in einer GeoGebra-Simulation Schritt für Schritt jeweils für spitze und für stumpfe Winkel nachzuvollziehen. Dies bietet darüber hinaus eine Verzahnung mit dem Unterricht in der Schule, da die vorhandenen Simulationen den Schülerinnen und Schülern dort vor Besuch des Mathematik-Labors zur Erarbeitung oder Wiederholung zur Verfügung gestellt werden können und somit ein erheblicher Mehraufwand für die betreffende Lehrkraft minimiert werden kann.

Ist nun zu entscheiden, welcher Schnittpunkt zur Erzeugung des Puffers verwendet werden soll, so müssen die beiden relevanten Schnittpunkte zuerst identifiziert werden. Da zur Trägergeraden jeder betrachteten Strecke zwei entsprechend parallele Geraden berechnet wurden, entstehen bei benachbarten Strecken vier Schnittpunkte. Bei Betrachtung der Situation auf einem Blatt Papier oder im DGS sind die beiden relevanten durch Hinschauen schnell erkannt. In einem muss dies allerdings rechnerisch gelöst werden, dass System kann schließlich nicht „hinschauen". Durch Arbeiten mit dem in Abbildung 9 dargestellten GeoGebra-Arbeitsblatt sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die folgenden beiden Schnittpunkte weiter betrachtet werden müssen (diese sind hier zur Veranschaulichung grün markiert):

- Der Schnittpunkt derjenigen zu den entsprechenden Trägergeraden Parallelen, welche jeweils einen Schnittpunkt mit der benachbarten Strecke besitzen.
- Der Schnittpunkt derjenigen zu den entsprechenden Trägergeraden Parallelen, welche jeweils keinen Schnittpunkt mit der benachbarten Strecke besitzen.

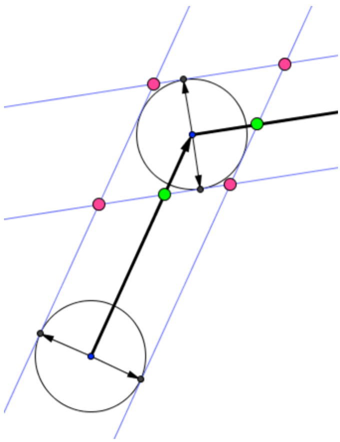


Abb. 9: Relevante Schnittpunkte

In der Lernumgebung wird von den Schülerinnen und Schülern gefordert, die zur Bestimmung der Schnittpunkte erforderlichen Schritte zu notieren und anhand eines Beispiels anzuwenden. Wie bei dem Ausfüllen obiger Tabelle, wird auch hier Wert darauf gelegt, das weitere Vorgehen zuerst zu planen und anschließend entsprechende Berechnungen auszuführen.

Die bisher angestellten Überlegungen und durchgeführten Berechnungen werden nun dazu verwendet, zu zwei gegebenen Streckenabschnitten in GeoGebra einen Puffer zu berechnen, in den Abbildungen 10 und 11 ist eine mögliche Lösung dargestellt. Der dabei auftretende Kreisbogen wird durch *Kreisbogen*[*Mittelpunkt M, Anfangspunkt A, Punkt B*] erzeugt.

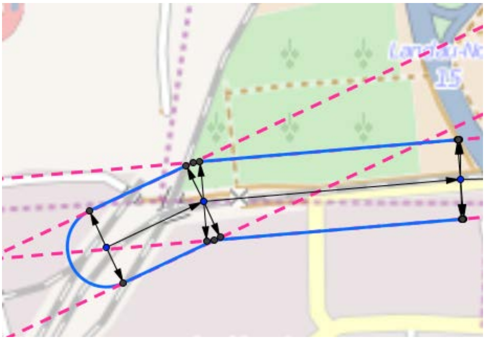


Abb. 10: In GeoGebra berechneter Puffer

Bereits bei den drei in der GeoGebra-Datei eingetragenen Koordinaten wird deutlich, dass das Prinzip der Erzeugung von entsprechenden Pufferzonen dort gut nachvollzogen werden kann, dass dies jedoch bei einer größeren Anzahl von Punkten mit hohem Aufwand verbunden ist. An dieser Stelle ließe sich mit der Erstellung eines Makros zur Erzeugung eines Puffers bezüglich einer gegebenen Strecke argumentieren, dies ist jedoch für die Arbeit mit authentischen Daten nur unzureichend sinnvoll. Es ist sinnvoller, die Arbeit von einem GIS erledigen zu lassen, da dort eben sehr einfach reales Datenmaterial geokodiert importiert werden, bezüglich der importierten Vektordaten ein Puffer generiert kann und die Resultate in Bezug zu Layern mit Siedlungs- und Vegetationsdaten gesetzt werden können.

Im Zusammenhang mit der Ausgangssituation wurde das Skalarprodukt sowohl in der Koordinatenform als auch in der Winkelform bislang nur für den zweidimensionalen Fall erarbeitet. Dieser Begriff soll aber, wie beispielsweise in Tietze (2000, S.185 ff.) aus unterschiedlichen Perspektiven beschrieben und auch in Schulbüchern (vergleiche beispielsweise Freudigmann 2009, S.250 ff.) vorhanden, hier und im weiteren Mathematikunterricht nicht darauf beschränkt bleiben, sondern auch für dreidimensionale Vektoren betrachtet werden. Aus diesem Grund werden in der Lernumgebung auf der einen Seite zwei orthogonal zueinander stehende und auf der anderen Seite zwei Vektoren mit beliebigem eingeschlossenen Winkel betrachtet und die entsprechenden Zusammenhänge durch Analogieschlüsse erarbeitet. Wie im Zweidimensionalen auch ist es hier förderlich, mit Anschaulichkeit zu arbeiten. Aus diesem Grund kommen an dieser Stelle gegenständliche Modelle eines dreidimensionalen Koordinatensystems in Kombination mit 3D-GeoGebra-Arbeitsblättern zum Einsatz, von denen dasjenige mit der orthogonalen Situation in Abbildung 11 dargestellt ist. Hierbei sind auf der rechten Seite die beiden zueinander orthogonalen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sowie der Verbindungsvektor $\vec{v} - \vec{w}$ im dreidimensionalen Koordinatensystem, links daneben die Schnittebene durch die Eckpunkte des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks dargestellt. Es besteht die Möglichkeit der Variation des Vektors $\vec{v}$ und orthogonal dazu von $\vec{w}$, wobei in jeder Konfiguration ein rechtwinkliges Dreieck in der Schnittebene vorhanden ist. Dies wird nun unter Verwendung der vorausgesetzten Fähigkeit zur Berechnung der Läge eines dreidimensionalen Vektors zur Herleitung des Orthogonalitätskriteriums genutzt. Eine analoge Vorgehensweise wird bei der Erarbeitung der Winkelgleichung für dreidimensionale Vektoren angewandt.

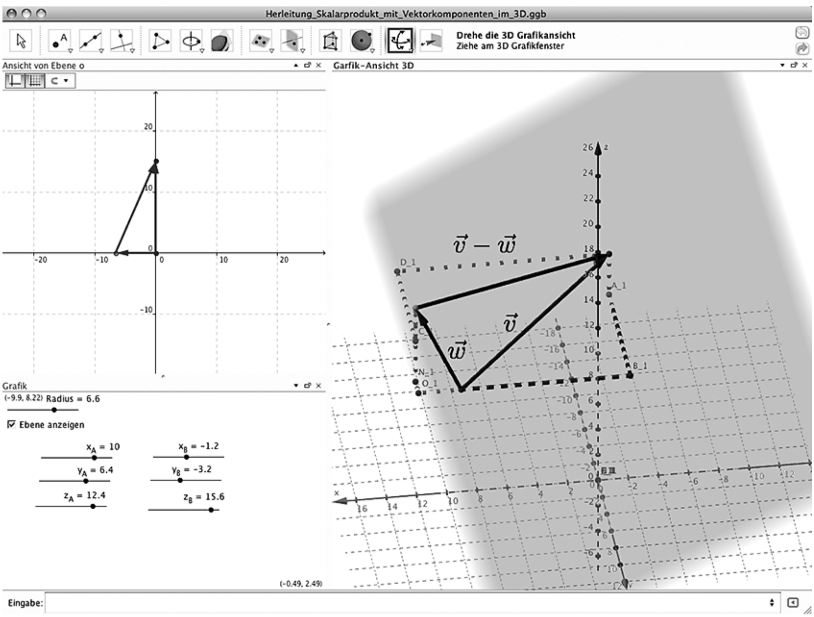


Abb. 11: GeoGebra-Arbeitsblatt zur Orthogonalität dreidimensionaler Vektoren

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel sollte ein möglicher vernetzter Einsatz eines GIS im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II innerhalb einer Lernumgebung vorgeschlagen werden. Dabei wurde betrachtet, welche Rolle ein solches System bei der Erarbeitung des Begriffes Skalarprodukt aus der Analytischen Geometrie spielen kann und in welchem Maße dabei eine Vernetzung mit dem eventuell bekannten Werkzeug DGS erfolgen kann.

Für die Verwendung eines DGS sprechen die direkte Verwendung von geometrischen Konstruktionen und Vektoren. Darüber hinaus besteht eine Kontrollmöglichkeit der durchgeführten Berechnungen durch Eingabe der berechneten Vektoren und Geraden in das System. Das GIS dient als reale Daten verwaltendes authentisches Werkzeug als Quelle interessanter Anwendungssituationen zur Erarbeitung innermathematischer Sachverhalte.

Neben diesen Vorteilen sind jedoch auch folgende Aspekte zu nennen, die eventuell zu Schwierigkeiten führen können. So ist beim Einsatz von Softwareprodukten im (Mathematik-)Unterricht immer eine Kosten-Nutzen-Analyse und Abschätzung des jeweiligen Aufwandes durchzuführen. Bei der Auswahl des zum unterrichtlichen Einsatz vorgeschlagenen System QGIS wurde bewusst auf eine möglichst wenig komplexe Benutzeroberfläche und eine weitgehend intuitive Verwendbarkeit geachtet. Allerdings kann es sicherlich dennoch zu Schwierigkeiten im Umgang mit dem System kommen. Dies kann aber auch als Chance zur Thematisierung der Komplexität authentischer Systeme genutzt werden.

Neben den hier dargestellten, sind noch weitere Möglichkeiten für den Einsatz eines GIS im Mathematikunterricht denkbar. Ein wesentlicher Anwendungsbereich ist wohl im Zusammenhang mit der Leitidee funktionaler Zusammenhang zu sehen. Zuordnungen spielen in einem GIS eine große Rolle. So können den dort repräsentierten Daten neben den entsprechenden Geokoordinaten eine ganze Reihe an Attributen zugeordnet werden. Dies können Messwerte an Datenpunkten, aber auch Attribute wie Landnutzungstyp bei Polygonen oder die Spannung bei Hochspannungsleitungen repräsentierenden Streckenzügen sein. GIS-Anwendungen sind darüber hinaus in vielen Fällen mit umfassenden statistischen Analysemethoden ausgestattet, es ließe sich darüber nachdenken, ob und in welchem Umfang eine Verwendung im Stochastikunterricht sinnvoll wäre.

Literatur

Appell, K.; Roth, J.; Weigand, H. (2008). Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors. In: Vásárhelyi, É. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, 2008. Münster: WTM-Verlag, S. 603-606.

Bill, R. (1996). Grundlagen der Geo-Informationssysteme. Analysen, Anwendungen und neue Entwicklungen. Band 2. Heidelberg: Wichmann.

Bolstad, P. (2002). GIS fundamentals – A first text on Geographic Information Systems. Minnesota: White Bear Lake.

Freudigmann H. et alt. (2009). Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien. Kursstufe Baden-Württemberg. Stuttgart: Klett.

Lo, C.P. et al. (2002). Concepts and techniques of geographic information systems. New Jersey: Prentice Hall Upper Saddle River.

Longley, P. (2005). Geographic information systems and sciences. New Jersey: Wiley & Sons.

Neteler, M. und Mitasova, H. (2008). Open source GIS: a GRASS GIS approach. Berlin: Springer.

Roth, J. (2010). Schülerlabor Mathematik − Praxisbezogene Lehramtsausbildung. In: Lindenmeier, A.; Ufer, St. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Münster: WTM-Verlag, S. 705-708.

Schmid A. (2005). Verständnis lehren, Handbuch Mathematik der gymnasialen Oberstufe. Stuttgart: Klett.

Tietze, U.P. et alt. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Band 2, Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Heidelberg: Vieweg.

Mittendrin, statt nur dabei – Bildbearbeitung und Computergrafik mit Excel

Michael Gieding

Zusammenfassung. Der Begriff Medienkompetenz ist in aller Munde. Zu einer solchen gehört auch ein grundlegendes Verständnis elementarer Begriffe der grafischen Datenverarbeitung, wie etwa Vektorgrafik und Pixelgrafik. Der vorliegende Beitrag zeigt auf, wie Schüler unter Verwendung von Tabellenkalkulationssystemen und weiterer Standardsoftware Bildformate erkunden können. Schon aufgrund der Verwendung von Koordinatensystemen und verschiedenen Zahlensystemen ergeben sich Bezüge zum Mathematik- und insbesondere auch zum Geometrieunterricht.

Informationstechnische Grundbildung, Bildformate, Mathematik

Täglich haben wir mit digitalen Grafiken, Bildern und entsprechenden Bild/Grafikformaten zu tun:

Seit April diesen Jahres liefern die Satelliten nur noch digitale Signale für das Fernsehen,

aus Cell Phones wurden Smart Phones, die über eine Digitalkamera verfügen und somit digitale Bilder aufnehmen können, die mittels sogenannter Apps unmittelbar mit dem Smart Phone weiter verarbeitet werden können,

in jeder Minute bringen tausende Nutzer von sozialen Netzwerken oder sogenannten Cloud Diensten mehrere tausend digitale Bilder in Umlauf.

Die Vermittlung einer informationstechnischen Grundbildung (ItG) ist integraler Bestandteil des Unterrichts in allen Schulformen der Sekundarstufe I. Zu einer in diesem Rahmen zu vermittelnden Medienkompetenz gehört nach unserer Auffassung ein grundlegendes Verständnis für Arbeits- und Wirkprinzipien der Verwendung bzw. Bearbeitung digitaler Bilder.

Zur ItG gehört auch die Heranführung der Schüler an die Nutzung eines Tabellenkalkulationssystems (TKS). Im Folgenden werden wir zeigen, wie grundlegende Ideen des Umgangs mit digitalen Bildern und Grafiken unter diesbezüglicher Verwendung eines TKS thematisiert werden können. In diesem Zusammenhang werden sich unmittelbar Aspekte der Anwendung mathematischen Schulstoffs ergeben.

Grundlegendes Wissen bezüglich einer Medienkompetenz: Pixelgrafik

Prinzipiell unterscheidet man zwischen den Formaten *Vektorgrafik* und *Pixelgrafik*.

Bilder, die mittels einer Digitalkamera aufgenommen oder mittels eines Scanners digitalisiert wurden, sind Pixelgrafiken. Pixel steht für Picture Element: Das Bild wird aus einzelnen Bildpunkten zusammengesetzt. Die Informationen zu jedem einzelnen Bildpunkt werden abgespeichert.

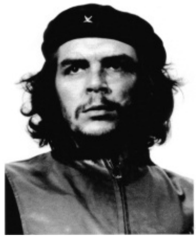


Abb. 1

Abbildung 1 zeigt eine digitalisierte Version des berühmten Bildes von Che Guevara des kubanischen Fotografen Alberto Korda. Im Original besteht das hier verwendete Digitalbild aus 1000×1321 Pixeln. Alberto Korda nahm das Bild mit einem Schwarzweißfilm auf. In der digitalisierten Variante bietet sich damit der Bildtyp *Graustufenbild* an: Für jedes Pixel steht einer von 256 Grauwerten zur Verfügung. Die Grauwerte sind indiziert, d.h. jeder zur Verfügung stehende Grauwert wird durch eine natürliche Zahl g mit $0 \leq g \leq 255$ kodiert.

Die Anzahl der zur Verfügung stehenden Grauwerte rührt daher, dass 8 Bit[1] zur Indizierung der Grauwerte verwendet werden. Die größte 8-stellige Binärzahl ist im Dezimalsystem die Zahl 255.

In Abbildung 2 wurde ein quadratischer Bereich des Bildes aus Abbildung 1 von 50×50 Pixeln (Stern auf der Mütze) vergrößert dargestellt.

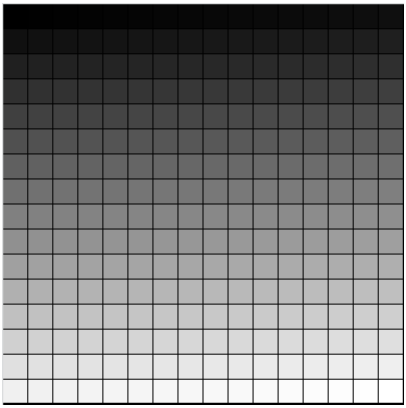
Abb. 2

Der Speicherbedarf für ein solches Graustufenbild, das aus 2500 Pixeln besteht, beträgt $2500 \cdot 8\ \text{Bit} = 20.000\ \text{Bit}$ bzw. $2500\ \text{Byte}$. Bei größeren Bil-

[1] 8 Bit sind auf vielen Rechnersystemen die kleinste adressierbare Menge von Informationen.

dern verwendet man die Einheit Kilobyte (kB) bzw. Megabyte (MB). Es gilt $1\text{ kB} = 2^{10}\text{ Byte} = 1024\text{ Byte}$ und $1\text{ MB} = 2^{20}\text{Byte} = 1048576\text{ Byte}$.[2]

Abbildung 3 zeigt eine Farbtabelle für die zur Verfügung stehenden Grauwerte mit den zugehörigen Zahlencodes.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

Abb. 3: Graustufentabelle und die zugehören Zahlenwerte im Dezimalsystem.

Mit den für Graustufenbilder veranschlagten 8 Bit lassen sich natürlich auch Farben indizieren. In diesem Fall stehen 256 verschiedene Farben zur Gestaltung des Bildes zur Verfügung. Für verschiedene Anwendungen wurden verschiedene Farbtabellen entwickelt. Viele Grafikprogramme erlauben dem User die Generierung eigener Farbtabellen.

Ein typisches Grafikformat, das nur die Verwendung von inzidierten Farben zulässt, ist das Graphics Interchange Format (GIF). Heute hat dieses Format an Bedeutung verloren, da moderne Breitbandverbindungen die schnelle Übertragung größerer Datenmengen erlauben. Üblich sind Bilder mit einer Farbtiefe von 16.777.216 Farben. Dabei werden die Farben aus drei Grundfarben zusammengesetzt. Bezüglich dieser Zusammensetzung unterscheidet man die additive und die subtraktive Farbmischung.

[2] Die Unterschiede zur Verwendung der Präfixe Kilo und Mega bei den dezimalen SI-Einheiten erklärt sich durch die Verwendung der Basis 2 bei den Informationseinheiten. Es gab viele Versuche, die Präfixe der Informationseinheiten den üblichen dezimalen Präfixen anzupassen. In der Praxis hat sich das aber nicht durchgesetzt.

Die additive Farbmischung wird für Ausgabegeräte verwendet, die Bilder generieren, die selbst leuchtend sind. Als Beispiel seien Monitore genannt.

Die subtraktive Farbmischung wird für Bilder verwendet, die nicht selbst leuchtend sind. Ein Bild, das etwa mittels eines Druckers generiert wurde, leuchtet nicht selbst. Die durch den Drucker auf das Papier aufgetragenen Farbpigmente filtern aus dem einfallenden weißen Licht bestimmte Farbspektren und reflektieren damit nur bestimme Farben zum menschlichen Auge hin. In der subtraktiven Farbmischung werden die Farben aus den Grundfarben Cyan, Yellow und Magenta gemischt. Man spricht vom *CYMK-Modell*. Das K steht dabei für die Farbe Schwarz. Wir werden hier nicht genauer auf die subtraktive Farbmischung eingehen.

Für die additive Farbmischung ist das *RGB-Modell* üblich. Aus den Grundfarben Rot, Grün und Blau werden alle Farben zusammengesetzt. Für jede der Farben stehen 256 Abstufungen zur Verfügung: 256 Rottöne, 256 Grüntöne und 256 Blautöne. Damit ergibt sich die Darstellung von 256^3 Farben. Die 256 verschiedenen Abstufungen der Grundfarben erklären sich wieder durch die Verwendung von 8 Bit zur Kodierung der einzelnen Farbtöne.

Zur Kodierung von Farbwerten werden in der Regel keine Dezimalzahlen sondern Hexadezimalzahlen verwendet. Die Hexadezimalzahlen für die einzelnen Farbkanäle werden in der Reihenfolge Rot, Grün, Blau aufgezählt. Erfolgt die Farbinformation mittels Hexadezimalzahlen wird dieses in der Regel syntaktisch durch das Zeichen # verdeutlicht. Die Farbinformation für ein Pixel in reinem Rot würde dann als #FF0000 geschrieben werden. Die Zahl FF steht damit für den Rotwert, welcher im Dezimalsystem als 255 geschrieben werden würde. Grün und Blau werden beide durch 00 kodiert, was auch im Dezimalsystem der Zahl 0 entspricht.

Grundlegendes Wissen bezüglich einer Medienkompetenz: Vektorgrafik

Pixelgrafiken eignen sich für fotorealistische Bilder, wobei der Fotorealismus vor allem dann zum Tragen kommt, wenn nicht inzidierte Farben sondern RGB-Farben verwendet werden. Den Fotorealismus erkauft man sich durch einen hohen Speicherbedarf der Bilddateien. Ein RGB-Bild mit 8 Bit Farbtiefe pro Farbkanal, das die Abmessungen 1024 Pixel × 768 Pixel hat, benötigt z.B. für die Abspeicherung der Pixelfarbwerte einen Speicherplatz von $1024 \times 768 \times 3 \times 8$ Bit $= 2304$ kB.[3]

Insbesondere bei Diagrammen oder auch bei Zeichnungen im Stile von Comics bedarf es des Fotorealismus nicht. In derartigen Fällen ist es häufig günstiger, die Bildinformationen in sogenannten Vektorgrafikformaten wie etwa WMF, EMF oder SVG abzuspeichern.

Die Idee der Vektorgrafik lässt sich recht gut am Beispiel von Lissajousfiguren darstellen. Lissajousfiguren entstehen bei der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit zueinander senkrechten Schwingungsrichtungen. Traditionell werden Lissajousfiguren zur Bestimmung unbekannter elektromagnetischer Schwingungen verwendet. An die *y*-Platten eines Oszillografen wird eine Schwingung gelegt, deren Frequenz bekannt ist und die variierbar ist. An die *x*-Platten legt man die unbekannte Schwingung. Man variiert die Schwingung mit der bekannten Frequenz derart, dass gewisse regelmäßige Figuren entstehen. Aus diesen kann man ablesen, welches Verhältnis die Frequenzen der beiden Schwingungen zueinander haben und damit die Frequenz der unbekannten Schwingung bestimmen.

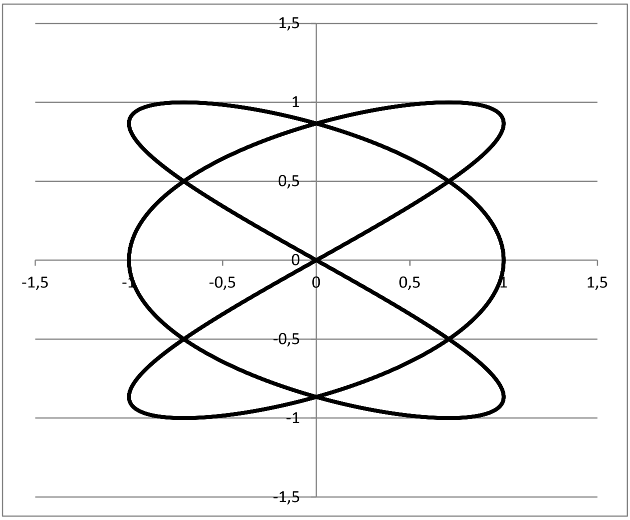


Abb. 4: Lissajousfigur

[3] Dies gilt, wenn das Bild keiner Kompression unterworfen wurde.

Abbildung 4 zeigt eine Lissajousfigur, bei der sich die Frequenz f_y der Schwingung in y-Richtung zur Frequenz f_x der Schwingung in x-Richtung wie 3 : 2 verhält. Bei der Generierung der Figur aus Abb. 4 mittels eines echten Kathodenstrahloszillographen würde der Kathodenstrahl wirklich nur die Figur selbst beschreiben und damit die Idee der Vektorgrafik verdeutlichen. Letztlich werden die Bilder dadurch beschrieben, dass mathematische Beschreibungen von Kurvenstücken abgespeichert werden. Zusätzlich können Fülloptionen der geschlossenen Bereiche abgespeichert werden.

Tabellenkalkulation als Werkzeug zur Bildbearbeitung?

Grundlegende Arbeitsprinzipien der Verwendung von TKS sind ein integraler Bestandteil einer ItG. Bezüge von TKS zur grafischen Datenverarbeitung mag man zunächst eher nicht vermuten. Maximal denkt man an die Generierung von Schaubildern, wie etwa Kreis- und Säulendiagrammen.

Oldenburg verdeutlicht Schülern mathematische Hintergründe der digitalen Bildbearbeitung mittels Java Applets. Den Schülern werden entsprechende Applets zur Verfügung gestellt, mit denen sie experimentieren (Abb. 5).

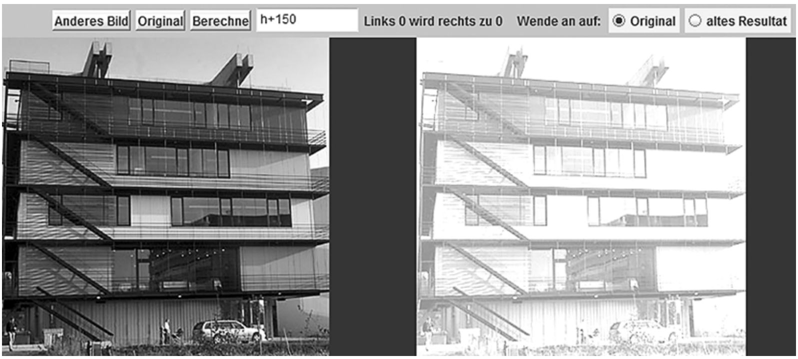


Abb. 5: Manipulation der Bildhelligkeit mit einem Applet von Oldenburg

Mit der Verwendung eines TKS zur Untersuchung von Fragen der grafischen Datenverarbeitung wollen wir im Sinne der Überschrift dieses Artikels die Schüler noch stärker selbst tätig werden lassen. Während die Java Applets von Oldenburg Blackboxes sind, werden die Schüler bei der Verwendung von TKS stärker in die Prozesse integriert, die in den Blackboxes ablaufen.

Möglich wird dieses dadurch, dass TKS letztlich vollwertige Programmierumgebungen sind. Aus prinzipieller Sicht kann jedes algorithmisch lösbare Problem mittels TKS gelöst werden: Jeder Algorithmus lässt sich aus den Grundstrukturen *Sequenz*, *Verzweigung* und *Wiederholung* zusammensetzen. Alle drei Grundstrukturen findet man in TKS (Gieding, 2003), wobei insbesondere die Wiederholung auf eine Mensch-Maschine-Symbiose als Prozessor abzielt. Was das bedeutet erläutern wir am Beispiel der Generierung eines regelmäßigen Sechsecks mittels des TKS *Excel*.

Zur grafischen Darstellung des regelmäßigen Sechsecks stellt uns Excel sogenannte Punktdiagramme zur Verfügung. In der Tabelle selbst werden die Koordinaten der Eckpunkte generiert. Dem Punktdiagramm liegt ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, in welches die Eckpunkte des Sechsecks eingetragen und ggf. durch Strecken verbunden werden.

Die folgende Excel Tabelle liefert die Nummern und die Koordinaten der Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks.

Punkt	x	y
0	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)
=REST(Z(-1)S+1;6)	=COS(ZS(-1)*PI()/3)	=SIN(ZS(-2)*PI()/3)

Abb. 6: Formelebene (Z1S1 Bezugsart) einer Excel Tabelle für ein 6-Eck

Der Kopf und die dann folgenden beiden Zeilen werden zunächst einzeln generiert. Die dann noch fehlenden 5 Zeilen sind identisch zur dritten Zeile. Zur effizienten Generierung der fehlenden Zeilen stellen TKS dem User spezielle Methoden des Kopierens und Einfügens zur Verfügung. Im vorliegenden Fall (Abb. 6) wurde das Kopieren und Einfügen per Drag and Drop erledigt. Das was etwa in einem entsprechenden Java Applet in einer Schleife automatisch abläuft, bedarf im Rahmen der Nutzung eines TKS des Handanlegens eines Users. Aus Performancegründen mag dieser Umstand ggf. nicht für die Nutzung eines TKS sprechen. Aus didaktischer Sicht ist das eigene Eingreifen des Users als Enaktivität zu begrüßen: *mittendrinn statt nur dabei.*

Die Idee der Nutzung von TKS für die Vermittlung eines grundlegenden Verständnisses für Fragen der grafischen Datenverarbeitung besteht letztlich darin, Bilddaten mittels Kalkulationsdateien abzubilden und zu manipulieren. Die Visualisierung von Vektorgrafiken erfolgt dann mittels Punktdiagrammen. Im Falle von Pixelgrafiken liegt es nahe, ausgewählte Zellen von Kalkulationsblättern die Rolle der Pixel übernehmen zu lassen. Je nach zugehörigem Farbwert, wird der Hintergrund der Zelle eingefärbt. Verkleinert man alle Zellen hinreichend, ist das ursprüngliche Bild wieder zu erkennen. Schlussendlich hat der Schüler mittels Excel das Bild neu generiert.

Im Folgenden zeigen wir exemplarisch die Prozesse der Generierung von Vektor- und Pixelgrafiken mittels TKS. Zur Erfassung von Bilddaten bereits existierender Grafiken verwenden die Schüler weitere Standardsoftware, die Gegenstand eines jeden Unterrichts in ItG ist.

Generierung von Vektorgrafiken mittels Excel und weiterer Software

Der Kinofilm *A Scanner Darcly* (2006) von Regisseur Richard Linklater und Produzent George Clooney wurde zunächst konventionell mit Schauspielern (als Liebespaar: Keanu Reeves und Winona Ryder) gedreht. Der Film wurde mit Digitalkameras aufgenommen und danach mit Computertechnik ins Comicformat adaptiert.

Wir greifen die Thematik mit den Schülern auf und lassen zunächst Pixelgrafiken in Vektorpfade umwandeln. Die Pixelgrafik aus Abbildung 1 wurde mittels des Vektorisierungsprogramms Potrace in die Vektorgrafik der Abbildung 7 transformiert. Potrace wird in dem (freien) Vektorgrafikprogramm Inkscape verwendet.

Abb. 7

Zur grundlegenden Verdeutlichung, was Vektorgrafik eigentlich bedeutet, lassen wir die Schüler ein Bild per Hand vektorisieren. Dazu importieren sie das entsprechende Bild in die Zeichenfläche einer leeren Datei eines Vektorgrafikprogramms wie etwa Inkscape. Mit den entsprechenden Werkzeugen zur Generierung von Pfaden (etwa Freihandlinienzeichner) generieren die Schüler nun Umrisspfade. Ihre Tätigkeit entspricht dabei dem *Abpausen* mittels Vorlage, Stift und Transparentpapier.[4] Die Daten der Umrisspfade sind in der nun generierten Vektorgrafikdatei abgespeichert. Um sie für die Schüler sichtbar zu machen, speichern wir die Datei in einem Postscriptformat. Postscript ist eine Druckerbeschreibungssprache. Postscriptdateien beinhalten alle Daten, die ein Drucker benötigt, um aus einer Druckseitenbeschreibung ein Blatt Papier adäquat zu bedrucken. Der Autor hat alle hier beschriebenen Verfahren mit Studierenden ausprobiert. Im Rahmen dieser Tests verwendeten wir das spezielle Postscriptformat EPS. Was die Umrisspfade angeht, müssten eigentlich die Koordinaten bestimmter Stützpunkte in der EPS-Datei enthalten sein. Die Schüler überprüfen diese Vermutung, indem sie ihre Postscriptdatei mit einem Textverarbeitungsprogramm öffnen. Textverarbeitungsprogramme lesen Seitenbeschreibungen in verschiedenen Postscriptformaten und stellen diese als Texte dar. In diesen Texten findet man Folgen von Koordinatenwerten, die eigentlich nichts anderes als die Stützpunktkoordinaten unserer Vektorpfade sein können. Die Schüler filtern diese Werte aus den Dateien heraus und manipulieren sie dahingehend, dass sie mit Excel weiter verarbeitet werden können. So sind z.B. Dezimalpunkte durch Kommata zu ersetzen.

Abb. 8 zeigt einige Vektorpfade, wie sie beim Nachzeichnen des Bildes von Che Guevara entstehen könnten. Aus der entsprechenden Postscriptdatei wurden Koordinatenwerte entnommen, bearbeitet und in Excel eingefügt, um sie dort mittels eines Punktdiagramms wieder sichtbar zu machen.

---

[4] Der Autor dieses Artikels wuchs in der DDR in Ostberlin auf. 1973 fanden die Weltfestspiele der Jugend und Studenten in Ostberlin statt. Auch wenn es in der DDR keine Poster mit dem Konterfei von Che Guevara zu kaufen gab (außer ein paar Filmplakaten gab es überhaupt keine Poster zu kaufen), waren Bilder von Che Guevara während der Weltfestspiele 1973 allgegenwärtig. Der Autor (damals 18 Jahre alt) fand das Konterfei von Che, wie etwa in Abbildung 7 zu sehen, am Fuße des Ostberliner Fernsehturms gesprayt. Mit Transparentpapier und Bleistift machte er sich auf den Weg um sein eigenes Poster von Che abzupausen ... .

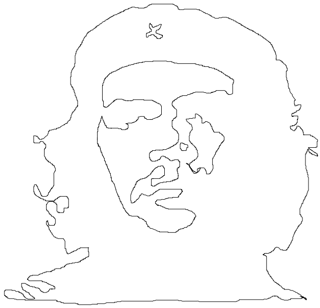


Abb. 8: Vektorpfade

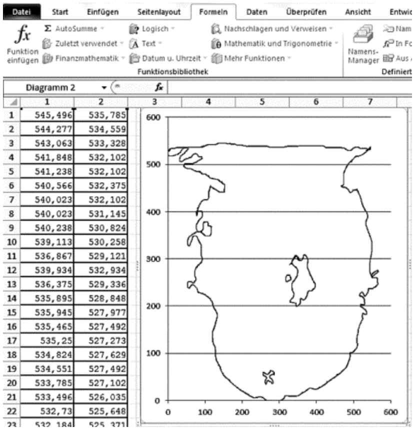


Abb. 9: einige Pfade in Excel

Im Exeldiagramm erkennen wir die Realität wieder: Unser Drucker druckt die Seiten „auf dem Kopf“. Das sollte Anlass sein, die nach Excel adaptierten Vektorgrafikpfade geometrischen Transformationen zu unterwerfen.

Generierung von Pixelgrafiken mittels Excel und weiterer Software

Postscriptdateien enthalten also alle Daten, die ein Drucker braucht, um digitale Seiten auf Papierseiten abzubilden. Da Drucker Pixelgrafiken drucken können, müssten in entsprechenden Postscriptdateien auch die Farbinformationen von Pixeldateien wieder zu finden sein. Überprüfen können wir das, indem wir Bilddateien im Format PNG oder JPG etwa in das freie Bildbearbeitungssystem GIMP laden und dann als EPS-Datei abspeichern. Jetzt wissen wir schon wie es weiter geht: Die Postscriptdatei wird in Word oder einem anderen Textverarbeitungssystem geöffnet, die entscheidenden Farbinformationen herausgefiltert und für den Gebrauch in Excel transformiert. Dies hört sich leicht an, ist aber nicht ganz so einfach wie das Finden der Stützpunktkoordinaten von Vektorpfaden in EPS-Dateien.

Es bedarf eines Problemlöseprozesses. Die Frage lautet, wie und wo sind in einer EPS-Datei die Farbinformationen von Pixelbildern abgespeichert. Als Problemlösestrategie bietet sich die Reduktion auf einfachere Probleme an. Einfacher als die Untersuchung einer 1080×768 Pixeldatei ist die Untersuchung einer Datei, die aus 10×10 Pixeln besteht. Einfacher als die Untersuchung einer Datei mit RGB-Farbwerten ist die Untersuchung einer

Graustufendatei. Schließlich ist es einfacher, die Grauwerte in der EPS-Datei zu entdecken, wenn man Dateien mit gewissen regelmäßigen Mustern verwendet. Letztere müssen sich in den abgespeicherten Graustufenwerten widerspiegeln.

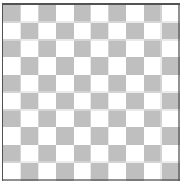


Abb. 10: Das „Testbild“ (vergrößert)

Abbildung 10 zeigt ein mögliches Testbild. Für diesen Artikel wurde es vergrößert. Original hat es die Größe von 10×10 Pixeln. Leicht erkennt man das Muster Grauwert BE, Grauwert FF (Weiß) in der EPS-Datei wieder:

```
%%BeginBinary:        221
beginimage
        BEFFBEFFBEFFBEFFBEFF
        FFBEFFBEFFBEFFBEFFBE
        BEFFBEFFBEFFBEFFBEFF
        FFBEFFBEFFBEFFBEFFBE
        BEFFBEFFBEFFBEFFBEFF
        FFBEFFBEFFBEFFBEFFBE
        BEFFBEFFBEFFBEFFBEFF
        FFBEFFBEFFBEFFBEFFBE
        BEFFBEFFBEFFBEFFBEFF
        FFBEFFBEFFBEFFBEFFBE
%%EndBinary
```

Abb. 11: Die Graustufenwerte für das Testbild aus Abbildung 10

Zeile für Zeile wurden von links nach rechts die Graustufenwerte der Zellen abgespeichert. Die Übertragung der einzelnen Graustufenwerte in die zugehörigen Zellen führt man am günstigsten mit Excel durch. Die Zeichenfolge der Grauwerte wird als ein einziger String etwa in die erste Zelle des Kalkulationsblattes kopiert. Dann generiert man sich die Inhalte der einzelnen Zellen, die letztlich das Bild darstellen werden. Der Reihe nach muss jede Zelle zwei aufeinanderfolgende Ziffern im Hexadezimalsystem aufnehmen. Hierzu liest man mit der Textfunktion *Teil* aus dem String der ersten Zelle die beiden zugehörigen Ziffern aus:

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
0	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF
20	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE
40	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF
60	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE
80	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF
100	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE
120	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF
140	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE
160	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF
180	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE	FF	BE

Abb. 12: Die Graustufenwerte werden in die zugehörigen Zellen übertragen.

Die entsprechende Formel lautet: =TEIL(Z1S1;ZS1+Z4S;2), wobei in Z1S1 die Zeichenkette mit den Graustufenwerten steht. Die grau unterlegten Zellen helfen die Textfunktion *Teil* effizient anzuwenden. Ihre Inhalte erklären sich sicherlich selbst.

Die Zellen, die letztlich unser Bild darstellen sollen, werden nun mittels bedingter Formatierung entsprechend ihres Inhaltes eingefärbt. Hierzu müssen die Hexadezimalzahlen, welche die entsprechenden Grauwerte darstellen, in Zahlen aus dem Dezimalsystem umgerechnet werden.

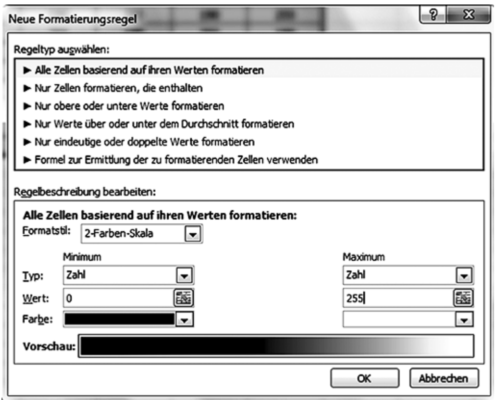


Abb. 13: Einstellungen der bedingten Formatierung

Die folgende Abbildung zeigt die Tabelle aus Abbildung 12 nach den entsprechenden Transformationen.

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
0	190	255	190	255	190	255	190	255	190	255
20	255	190	255	190	255	190	255	190	255	190
40	190	255	190	255	190	255	190	255	190	255
60	255	190	255	190	255	190	255	190	255	190
80	190	255	190	255	190	255	190	255	190	255
100	255	190	255	190	255	190	255	190	255	190
120	190	255	190	255	190	255	190	255	190	255
140	255	190	255	190	255	190	255	190	255	190
160	190	255	190	255	190	255	190	255	190	255
180	255	190	255	190	255	190	255	190	255	190

Abb. 14: Die Tabelle aus Abb. 12 nach bedingter Formatierung

Für den Gesamteindruck des Bildes sind die Zahlen in den Zellen jetzt eher unerwünscht. In Excel kann man sie ausblenden, indem man das Zahlenformat der Zellen auf *benutzerdefiniert* einstellt und diesbezüglich drei Semikola hintereinander eingibt.

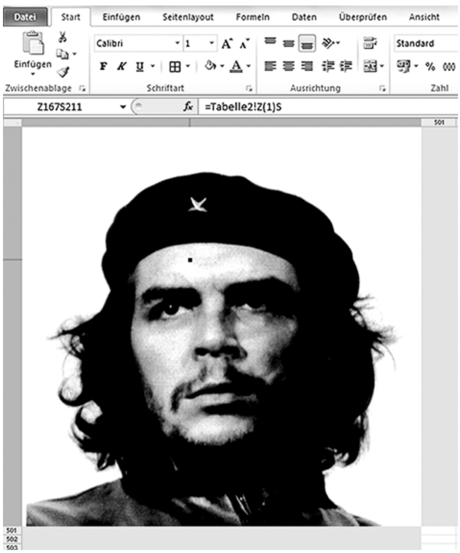


Abb. 15: Das berühmte Bild von Che Guevara als Exceldatei

Nach diesen Erfolgen ist der Weg für größere Bilddateien (Abb. 15) geebnet. Man muss lediglich beachten, dass die Anzahl der Zeichen, die eine einzelne Excelzelle aufnehmen kann, begrenzt ist. Sie liegt bei 32767 Zeichen. Die Zeichenkette für die Farbwerte muss für große Dateien entsprechend auf mehrere Zellen verteilt werden.

Nachdem die Farbinformationen in Excel importiert wurden, können die Schüler mit Manipulationen entsprechend Abbildung 5 grundlegende Ideen der Bildbearbeitung nachvollziehen.

Literatur

Gieding, M.: „Virtueller Globus“ Ein fächerübergreifendes Projekt unter Nutzung von Standardsoftware für die Sekundarstufe I. In: Schönbeck, J. (Hrsg.) Facetten der Mathematikdidaktik, Deutscher Studien Verlag, Weinheim, 1997.

Gieding, M.: „Programming by Example“ Überlegungen zu Grundlagen einer Didaktik der Tabellenkalkulation. In: mathematica didactica 26 (2003), Band 2, S. 42-71.

Oldenburg, R.: „Die Mathematik der Bildverarbeitung.“ In: Istron Bd. 9, Hildesheim, 2006.

Materialien im Internet

Seite zur Bildbearbeitung von R. Oldenburg:
http://www.math.uni-frankfurt.de/~oldenbur/webBV/index.html

GIMP: http://www.gimp.org/

Inkscape: http://inkscape.org/

Anwendungen und weitere Vernetzungen in Diesterwegs Raumlehre

Antonia Zeimetz

Zusammenfassung. Wird Vernetzung als Aufzeigen und Herstellen von Verbindungen zwischen Gebieten, Inhalten, Ideen, Begriffen sowie Welt und Mathematik verstanden[1], so finden sich Spuren vernetzenden Mathematikunterrichts lange bevor die Bezeichnung auftaucht. Im folgenden Beitrag versuche ich diesen in Diesterwegs Werken zur Raumlehre zu folgen und werfe dabei insbesondere ein Augenmerk auf Anwendungen, die hier als eine spezielle Art der Vernetzung verstanden werden, der beidseitigen Verbindung zwischen Welt und Mathematik. Da Anwendungen zu Beginn des 19. Jahrhunderts vornehmlich im Rechenunterricht und nicht in der Raumlehre geschätzt wurden, markiert der Einbezug dieser in den Unterricht ein Abweichen von ausgetrampelten euklidischen Pfaden sowie Ziele und Visionen seit 1820.

Die Quellen

Neben der „Raumlehre oder Geometrie, nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik“, einem Lehrbuch für Lernende, welches wegen zahlreicher erläuternder didaktischer Kommentare für die Gestaltung des Unterrichts auch an Lehrpersonen gerichtet ist, ziehe ich bei meiner Analyse den Lehrendenbegleitband „Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen-, Größen und räumlichen Verbindungslehre“ heran. Darüber hinaus verwende ich Aufsätze von und Rezensionen über Diesterweg, die vorwiegend in den „Rheinischen Blättern für Erziehung und Unterricht“ erschienen und somit an interessierte Lehrpersonen gerichtet sind.

Erste Schritte „Los von Euklid“

Diesterwegs Elementarisierung der Raumlehre entwickelte sich aus grundlegender, zunächst primär die Methode betreffender Kritik an der zu Beginn des 19. Jahrhunderts verbreiteten Art Geometrie an Schulen zu betreiben.

---

[1] Hier verwende ich diese naive Definition von Vernetzung – engere, voraussetzungsvollere Definitionen von Vernetzung (vgl. Hischer 2009) verlangen neben dem Aufzeigen bzw. Herstellen von Verbindungen zweier Knoten durch jeweils eine Kante weitere Funktionen wie die Reflexion vorhandener Netze. Zwar ist die Reflexion von Vernetzungen Gegenstand des Artikel, nicht aber von Diesterwegs Lehrbüchern. Da Aufgaben zwar das Potential für mögliche zusätzliche Funktionen aufweisen können, jedoch die unterrichtliche Umsetzung wesentlich über die Beachtung dieser Anforderungen entscheidet, wähle ich jene Arbeitsdefinition.

Zunächst werden methodische Neuerungen wie der Einbezug der Anschauung – als Mittel der Erkenntnis und als Erweiterung der Argumentationsbasis – angestrebt.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, dass zu Diesterwegs Lebzeiten keinesfalls Konsens über den gewünschten Grad der Gegenständlichkeit der Anschauung im Erkenntnisprozess bestand. Kontrastierend zu Diesterwegs Vorstellungen veröffentlichten vom enormen Intellektualismus und Mentalismus geprägte Autoren zu Beginn des 19. Jahrhunderts, d.h. zu der Zeit als in der Fachwissenschaft die Reflexion des kognitiven Wandels auf das Problem der Anschaulichkeit des mathematischen Wissens anhielt, Geometrie-Lehrbücher, die zur Förderung der als höherwertig eingestuften inneren Anschauung bewusst auf Figuren verzichteten (vgl. Jahnke 1989, S. 36 ff.).

Diesterweg schreibt die Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Anschauungsvermögen fort und ordnet diesen Typen jeweils verschiedene Funktionen zu:

> In der Raumlehre werden die Körper der genauesten äußeren Betrachtung unterworfen. Alles dem Raume angehörige Wahrnehmbare wird aufgesucht, gezählt, benannt. (Diesterweg 1828, S. X)

Hier wird ein Begriff als gegeben angesehen, an dieser Stelle durch Körpermodelle repräsentiert, und diesem sein Bezeichner zugeordnet (vgl. Lambert 2003, S. 91 f.). Dass die äußeren Anschauungen am Anfang stehen, begründet der Autor mit der Entwicklung des Menschen, welche vom Sinnlichen zum Übersinnlichen bzw. vom Wahrgenommenen zum Gedachten fortschreitet (vgl. Diesterweg 1828, S. XVII). An die Betrachtungen anschließend bilde der Verstand durch Abstraktion aus klaren Anschauungen die Begriffe, welche zum Aufstellen von Schlussreihen verwendet werden können (vgl. Diesterweg 1828, S. XII), d.h. zum Begriff gehört neben prototypischen Beispielen auch eine logische Definition. Zusätzlich zu der begriffsbildenden Funktion veranlasse die Raumlehre eine Übung des Augenmaßes (vgl. Diesterweg 1828, S. X), so dass eine Voraussetzung für das Erkennen von Zusammenhängen geschaffen wird.

> [Die Raumlehre] sichert ihre Wahrheiten nicht bloß durch unumstößliche Beweise, sondern sie weiset sie auch in der inneren Anschauung nach, und erleichtert beide Arten des Erkennens durch äußere Anschauung in zweckmäßigen Figuren und Bildern. (Diesterweg 1828, S. XIII)

Dem inneren Anschauungsvermögen wird der Raum und alle Raumobjekte als a priori vorausgesetzt, deren Vorstellungen jedoch nur mit Hilfe der äußeren Gegenstände geweckt werden können. Durch gedankliches Operieren von Linien, Winkeln und Figuren, werden nun mittels des inneren Anschauungsvermögens Zusammenhänge zwischen diesen Objekten erkannt, welche sowohl durch äußere Anschauung als auch durch logisches Schließen geprüft werden können, so dass aufgrund zweierlei möglicher Art der Probe das höchste Maß an Klarheit einer Aussage erreicht werde (vgl. Diesterweg 1828, S. X f.). Auch wenn Diesterweg die innere Anschauung insofern als höherwertig ansieht, dass er die Ausbildung dieser Art als ein Ziel des Raumlehreunterrichts definiert, so wertschätzt er die äußere Anschauung als Voraussetzung ersterer sowie eines selbsttätigen Unterrichts, bei dem Schülerinnen und Schüler zum Auffindung von Zusammenhängen angehalten sind (vgl. Diesterweg 1843, S. IV f.).

Ob tatsächlich Schülerinnen und Schüler Geometrie lernen sollten, wurde zu Beginn des 19. Jahrhunderts kontrovers diskutiert. Diesterweg sieht in der Raumlehre keinen für Mädchen geeigneten Lerngegenstand (Diesterweg 1828; zit. n. Deiters et al. 1956 S. 265). Im Sinne einer ausgewogenen Berichterstattung räumt er allerdings in seinem Artikel „Über die Raumlehre (Geometrie) als Gegenstand in Volks- und Mittelschulen und in den unteren und mittleren Klassen des Gymnasiums“, ihm widersprechenden Einschätzungen Platz ein.

> Ein Freund, Kenner der Sache und Selbsterzieher seiner Kinder, dem ich die Raumlehre zugeschickt hatte, schrieb mir in Beziehung auf obige Ansicht: „Meinen vier Mädchen mundet sie (die Raumlehre) um so besser, da Sie dieselbe einem Geschlechte verboten, das bekanntlich Früchte verbotener Bäume anderen vorzieht. Was fällt Ihnen ein es von dieser Erbschaft auszuschließen? Da ist RAMSAUER viel galanter: Auch habe ich im Jahre 1808 in Iferten drei Bauernmädchen kennengelernt, die es mit Ihren Seminaristen aufnähmen. Kenntnisse, die nicht von außen stammen, von denen nur das Innere Kunde gibt und die NB nicht als Äußeres angelernt werden, sind Naturstoff und gebühren daher auch dem weiblichen – qua Geschlecht. Sie sind ihm heilsam als Präservativ gegen die Nerven- und Phantasieübel, womit die Phantasiekost aus den literarischen Konditorläden sie sonst unfehlbar vergiftet.
>
> (Diesterweg 1828; zit. n. Deiters et al. 1956, S. 265).

Als methodisches Ziel wird über die Anschauung hinaus die vermehrte *Selbsttätigkeit* der Lernenden als Ziel formuliert, doch beschränken sich die

Reformvorschläge nicht auf die Suche nach dem Heil in der Methode, sondern mit dem Überdenken dieser geht gleichzeitig ein Neudenken der Inhalte einher. So sieht Diesterweg zu Beginn des geometrischen Unterrichts die Durchführung eines propädeutischen Kurses, der elementare Begriffe wie Punkt, Gerade oder Ebene nicht logisch, sondern zunächst vermöge der Anschauung vermitteln soll. Daran anknüpfend soll die geometrische Combinationslehre (siehe unten), welche auch als Thema um 1830 in Lehrpläne des gymnasialen Mathematikunterrichts aufgenommen wurde (vgl. Biermann 2010, S. 243), den Übergang zur deduktiven Geometrie ebnen. Nebst jenen Elementarisierungen setzt sich Diesterweg für den Einbezug von Anwendungen in den Raumlehreunterricht ein (siehe unten). Exemplarisch steht Diesterweg für eine zu Beginn des 19. Jahrhunderts aufkommende Avantgarde, die Reformvorschläge zur Elementarisierung der Geometrie formulierte (vgl. Zeimetz 2011). Aufgrund ihrer Einflussnahme auf Diesterweg sind Harnisch, in Bezug auf die Haltung gegenüber Anwendungen, und Grassmann, insbesondere wegen der Betonung geometrischer Combinationen, zu erwähnen. Um in Diesterwegs allgemein starker pädagogischer Rezeption ein Puzzlestück zum Mathematikunterricht, speziell zur bislang wenig beachteten Raumlehre, zu liefern, steht er als prominenter Vertreter des damaligen Zeitgeistes im Mittelpunkt des Artikels.

Zunächst werde ich vernetzende Ideen – verschiedener Gebiete, Darstellungsformen und Strategien – vorstellen. Inwiefern Diesterweg einen Leben und Raumlehre verbindenden Mathematikunterricht vorsieht, nachdem er anfänglich den Bildungswert der Geometrie als einen rein formalen einstuft, möchte ich anhand exemplarischer Aufgaben aufzeigen.

Verbindungen durch Geometrische Combinationen

Diesterweg intendiert, mit der Aufnahme der Combinationslehre in seinen Geometriekanon, eine Brücke zwischen der anschaulichen propädeutischen Raumlehre und Aussagengefügen zu schlagen.

> Ja die meisten kennen sie gar nicht, nicht wissend, was es heißt, kombinatorisch zu verfahren. J. Schmid hat darin einiges geleistet und eben dadurch die Raumlehre zu einem der trefflichsten Unterrichtsgegenstände für Elementarschulen gemacht. Denn das Kind kann noch lange nicht logische Schlußreihen aufstellen, aber zu einfachen Kombinationen in reinen Anschauungen, welche von äußerer Anschauung unterstützt werden, ist es fähig, und es ist seine Lust, sie zu machen. (Diesterweg 1827; zit. n. Deiters et al. 1956, S. 196)

Diesterweg knüpfte bezüglich der Combinationslehre an Schmid an, der bereits 1809 entsprechende Aufgaben publizierte:

> 5te Frage. Welches ist die größte Anzahl von nur gleichen geschlossenen Flächen, welche man mit 30 und 30 gleichlaufenden Linien machen kann?
>
> a. Frage. Kann man mit diesen 30 und 30 gleichlaufenden Linien auch 841 ungleiche geschlossene Flächen machen?
>
> b. Frage. Kann man auch 841 geschlossene Flächen von 2, 3, 4, 5erley Grösse ꝛc. machen?

Abb. 1: Schmid 1809, S. 375

Nicht die Lösung eines konkreten Falls wird in obiger Aufgabe (Abb. 1), die exemplarisch für Schmids Combinationslehre stehen soll, in den Vordergrund gestellt, sondern die Wahl von jeweils 30 Linien kann auf die Formulierung einer allgemeinen Regel abzielen. Selbsttätigkeit kann anhand von binnendifferenzierender *Aufgabenvariation* sowie durch Angabe des Ergebnisses zur Selbstkontrolle unterstützt werden. Indes stellt dieser Gegenstand nicht lediglich eine Verbindung zwischen geometrisch räumlichem Denken und logisch mathematischem Denken (im Sinne von van Hiele (vgl. van Hiele 1978)) dar, sondern zudem werden verschiedene Gebiete wie etwa Geometrie und Kombinatorik bzw. Geometrie und Arithmetik als auch verschiedene Repräsentationsformen, insbesondere Ikonisches und Symbolisches, miteinander verbunden.

> I. Zieht man in einer geradlinigen Figur alle möglichen Diagonalen, so entsteht eine gewisse Anzahl von Dreiecken, welche von den Seiten und den Diagonalen gebildet werden. Man verlangt die Anzahl dieser Figuren zu wissen.

Abb. 2: Diesterweg 1829, S. 65

Ein von konkreten Fällen ausgehender und zur allgemeinen Regel fortschreitender Lösungsweg schwebt Diesterweg vor. Sukzessive werden die Fälle drei Punkte, vier Punkte, …, *n* Punkte betrachtet, wobei zunächst an konkreten Beispielen exemplarisch alle möglichen Fälle aufgelistet werden.

Exemplarisch stellt Diesterweg den Übergang von 5 zu 6 Punkten dar (siehe Abb. 3). Hier werden die entstandenen Dreiecke so ergänzt, dass in einer Zeile jeweils die ersten beiden Punkte beibehalten werden und der dritte dem Alphabet nach variiert wird – das Ganze ist lexikographisch geordnet.

Auch entlang der Haupt- und Nebendiagonalen kann entsprechend ein Bildungsgesetz ausgemacht werden.

5 Punkte a b c d e		
abc	abd	abe
	acd	ace
		ade
	bcd	bce
		bde
		cde
		10 Dreiecke

6 Punkte a b c d e f			
abc	abd	abe	abf
	acd	ace	acf
		ade	adf
			aef
	bcd	bce	bcf
		bde	bdf
			bef
		cde	cdf
			cef
			def
			20 Dreiecke.

Abb. 3: Diesterweg 1829, S. 65

Die von Diesterweg gewählte Darstellung zeigt die Verbindung zu Dreieckszahlen (auch als Verbindung zwischen elementaren geometrischen Objekten und Arithmetik in diesem Lehrwerk – etwa die Summe der ersten n Zahlen bzw. der ersten m ungeraden Zahlen repräsentiert durch Dreiecke bzw. zusammengefügte Gnomone – sowohl visualisiert als auch verbalisiert betrachtet (vgl. Diesterweg 1829, S. 109 ff.)): Die Summe der ersten (n-2) Dreieckszahlen liefert die Anzahl der möglichen Dreiecke in einem n-Eck. Durch Angabe eines Terms für $\binom{n}{3}$ sowie die Wahl des Ausdrucks Terne – nach Meyers Konversations-Lexikon von 1888 eine Zusammenstellung je dreier Dinge aus einer größeren Anzahl, wobei insbesondere auf das Lottospiel hingewiesen wird – expliziert der Autor seine Vorstellungen hinsichtlich möglicher Bezüge zur Kombinatorik:

Der der Combinationslehre Kundige weiß, daß es in vorstehender Aufgabe darauf ankommt, die Anzahl der Gedreie oder Ternen zu berechnen, welche mit einer gegebenen Anzahl Größen gebildet werden können.

Abb. 4: Diesterweg 1829, S. 65

An der Aufbereitung der Aufgabe „Berechnung wie oft 2, 3, 4 und mehr Punkte (oder Dinge überhaupt) in andere Ordnung neben einander gestellt werden können." wird jene Bestrebung besonders deutlich. Diesterweg fasst die Aufgabe als ein von der gegebenen Situation unabhängiges Auswahl-problem auf und knüpft mit einer Anwendung der Zählstrategie an: „Wie oft können 8 Personen ihre Plätze verwechseln, so daß die Reihenfolge der Personen jedesmal eine andere ist?“ (vgl. Diesterweg 1828, S. 23 ff.).

Zweite Uebung. Anzahl der Parallelogramme, welche durch 2 Haufen Parallellinien gebildet werden. 53.

Abb. 5: Diesterweg 1843, S. 87 & Tabelle III

Stufenweise wird bei der Behandlung vom *Konkreten zum Abstrakten* vorgegangen, wobei zunächst unter Zuhilfenahme der Anschauung konkrete Fälle vermöge der Anfertigung und Analyse von Figuren bearbeitet werden sollen:

Natürlich müssen die Schüler Figuren dazu machen, oder vielmehr das Gesetz aus der anschaulichen Erkenntniß der Figuren entwickeln.

Abb. 6: Diesterweg 1843, S. 56

Im Anschluss an die Betrachtung einzelner Fälle wird das Problem auf einen Haufen, bestehend aus n Parallelen, und einen aus zwei Parallelen reduziert und systematisch untersucht. Diese Situation wird auf bereits Bekanntes zurückgeführt: Die Anzahl der Strecken zwischen einer gegebenen Anzahl von Punkten wird bestimmt und mit Hilfe der Analogie zu dem bereits bearbeiteten Problem die Lösung des Teilproblems geliefert. Wird die Einschränkung, dass ein Haufen aus zwei Parallelen besteht, aufgehoben, so liefert die Multiplikation der Anzahl der Zwischenräume zwischen den Parallelen des einen Haufens mit der Anzahl der Zwischenräume des anderen Haufens das gewünschte Ergebnis. Durch Schließen wird eine allgemeine Regel hervorgebracht, und die Ergebnisse werden in folgender Tabelle zusammengestellt:

Parallelen:	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	3	6	10	15	21
3	0	3	9	18	30	45	63
4	0	6	18	36	60	90	126
5	0	10	30	60	100	150	210
6	0	15	45	90	150	225	315
7	0	21	63	126	210	315	441

Abb. 7: Diesterweg 1843, S. 91

Die übersichtliche Zusammenstellung der Ergebnisse ist jedoch nicht das alleinige Ziel, sondern die in der Tabelle aufzufindenden arithmetischen Zusammenhänge – die Differenz zweier aufeinander folgender Zahlen innerhalb einer Zeile bzw. einer Spalte sowie die Differenzen aufeinander folgender Zahlen eben jener Differenzen – werden ebenso hergestellt. Demnach werden Muster nicht bloß aufgefunden, sondern stellen selbst wiederum einen Untersuchungsgegenstand dar, wodurch die Verbindungen zwischen F o r m e n und R e i h e n (vgl. Abb. 8) – hier die Summe der ersten n Zahlen – aufgedeckt werden.

Der ersten:	0	0	0	0	0	0
— zweiten:	1	2	3	4	5	6
— dritten:	3	6	9	12	15	18
Der vierten:	6	12	18	24	30	36
— fünften:	10	20	30	40	50	60
— sechsten:	15	30	45	60	75	90
— siebenten:	21	42	63	84	105	126

Wer mit der Lehre der h ö h e r e n R e i h e n bekannt ist, wird die Merkwürdigkeit dieser Reihen, aus F o r m e n entwickelt, nicht übersehen. Wie in der Akustik die Zeitverhältnisse der Töne räumlich anschaulich gemacht werden können, so entsprechen hier den Gesetzen der Form Gesetze der Zahl.

Abb. 8 und 9: Diesterweg 1843, S. 91 ff.

An anderer Stelle müssen die arithmetischen Muster auch auf innermathematische Probleme angewendet werden. Die Anzahl der möglichen Diagonalen in n-Ecken wird bestimmt und im Kontext der *Umkehraufgabe* „Es ist die höchste Anzahl der Diagonalen in einer geradlinigen Figur gegeben; man sucht die Zahl der Seiten dieser Figur.“ die Frage, wieso die Zahl der Diagonalen nicht ganz willkürlich gewählt werden dürfe, aufgeworfen. Zur Beantwortung letzterer sind Kenntnisse über die Folge der Diagonalen in n-Ecken hilfreich und stellen somit eine sinnvolle Anwendung der Musteranalyse dar.

Verbindungen zwischen Termen und Figuren

In Diesterwegs Lehrbüchern lassen sich neben Verbindungen zwischen verschiedenen Inhalten und Repräsentationsformen ebenso Aufforderungen, Verbindungen zwischen formalen und visuellen Darstellungen herzustellen, finden:

15. An einer Figur zu erweisen, daß:

a. $(a + b)^q = a^q + 2ab + b^q$.

b. $(a - b)^q = a^q - 2ab - b^q$.

c. $(a + b) . (a - b) = a^q - b^q$.

Abb. 10: Diesterweg 1843, S. 301

Die hier verwendete Notation der Exponenten verweist auf die traditionsreiche Präsenz visueller Darstellungen und auf die sich erst allmählich durchsetzende Verwendung der algebraischen Symbolik. Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ gibt Auskunft über die Verbreitung jener Schreibart im ausgehenden 18. Jahrhundert:

> Um dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit kürzere Art, die Potenzen auszudrücken, eingeführt, die wegen ihres außerordentlichen Nutzens sehr sorgfältig erklärt zu werden verdient. Man schreibt nämlich über die Zahl, von der z.B. die hundertste Potenz angegeben werden soll, etwas seitwärts zur Rechten die Zahl 100, also a^{100} und spricht: a zur hundertsten Potenz erhoben.
>
> (Euler 1959 (Nachdruck), S. 95)

Produkte zweier Zahlen werden in Diesterwegs Schrift „Praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürger-Schulen“ als Rechtecke aufgefasst. Durch Umstrukturierung werden diese als Werkzeug zum Wurzelziehen eingesetzt. Mittels untenstehender Visualisierung (Abb. 11) der ersten binomischen Formel schließt Diesterweg, dass sich die Quadrate aller mehrziffrigen Wurzeln auf drei Produkte zurückführen lassen. Gleichzeitig beschreibt er ein Verfahren zur Bestimmung von natürlichen Quadratwurzeln: Die Quadratwurzel aus 729 wird nun gesucht. Zunächst gibt die Anzahl der Stellen Auskunft über die Stellenanzahl der Wurzel. Zehner- und Einerwert werden – mit Verweis auf die Quadratzahlzerlegung in zwei Teilquadrate sowie dem doppelten Produkt der Seitenlängen ebenjener Quadrate – nacheinander bestimmt. Überschlagen liefert, dass die Wurzel zwischen 20 und 30 liegen muss, womit die Zehnerziffer gefunden ist und der Rest 329 verbleibt. Mit Hilfe der Division des Restes 329 durch das Doppelte der bereits gefundenen Teilquadratseitenlänge kann auf die Einerziffer bzw. die Länge des zweiten Teilquadrats geschlossen werden, wenn beachtet wird, dass noch ein Rest für das zweite Teilquadrat benötigt wird (Diesterweg 1854 S. 29 ff.).

Das hier beschriebene Verfahren erweitert Diesterweg – unterstützt durch die äußere Anschauung – für Kubikzahlen. In diesem Fall wird die Situation, d.h. die Zerlegung des Würfels mit Grundkantenlänge $a + b$ in je einen Würfel der Kantenlängen a und b sowie je drei Quader mit quadratischen Grundflächen (und den Volumina a^2b bzw. b^2a), mit Hilfe von Teilholzwürfeln gepuzzelt (vgl. Diesterweg 1854, S. 38 ff.).

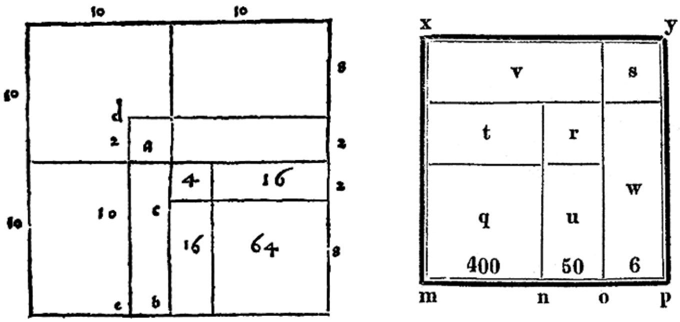


Abb. 11: Stifel 1553, S. 373 und Diesterweg 1854, S. 30

Über die Aufforderung der Visualisierung der binomischen Formeln hinaus, werden Bilder also zur Begründung eines Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln herangezogen. Durch das Nebeneinander des algebraischen und geometrischen Weges können, die Begriffsbildung unterstützend, sowohl der formale als auch der visuelle Denkstil (vgl. Lambert 2003, S. 99 ff.) angesprochen werden.

Verbindungen durch das Spiralprinzip

Die bislang beschriebenen Verbindungen richten sich vorwiegend in die inhaltliche Breite. Eine Anordnung von Inhalten entlang des *Spiralprinzips* zur Präzisierung ausgewählter Stoffe und Strategien lässt sich am Beispiel der Durchdringung der Kongruenzsätze darstellen. Vorbereitend lautet der Arbeitsauftrag für die Schülerinnen und Schüler:

> Einen Triangel zu verzeichnen, welcher einem gegebenen gleich und ähnlich, oder so beschaffen ist, daß er mit dem gegebenen ganz zusammenfallen oder ihn ganz decken kann. Der gegebenen Triangel sei a b c.
>
> (Diesterweg 1843, S. 121)

Aus einer gegebenen Zeichnung sollen Maße abgelesen werden, um so experimentell Möglichkeiten zur Konstruktion von Dreiecken zu bestimmen, d.h. die Kongruenzsätze werden aus der Erfahrung gewonnen und nicht umgehend bewiesen, sondern empirisch überprüft. Die der Anschauung entsprungenen Sätze werden anschließend an „Darstellungen von Vielecken und Kreisen“ im Abschnitt „Vergleichungen und Messungen“ aufgegriffen und begründet. Argumentationen dienen hier in erster Linie nicht der Verifizierung einer Vermutung – nach Einsatz der Kongruenzsätze zur Konstruktion besteht kaum Anlass an der Richtigkeit dieser zu zweifeln – sondern der Schaffung von Zusammenhängen zwischen verschiedenen Begriffen. Hierbei werden verschiedene Stufen des Begründens, d.h. mit und ohne Rückgriff auf die Anschauung (beispielsweise beim Basiswinkelsatz – hier eine Folgerung aus den Kongruenzsätzen) berücksichtigt. Indem sich die Schülerinnen und Schüler mit Spezialisierungen wie etwa „Untersuche, welche Stücke hinreichen, um die Deckung zweier rechtwinkliger Dreiecke zu bestimmen.“ (Diesterweg 1843, S. 204) auseinandersetzen, wird das erworbene Wissen vertieft. Ausgehend von den Kongruenzsätzen werden Verhältnisgleichungen thematisiert. Im abschließenden Rückblick, welcher sich das Ziel setzt *Strategien* zu vermitteln, wird das Prinzip der Kongruenz bei der Bestimmung der Anzahl für die Konstruktion notwendiger Größen, aufgegriffen:

Das Fünfeck besteht aus 3 △△, welche 2 Seiten gemein haben; es erfordert also nicht 3 . 3, sondern 3 . 3 — 2 = 7 Bedingungen; aus demselben Grunde

das Sechseck	3 . 4 — 3 = 9	Bedingungen		
— Siebeneck	3 . 5 — 4 = 11	—	—	
— Achteck	3 . 6 — 5 = 13	—	—	
— n eck	3 (n — 2) — (n — 3)	—	—	

Denn das n eck läßt sich durch Diagonalen aus einem Punkte in (n — 2) △△ zerlegen. Das erste △ erfordert 3 Bedingungen, jedes folgende aber nur 2; es müssen also, um die Zahl aller nothwendigen Bedingungen zu haben, von 3 (n — 2) abgezogen werden: (n — 3) .

Abb. 12: Diesterweg 1843, S. 291

Im Unterricht werden – im Sinne des Spiralprinzips – mathematische Inhalte zu verschiedenen Zeitpunkten auf verschiedenen kognitiven und sprachlichen Niveaus aufgegriffen. So kann ein Inhalt mit sich selbst oder einem ähnlichen bereits bekannten Inhalt verbunden werden. Diese Art der Verbindung fällt bei Brinkmann unter die Kategorie Ähnlichkeitsvernetzung (vgl. Brinkmann 2002, S. 95 f.).

Verbindungen zwischen Strategien und Mathematik

> Endlich halte man bei allem Unterricht in der Mathematik überhaupt und in der Raumlehre im Besondern die Ansicht fest, daß es für die Schüler viel wichtiger ist, den Weg zu einem Beweise, als den Beweis selbst kennen zu lernen. Ganz im Allgemeinen fördert es die Bildung viel mehr, wenn man erfährt, auf welchen Wegen Denker zu ihren Resultaten gelangten, als wenn man nur diese Resultate kennen lernt. Wie man diesen die Forderung stellt, daß sie mehr als Resultate, nämlich auch die Methode ihrer Forschungen bekannt machen, so fordert man das Gleiche von dem Mathematiker. Beide müssen die Wege, die sie wandeln, genau bezeichnen. Es ist falsch, daß die Wissenschaften durch neue Gedanken und neue Beweisarten am meisten gewinnen. Die Erfindung neuer Methoden oder die rechte Aufklärung über vorhandene ist viel wichtiger. Wer diese ganz kennt, d. h. anzuwenden versteht, ist ein Schatzgräber; wer einige neue Wahrheiten annimmt, besitzt nur einige Schätze. Ein Schatzgräber kann sie nach Belieben vermehren.

Abb. 13: Diesterweg 1838, S. 199

Diesterweg beschreibt, dass gemäß des gemeinen Menschenverstands die Mathematik im Allgemeinen und die Geometrie im Besonderen nur zu leeren Abstraktionen gestempelten Köpfen und unerreichbaren Genies, zuteil werden könne, distanziert sich aber von dieser weitläufig geteilten Auffassung (vgl. Diesterweg 1843, S. 2). In seinem *„Wörterbuch der Heuristik“*, dem Anhang seiner Raumlehre, thematisiert er Methoden zur Lösung von geometrischen Aufgaben, die (zumindest bis zu einem gewissen Grad) auch durchschnittlichen Köpfen eine erfolgreiche Problemlösung ermöglichen sollen. Zwei wesentliche Behandlungsarten stellen die geometrische Analysis sowie die Ortslinienmethode dar:

> Man stellt sich eine Aufgabe als gelöset vor, entwirft eine der Sache entsprechende Figur, betrachtet in derselben die Stücke, welche den gegebenen entsprechen, und untersuchet, ob durch sie so viel Stücke gegeben oder aus ihnen entwickelt werden können, als nach den bereits bekannten Sätzen zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind. […]
>
> Gegeben die Summe der 3 Seiten eines ⊿, […] und 2 (folglich alle) Winkel desselben. (Diesterweg 1843, S. 283 f.)

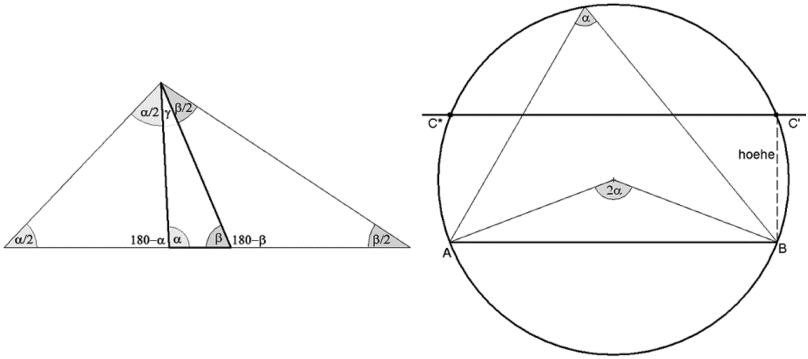
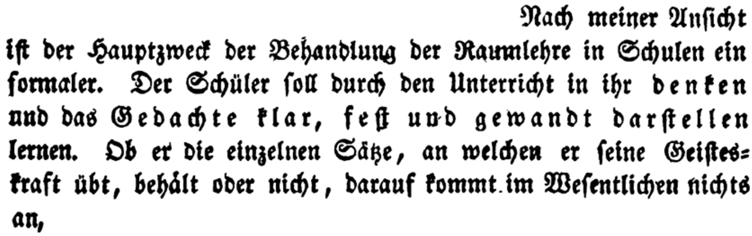


Abb. 14: erzeugt mit Euklid DynaGeo

> Eine Linie, in welcher ein Punkt liegen muß, heißt ein Ort (ein geometrischer Ort) dieses Punktes. […] Viele Aufgaben werden durch geometrische Oerter gelöset. […]
>
> Gegeben ist die Grundseite und Höhe eines ⊿, sammt dem Winkel an der Spitze; das ⊿ zu construiren. (Diesterweg 1843, S. 282)

Verbindungen zwischen Welt und Mathematik



Nach meiner Ansicht ist der Hauptzweck der Behandlung der Raumlehre in Schulen ein formaler. Der Schüler soll durch den Unterricht in ihr denken und das Gedachte klar, fest und gewandt darstellen lernen. Ob er die einzelnen Sätze, an welchen er seine Geisteskraft übt, behält oder nicht, darauf kommt im Wesentlichen nichts an,

Abb. 15: Diesterweg 1829[2], S. IV

Jene Äußerung widerspricht einem ausgewogenen Verhältnis zwischen Anwendungen und der rein logischen Schulung des Geistes. Allerdings ändert Diesterweg seine Auffassung bezüglich des Gehalts von Anwendungen in der Geometrie im Laufe seines Schaffens. Auch in dieser Hinsicht distan-

[2] Vorstehendes Plädoyer für Geometrie als Schule des Geistes erschien zwar 1829, jedoch handelt es sich um eine Anweisung zum Einsatz des Leitfadens für ersten Unterricht in der Formen-, Größen und räumlichen Verbindungslehre, der erstmals 1822 herauskam.

ziert sich Diesterweg von Geometrieunterricht, der Euklids Elementen folgt und übt Kritik an seinen eigenen früher publizierten Lehrwerken.

> Vielmehr soll überall die Anwendung auf das Leben nicht versäumt werden. Der einseitigen logischen Richtung bin ich selbst gefolgt in meiner geometrischen Combinationslehre und in dem Leitfaden für den Unterricht in der Formen- Größen- und räumlichen Verbindungslehre. (Diesterweg 1828, S. XXIII)

Motivationale Gründe zieht Diesterweg als Begründung für den Einbezug von Anwendungen in seiner Raumlehre heran und sieht im Mangel an utilitaristischen Aspekten im Unterricht eine Ursache für das bestehende Bild der Mathematik in der Gesellschaft:

> Die alten mathematischen Lehrer kannten in der Regel nichts als ihre Formeln, oder noch einiges Latein, und da sie nicht daran dachten, das Leben mit ihrer Wissenschaft in Verbindung zu setzen, so geriethen sie in die dürren Wüsten der Abstraction, oder zuletzt ganz und gar in solchem Grade auf das Trockne, daß die Mathematik für die trockenste Wissenschaft und die Begriffe „Mathematiker" und „trockner ungenießbarer, unpraktischer, abstrakter, der Welt entfremdeter Mensch" für Synonyme gehalten wurden. (Diesterweg 1828, S. IV)

Wie stellt sich Diesterweg nun den Bezug zum Leben im Rahmen der Raumlehre vor? Insbesondere betont Diesterweg den Aspekt von Geometrie als Schule des Messens, wobei Messen ausdrücklich nicht auf das Bestimmen von Flächeninhalten und Volumina reduziert wird:

> Wenn von der Ausmessung die Rede ist, so werden wirkliche Flächen in und ausser dem Hause gemessen, die Schüler lernen die gangbaren Längen- und Flächenmaaße durch den wirklichen Gebrauch kennen.
> (Diesterweg 1828, S. XX)

So stellt auch das Ausmessen von Fässern mit Hilfe eines Visierstabes – dieser dient dem Vergleich des Volumens von Fässern, die sich hinsichtlich der Durchmesser bzw. der Höhe unterscheiden – eine echte Anwendung dar. Zunächst wird das Volumen des Fasses durch das Volumen eines Zylinders, dessen Grundflächendurchmesser dem arithmetischen Mittel aus dem größten und dem kleinsten Durchmesser des Fasses entspricht, angenähert. Der Durchmesser des Zylinders mit einer Volumeneinheit – Diesterweg wählt preußisches Quart[3] – Rauminhalt wird von a (siehe Abb. 16, links) aus auf beiden Achsen abgetragen. Ein Zylinder mit dem Durchmes-

[3] 1 Preußisches Quart entspricht 1,145 Litern (vgl. Noback & Noback 1851, S. 117).

ser der Länge bc und gleicher Höhe des Quartzylinders umfasst das doppelte Volumen des ursprünglichen Zylinders. Nun wird die Länge der Strecke bc auf der vertikalen Achse abgetragen (ad) und die Strecke bd als Durchmesser der Grundfläche eines Zylinders betrachtet, der das Dreifache des Quartzylinders beinhaltet. Dieses Verfahren wird fortgesetzt und die Skala auf der vertikalen Achse sukzessive ergänzt, so dass die Durchmesser von Zylindern gleicher Höhe und den Volumina $1, 2, 3, \dots$ Quart abgelesen werden können. Auf der zweiten Seite des Visierstabs wird entsprechend eine Skala für Fässer unterschiedlicher Höhe angebracht (vgl. Diesterweg 1843, S. 277 ff.).

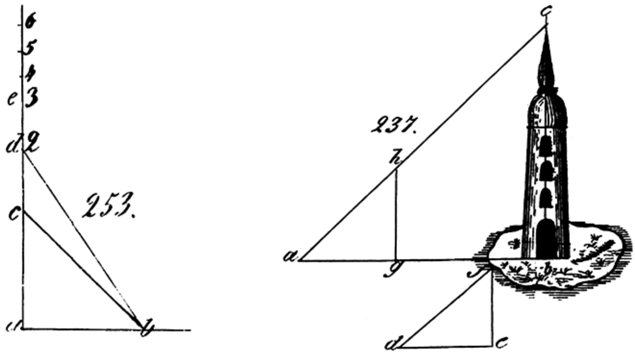


Abb. 16: Diesterweg 1828, Tabelle IX

Dass dieser Volumenvergleich eine authentische Anwendung und nicht lediglich eine Einkleidung darstellt, zeigt ein Blick in Bleibtreus „Politische Arithmetik“ (1853):

> Unter politischer Arithmetik oder Staatsrechenkunst versteht man denjenigen Theil der angewandten Mathematik, welcher sich mit der Lösung der bei der Staatsverwaltung vorkommenden Rechnungsaufgaben beschäftigt. Anlaß zu derartigen Rechnungen geben sowohl Geschäfte und Verfügungen, welche von der Regierung selbst ausgehen, wie z.B. Finanzoperationen und Gesetze oder Verordnungen über Maaß- und Gewichtswesen, Münzwesen, als auch staatspolizeiliche Prüfung und Beaufsichtigung, welcher öffentliche oder auf Gesellschaftsrecht gegründete Unternehmungen oder Anstalten, z.B. Versicherungsanstalten, Rentenanstalten unterworfen sind. (Bleibtreu 2006 (Nachdruck), S. 1)

> Die Anwendung eines einzigen, für die gewöhnlichen Dimensionsverhältnisse construirten Visirstabs kann daher nur in solchen Fällen angewendet werden, wo es auf genaue Resultate nicht ankommt. So kommt z.B. im Großherzugthum

> Baden der Visirstab bei Untersuchungen der Patentkeller der Weinhändler in Anwendung. Nach dem Gesetz müssen nur die in den abgesonderten Patentkellern der Gastwirthe befindliche Fässer geeicht sein, was dagegen für die in den Patentkellern der Weinhändler befindlichen Fässer nicht vorgeschrieben ist.
> (Bleibtreu 2006 (Nachdruck), S. 34)

So genannten Umgeldnern kam die Aufgabe zu, mit Hilfe des Visierstabs das Volumen von Weinfässern zu bestimmen und demgemäß im Namen des Staates Abgaben einzuholen.

In seiner Raumlehre stellt Diesterweg weitere Werkzeuge (Astrolabium, Bleilot, Grundwaage, Wasserwaage) zur Feldvermessung und aus dem Handwerk vor, die in erster Linie vom unterrichtenden Lehrer vorgestellt und vorgeführt werden sollen (vgl. Diesterweg 1843, S. 149 f.). An anderer Stelle kommt den Schülern und Schülerinnen eine weniger passive Rolle zu. Wenn Längenruten oder Maße Gegenstand des Unterrichts seien, dann sollen die entsprechenden Geräte den Schülern und Schülerinnen vorgezeigt werden und Erfahrungen damit selbst gesammelt werden – in und außerhalb der Schule sollten Messungen vorgenommen werden (vgl. Diesterweg 1828; zit. n. Deiters et al. 1956, S. 266).

Explizit sieht Diesterweg klassische Vermessungsaufgaben vor z.B. „Die Höhe eines Thurmes zu bestimmen, ohne seine Höhe unmittelbar zu messen“, wobei insbesondere die Art der Bearbeitung von Interesse ist: verschiedene Lösungswege, die jeweils ohne die Verwendung trigonometrischer Kenntnisse auskommen, werden verfolgt – die Messung des Abstands zwischen einem festgelegten Punkt und dem Turm sowie des Winkels, unter dem die Spitze des Turmes erscheint, ermöglichen die Anfertigung einer maßstabsgerechten Zeichnung. Analog besteht die Möglichkeit einen Stab senkrecht in die Erde zu stecken und über dessen Spitze die höchste Stelle des Turms anzupeilen. Mit Hilfe der Entfernung zum Stab, dessen Länge und der Entfernung zum Turm kann unter Verwendung des Strahlensatzes die gesuchte Größe ermittelt werden. Ebenso kann, zumindest bei Sonnenschein, die Länge des Stabschattens gemessen werden. Wird zusätzlich die Länge des Turmschattens ermittelt, so kann, unter der Annahme, dass Sonnenstrahlen Parallelstrahlen sind, die Höhe des Turmes bestimmt werden (vgl. Diesterweg 1843, S. 233 f.).

Im Abschnitt über Darstellungen geometrischer Formen aus der Umwelt lassen sich weitere Anwendungen ausmachen. Windungen einer Stahlfeder, die einer Schlange, Wellenstriche, Linsenlinien und Eiformen werden mit Hilfe von Kreisbögen modelliert. Dass es sich dabei um Näherungskonstruktionen handelt, ruft wüste Kritik hervor:

> In Beziehung auf diese letzten Regeln ist zu bemerken, dass sie das Verlangte grösstenteils nur ungefähr geben. So ist die Spirallinie sowohl als die Ellipse zusammengesetzt aus Kreisbogen von verschiedenen Halbmessern. Für die Ellipse hätte wohl die richtige Konstruktion angegeben werden können, auf jeden Fall hätte gesagt werden sollen, dass die angedeuteten Konstruktionen zum Theil durch genauere später ersetzt werden könnten. (Wunder 1829, S. 328)

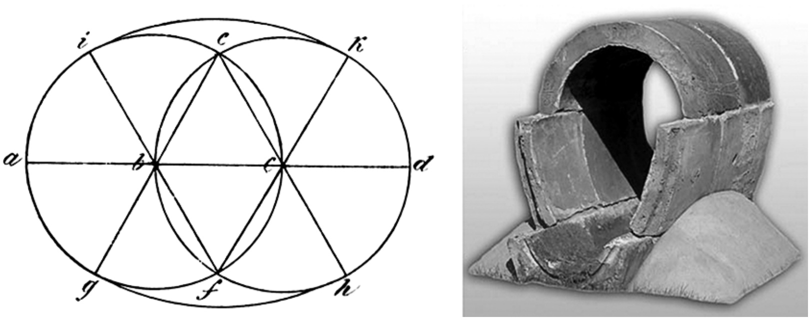


Abb. 17: Diesterweg 1828, Tabelle IV und Kanalbau im 19. Jahrhundert (vgl. Bauer 2011)

In der Auflage von 1843 nimmt Diesterweg Bezug auf die Kritik gegenüber den Näherungskonstruktionen:

Anmerkung. Daß durch die angegebenen Constructionen nicht eine wirkliche Ellipse entsteht, ist schon angegeben worden. Will man eine solche erzeugen, so verfahre man so:

Man knüpft die Enden eines Fadens zusammen, legt ihn um die in einer gewissen Entfernung von einander feststehenden Fußpunkte eines Zirkels, doch so, daß der Faden nicht angespannt ist. Nun nimmt man einen Stift, legt ihn in das Innere des Fadens, spannt ihn an, und fährt mit dem Stifte um die Zirkelspitzen herum. Alsdann beschreibt dieser Stift eine krumme Linie, welche auch durch den Schnitt eines Kegels entsteht, und welche die Bahnen der Planeten bezeichnet — eine Ellipse.

Abb. 18: Diesterweg 1843, S. 114

Eine korrekte Konstruktion stellt also nicht das Ziel dieser Übung dar, sondern die Hinweise auf die Situationen, in denen bestimmte Konstruktionen in der Welt auftauchen und die Verwendung von Korbbögen deuten den Anwendungsbezug an. Beim praktischen Zeichnen werden diese oft anstelle von Ellipsen verwendet, wobei Motivation jener Näherungskonstruktionen auch die Architektur, der Maschinenbau (Nockenprofile) sowie der künstlerische Bereich darstellen. (Bei Abwasserleitungen wie in Abb. 17 tauchen die von Diesterweg gewählten Eilinien[4] auf, zu nennen sind in diesem Zusammenhang auch Gewölbe, Fensterbögen und Brücken.) Die Verbindung zur Welt stellt einen möglichen Ausgangspunkt zur Reflexion der verwendeten Darstellungen und der Genauigkeit dieser dar:

> Die Gewißheit desjenigen, was als wahr dargestellt wird, soll der Schüler in der reinen (intellectuellen) Anschauung finden, ohne alle weitere Beweisführung.
> (Diesterweg 1843, S. 103)

Fazit

Prototypen, wie geometrische Combinationen als Abzählproblem, die erste binomische Formel für die dritte Potenz in Würfeln, der Visierstab zur Ausmessung von Fässern oder die Achtung motivationaler Aspekte geben Auskunft über Vorstellungen bezüglich Verbindungen im Mathematikunterricht. Indem Bezüge zwischen Inner- und Außermathematischem, verschiedenen Gebieten innerhalb der Mathematik, bereits erworbenem Wissen, das vertieft werden soll, und vorliegenden Fragestellungen sowie dem Lernenden und der behandelten Mathematik als geistige Anregung hergestellt werden, forciert Diesterweg *Beziehungshaltigkeit* (Freudenthal 1973, S. 75 ff.).

Auch wenn die Bezeichnung „Vernetzung“ den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts entsprungen ist (vgl. Brinkmann 2002, S. 22) und erst seitdem sich mathematikdidaktische Definitionen (weiter-)entwickelt haben, findet sich die Idee, Verbindungen zwischen Gebieten, Repräsentationsformen oder Welt und Mathematik im Unterricht anzustreben schon mindestens 150 Jahre eher – und nicht nur bei Diesterweg.

[4] Bereits in der Megalithkultur taucht diese Idee auf. Nachzulesen bei A. Hoehn & M. Huber (2005). Pythagoras. Erinnern Sie sich? Zürich: Orell Füssli, S. 117-130.

Literatur

Bauer, H. (2011). Stadtentwässerung Nürnberg. Verschiedene Bauverfahren für Kanäle. http://www.nuernberg.de/internet/abwasser/kanalbau.html (zuletzt aufgerufen am 12.08.2011).

Biermann, H. R. (2010). Praxis des Mathematikunterrichts 1750-1930. Längsschnittstudie und geschichtliche Entwicklung des Mathematikunterrichts am Ratsgymnasium Bielefeld. Dissertation, Fachbereich Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Berlin: Logos Verlag.

Bleibtreu, C. L. (2006). Politische Arithmetik. Anleitung zur Kenntni und Uebung aller im Staatswesen vorkommenden Berechnungen Ein Handbuch für Staatsbeamte und Geschäftsmänner (Nachdruck: Original erschien 1853). New York: Elibron Classics. (http://books.google.de/ zuletzt aufgerufen am 20.07.2012)

Brinkmann, A. (2002). Über Vernetzungen im Mathematikunterricht – eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I. Duisburger Elektronische Texte. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/inhalt.htm (zuletzt aufgerufen am 20.07.2012)

Deiters, H. et al. (Hrsg.) (1956). Friedrich Adolph Wilhelm Diesterweg. Sämtliche Werke. Bd. I: Aus den „Rheinischen Blättern für Erziehung und Unterricht" von 1827-1829. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag.

Diesterweg, F. A. W. (1828). Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik. Bonn: Eduard Weber.

Diesterweg, F. A. W. (1833-1835). Friedrich Adolph Wilhelm Diesterweg. Sämtliche Werke. Bd. III: Aus den „Rheinischen Blättern für Erziehung und Unterricht" von 1833-1835. Berlin: Volk und Wissen Volkseigener Verlag (1959).

Diesterweg, F. A. W. (1829). Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen- Größen und räumlichen Verbindungslehre. Elberfeld: Büschler'sche Verlagsbuchhandlung.

Diesterweg, F. A. W. (1838). Wegweiser für deutsche Lehrer. Zweiter Band. Essen: Bädeker.

Diesterweg, F. A. W. (1843). Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik, 2. Auflage. Bonn: Eduard Weber.

Diesterweg, F. A. W., P. Heuser (1854). Praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürger-Schulen. Drittes Uebungsbuch, 5. Aufl. Gütersloh: Bertelsmann.

Euler, L. (1959). Vollständige Anleitung zu Algebra (Nachdruck: Deutsche Übersetzung erschien erstmalig 1770). Stuttgart: Reclam-Verlag.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Hischer, H. (2009). Was sind und was sollen Vernetzungen? In: Beiträge zum Mathematikunterricht, http://www.mathematik.uni-dormund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/HISCHER_Horst_2009_Vernetzung.pdf (zuletzt aufgerufen am 20.07.2012).

Jahnke, H. N. (1989). Abstrakte Anschauung. Geschichte und didaktische Bedeutung. In: H. Kautschitsch, W. Metzler (Hrsg.). Anschauliches Beweisen. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, S. 33-53.

Lambert, A. (2003). Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: P. Bender, W. Herget, H.-G. Weigand & T. Weth (Hrsg.): Lehr- und Lehrprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitskreistagung „Mathematikunterricht und Informatik“ der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 27. Bis 29. September 2002 in Soest. Hildesheim: Franzbecker, S. 91- 104.

Meyers Konversations-Lexikon (1888). 4. Auflage. Leipzig und Berlin: Verlag des Bibliographischen Instituts.

Noback, C & F. Noback (1851). Taschenbuch der Münz- Mass- und Gewichts-Verhältnisse, der Staatspapiere, des Wechsel- und Bankwesens und der Usanzen aller Länder und Handelsplätze. Leipzig: Brockhaus.

Schmid, J. (1809). Elemente der Form und Größe. Bern: Wittwe Stämpfli.

Stifel M. (1553). Die Coss Christoffs Rudolffs. Mit schönen Exempeln der Coss. Durch Michael Stifel gebessert und gemehrt. Zu Königsperg in Preußen gedrückt durch Alexander Lutemyslensem.

Van Hiele P.M. & D. van Hiele (1979): Die Bedeutung der Denkebenen im Unterrichtssystem nach der deduktiven Methode. In: H.-G. Steiner (Hrsg.). Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, S. 127-139.

Wunder, G. (1829). Rezension zu „Raumlehre oder Geometrie von Diesterweg. In: M. J.C. Jahn (Hrsg.). Jahrbücher für Philologie und Pädagogik. Bd. II, Heft I. Leipzig: B. G. Teubner, S. 323-336. (http://www.archive.org/stream/jahrbcherfrp10jahnuoft#page/322/mode/2up, zuletzt aufgerufen am 06.08.2011).

Zeimetz, A. (2011). „Los von Euklid?“. In: T. Krohn, E. Malitte, G. Richter, K. Richter, S. Schöneburg & R. Sommer. Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze. Hildesheim: Franzbecker, S. 411-420.

Maßwerkbetrachtungen in der Grundschule

Uta Knyrim

Zusammenfassung. Gotisches Maßwerk eignet sich bereits im Grundschulalter als sehr anschauliches, interessantes, motivierendes und anspruchsvolles Thema. In unserem Projekt begaben wir uns mit Grundschulkindern auf eine spannende geometrische Zeitreise. Die Kinder erforschten konstruierend gotische Maßwerkfenster, Möglichkeiten der Kreisteilungen mit dem Zirkel, waren voller Vorfreude auf Maßverhältnisse und Pässe. Sie überzeugten durch die erstaunlich guten Konstruktionen. Eine kleine Ausstellung präsentiert Ergebnisse dieses geometrisch-künstlerischen Projektes von dem Exkurs ins Mittelalter.

Gotische Maßwerkfenster als Zugang zur Geometrie des Kreises

Mathematische Projekte zum Thema Maßwerk existieren bereits für die Sekundarstufe I. Doch wird die geometrische Behandlung des Kreises in der Primarstufe mit dem Auftrag der grundlegenden Bildung oft sehr vernachlässigt. Welche mathematischen Entdeckungswege können Grundschulkinder hier gehen, wenn oft beim Ausmalen von Zirkelblumen stehen geblieben wird? Mit unserer Projektidee suchten wir einen neuen Zugang und erprobten im Mathecamp der Schülerakademie Erfurt mit zwanzig mathematisch potentiell begabten Grundschulkindern einen sehr anschaulichen Zugang zur Geometrie des Kreises. Geometrie als

> *eine der großen Gelegenheiten, die Wirklichkeit mathematisieren zu lernen*
> (Freudenthal 1973, Band 2, S.380)

und ein wunderbarer mittelalterlicher Stadtkern mit einer Vielzahl sehr gut erhaltener gotischer Sakralbauten stellte den thematischen Ausgangspunkt für einen geometrischen Exkurs ins Mittelalter dar. Die Anschaulichkeit des Themas, die Lebensnähe durch Entdeckungswege vor Ort, Betrachtungen von Kirchenfotografien, architektonischen Zeichnungen, geometrischen Konstruktionen in vielen Variationen und das sehr motivierte eigene Konstruieren ergaben eine interessante Vernetzung.

Gotische Maßwerkfenster als Projekt – Planung und Ablauf

Ausgehend von den theoretischen Grundlagen und den vernetzenden, fächerübergreifenden bzw. –verbindenden Inhalten der Maßwerkthematik planten wir unser Projekt, das sich in das dreitägige Mathecamp am zweiten und dritten Tag integrierte, in folgender Struktur:

- Einführung in die Thematik Maßwerk mit dem von Flachsmeyer et al. (1990, Abb. 2, S. 10) zitierten Bild symmetrischer Figuren aus da Vincis Skizzen zu den „Ludi geometrici“,
- Einstimmung mit mittelalterlicher Musik,
- Mini-Vorlesung (Definition, Formen, Entwicklung),
- Unterrichtsgespräch: Entdeckungen zur Symmetrie sowie
- die Erarbeitung der Zielstellung des gemeinsamen Forschens.

Daran schloss sich unmittelbar die Arbeitsphase an Stationen mit jeweiliger Diskussion bzw. Auswertung der Ergebnisse an. Am dritten Tag des Mathecamps wurden alle Stationen gemeinsam ausgewertet.

Abb. 1: Maßwerkfenster mit Dreipässen, Dreiblättern, Vierpass und Vierblatt.
(Detail der Portalseite der Predigerkirche, Erfurt. Ab ca. 1265 Baubeginn, bis 1390 Westfassade und Langhaus; vgl. Bürger 2011, S. 85)

Diesen spannenden geometrisch-künstlerischen Weg sind wir mit den Kindern gegangenen. Dabei kamen neben den fachlichen Aspekten verschiedene didaktische Lehr- und Lernformen zur Anwendung: Sowohl der Lehrer-vortrag in Form einer kleinen Vorlesung (als konzentrierte Einstimmung und Wissensvermittlung), das fragende Annähern an die Kreiskonstruktionen mittels sokratischer Gesprächsformen und genetischem Herangehen (vgl. Wagenschein 1999, S. 75f.) als auch das entdeckende Lernen (vgl. Winter 1991, S. 1-5; Lorenz 2002, S. 46f.), bei Müller und Wittmann (1984) als *Prinzip des aktiven Lernens* bezeichnet, wurden in logischer Verknüpfung genutzt. Zimmermann (1998) betont den Zusammenhang mit heuristischen Verfahren:

> *Ein weiterer wichtiger, heute intensiver verfolgter Zugang zur Förderung mathematischer Kreativität besteht darin, Schüler sich aktiv-entdeckend mit Probleme[n] auseinandersetzen zu lassen, die eher nach „oben offen“ sind und so zu einem ganzen Problemfeld ausgeweitet werden können.*
>
> (Zimmermann 1998, S. 667)

Wendel (1993) erläutert hierzu neben dem entdeckenden Lernen das problemorientierte und interessenorientierte Lernen (1993, S. 250f.). Wertvolle Anregungen gibt das Konzept der „Lehrkunstwerkstatt“ von Berg, Klafki und Schulze (2001, S. 351).

Abb. 2: Kleine Ausstellung bei der Tagung des GDM-Arbeitskreis Geometrie 2011.
(Detail: Vom Thema über die Mini-Vorlesung bis zu ersten Schülerarbeiten)

So wurde das breite Themenspektrum des Maßwerkes mit einer sinnvollen didaktischen Herangehensweise verknüpft.

Ablauf und Ergebnisse des Maßwerkprojektes wurden in Form einer kleinen Ausstellung für die Septembertagung des Arbeitskreises Geometrie der GDM 2011 zusammengestellt und präsentiert (siehe Abb. 2).

Wichtige Schwerpunkte und Ergebnisse sollen im Folgenden erläutert werden.

Mini-Vorlesung

Ausgangspunkt war das Thema des Vortages, die Erkenntnisse zum „Muster“ mit Parkettierungen sowie die Motivation für ganz besondere Muster und Ornamente in der Baukunst. Muster, die mit dem Zirkel konstruiert werden, und Maßwerk genannt werden. Von der Definition des Maßwerkes

> *Das Maßwerk, d.h. das gemessene Werk, ist ein ausschließlich aus exakten Kreisbögen geometrisch konstruiertes Element der Unterteilung des über der Kämpferlinie gelegenen Bogenfeldes (Couronnement) von gotischen Fenstern, später auch zur Gliederung von Mauerflächen (Blendmaßwerk) oder auch vor ganze Wände freigespannt (Schleiermaßwerk), sowie an Wimbergen und Brüstungen. Das Maßwerk bildet mit dem profilierten Fenstergewände eine Einheit.*
> (Binding 1989, S. 12)

übernahmen wir die wichtigste Eigenschaft:

> *Mit dem Zirkel „gemessenes“, d.h. konstruiertes Ornament aus Kreisen und Kreissegmenten* (Kadatz 1988, S. 180)

und stellten sie als erste Definition den Kindern vor. Die weiteren definierten Eigenschaften wurden in den Vortrag bebildert mit eingefügt.

Für die Mini-Vorlesung mit Veranschaulichung durch Fotografien, Architekturzeichnungen sowie Konstruktionen zum Maßwerk, leise untermalt mit mittelalterlicher Musik, stellten wir folgende Themen vor:

- architektonische Entwicklungsphasen des Fensters bis zum Maßwerkfenster (vom kleinen, schmalen Fenster romanischer Ritterburgen, vom Rundbogenfenster der ottonischen Zeit, dem Übergangsstil, über Lanzettfenster, frühe Formen des gotischen Maßwerkes bis zum hoch- und spätgotischen Maßwerkfenster),
- die Rosettenfenster, auch Rad- und Rosenfenster genannt (oft zwölfteilig),

- die Definition des Kreises nach Franke (2001, S. 186f.),
- regelmäßige n-Ecke und Maßwerkbezeichnungen (Dreipass, Vierpass, etc.) mit Symmetriebetrachtungen,
- Maßwerkformen an Fenstern und Schmuckelementen am Kirchenbau,
- prächtiger Formenschatz, Vielfalt der Variationen,
- Raumgefühl: Wirkung des Maßwerkes von außen und die Lichtwirkung der Glasmalereien im Maßwerkfenster bei Innenansicht,
- das Konstruktionsgerät der Baumeister des Mittelalters: der Zirkel in historischen Abbildungen sowie
- geometrische Maßwerkkonstruktionen.

Abb. 3: Maßwerkfenster mit verschiedenen Formen. Langschiff der Predigerkirche, Erfurt. (Baubeginn ab ca. 1265, Langhaus bis 1390; vgl. Bürger 2011, S. 85)

Der anschauliche Einstiegsvortrag und besonders die faszinierenden Konstruktionen wirkten auf die Kinder so motivierend, dass sie sofort mit den eigenen Konstruktionen beginnen wollten.

Abb. 4: Formenschatz mittelalterlicher Maßwerkkonstruktionen.
Detail des Triangelportales des Erfurter Mariendoms. (Triangel als Hauptportal, Nordseite, 1330/1340 erbaut; vgl. Bürger 2011, S. 38)

Konstruktionen

Für die Annäherung an die Maßwerkkonstruktionen haben wir Schwerpunkte für die zwei Tage gestellt:

- Annäherung an Konstruktionen (Station),
- Kreisteilungen, regelmäßige n-Ecke (Station),
- Weitere Kreisteilungen oder Dreipasskonstruktion zur Auswahl,
- Kleine Hausaufgabe zum Entdecken des Gelernten vor Ort (Spaziergang durch mittelalterlichen Stadtkern),
- Maßwerkfenster (Station) und
- Kreise in Fensterbögen sowie Verfeinerungen (Arbeit am Detail).

Neugierig und sehr interessiert erarbeiteten die Kinder die für sie ganz neuen Aufgaben geometrischer Art.

Abb. 5: Konstruktion zur Vorbereitung des Maßwerkes: Schülerarbeit zum Dreipass.

Stolz auf die Ergebnisse präsentierten die Kinder ihre Konstruktionen.

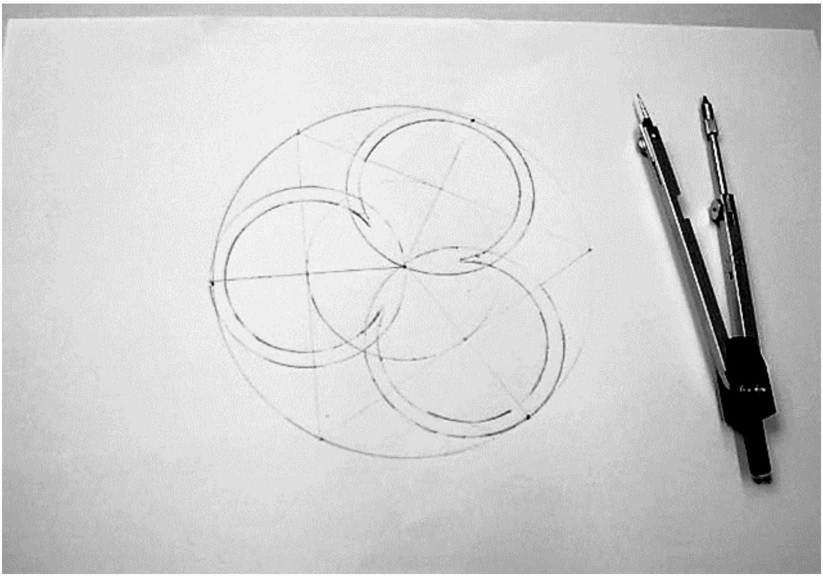


Abb. 6: Konstruktion zur Vorbereitung des Maßwerkes: fertige Schülerarbeit zum Dreipass.

Bei der Konstruktion der Dreipassformen kam natürlich nach den Vorbereitungen (Kreis, Sechsteilung) die wichtige Frage auf, wie groß der Radius der kleinen Kreise ist, damit ein Dreipass entstehen kann. Dass dieser Radius nicht vorgegeben, sondern variabel ist und je nach Festlegung von Radius *r* und Mittelpunkt *M* verschiedene Dreipassformen entstehen, erlebten die Kinder als sehr spannende Entdeckung, wie ein kleines Abenteuer: „Kreismittelpunkte auf Reisen“.

Neben der Freude über die eigenen Entdeckungen der Maßverhältnisse waren die Kinder begeistert über die mathematische Sprache, arbeiteten auf hohem Abstraktionsniveau. Die abstrakte und symbolische Ebene der Geometrie wurden sehr gut beherrscht, auch wenn hier für die Kinder thematisches Neuland betreten wurde. Die Kinder arbeiteten sehr konzentriert, lösten die Aufgaben individuell. Jeder von ihnen wollte eigenständig die jeweilige Konstruktionsaufgabe meistern. Anschließend diskutierten sie im Team. Durch diese Eigenschaften sowie zu beobachtende

> *hohe geistige Aktivität, intellektuelle Neugier, Anstrengungsbereitschaft, Freude am Problemlösen, Konzentrationsfähigkeit, Beharrlichkeit, Selbständigkeit, Kooperationsfähigkeit* (Käpnick 2001, S. 11)

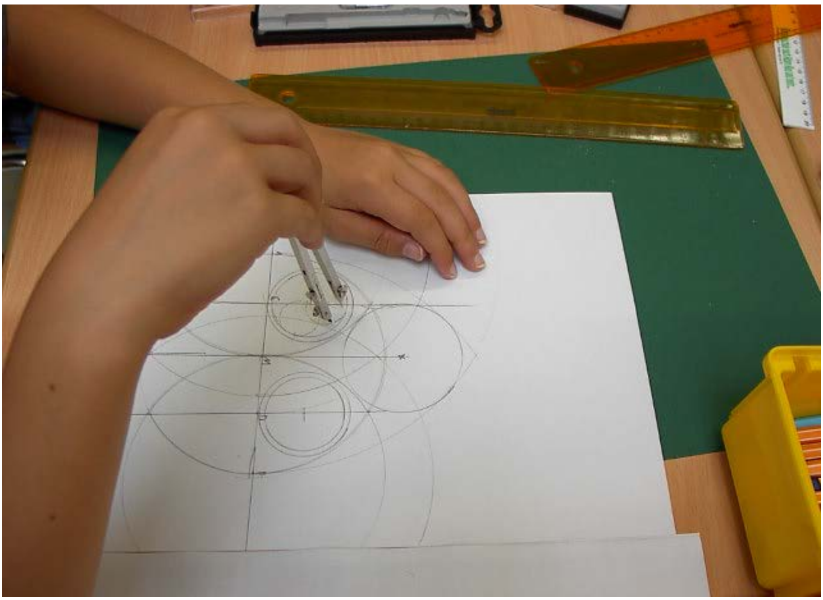


Abb. 7: Konstruktion der Maßverhältnisse im Maßwerkfenster, Schülerarbeit am 2. Projekttag.

hatten die Kinder günstige Voraussetzungen, um sich der umfangreichen und anspruchsvollen Thematik des Maßwerkes zu widmen. Eine wunderbare Arbeitsatmosphäre begeisterte die Kinder und uns.

Variationen im fächerübergreifenden Unterricht

Der Einstieg in mathematische Projekte zum Maßwerkthema kann durch die Komplexität der Architektur dieser Fenster von unterschiedlichen Perspektiven aus gestaltet werden, wobei das ganzheitliche Herangehen sinnvoll ist. Dabei können die Kinder schöne Bauwerke als Ganzes und die faszinierenden Maßwerkfenster als Detail bestaunen. Je nach Differenzierung erwiesen sich

- die sehr kompliziert aussehenden Konstruktionen und die folgenden eigenen Konstruktionen für die mathematisch potentiell begabten Kinder,
- die vom weihnachtlichen Lichterglanz und der Leuchtkraft mittelalterlicher Glasmalereien in gotischen Maßwerkfenstern ausgehenden Kunstbetrachtungen und eigene mit farbigem oder selbst gefärbtem Transparentpapier hinterlegten Scherenschnitte für alle Kinder sowie
- die Variation der Wachskratztechnik mit dem Zirkel ebenso für alle Kinder unabhängig ihrer Leistungsstärke im mathematischen Bereich

als sehr motivierend. Sehr anspruchsvoll sind die Ergebnisse des museumspädagogischen Angebotes im Naumburger Dom, wo im Projekt „Handwerken in der Hütte des Meisters“ ein Maßwerkfenster in der Art des mittelalterlichen Aufrisses konstruiert und anschließend sogar gebaut wurde.

Auswertung und Weiterführung des Maßwerkprojektes

Wir unternahmen zum Thema der mittelalterlichen Maßwerkfenster spannende Ausflüge in die Welt der Geometrie. Ausgangspunkt war die Widerspruchssituation, dass in der Grundschule die Arbeit mit dem Zirkel oft vernachlässigt wird bzw. beim Ausmalen von vorgegebenen Mandalas stehengeblieben wird. Grundschule mit ihrem Bildungsanspruch – der Grundlegung unserer Kulturtechniken – kann aber mehr! Wir suchten nach schönen

Möglichkeiten für die Grundschule und fanden u.a. die Maßwerkfenster als sehr interessantes, spannendes, motivierendes und anspruchsvolles Thema. Die Ergebnisse der fächerübergreifenden Projekte überraschten durch ihre – für das Grundschulalter – hohe Qualität.

Hans Freudenthal begründet die Geometrie:

> *Geometrie als logisches System ist ein Mittel – sie ist das mächtigste Mittel –, Kinder die Kraft des menschlichen Geistes fühlen zu lassen, das heißt die Macht ihres eigenen Geistes.* *(Freudenthal 1973, Band 2, S. 380)*

Die Kinder waren sehr motiviert bei dem ästhetisch schönen Thema, das in Verbindung mit Entdeckungen der Umgebung noch bereichert wurde. Sowohl vom mathematischen (geometrischen) als auch vom künstlerischen Zugang erweist sich das Maßwerkfenster als sehr gut geeignet für den differenzierten Unterricht, so dass alle Kinder sehr schöne Arbeitsergebnisse schaffen können. Individuelle Kreativität, Teamgeist und Lernfreude sind Begleiter des Projektes.

Abb. 8: Kleine Ausstellung: von den Schülerarbeiten bis zu Variationen und Ausblick.

Das Projekt soll weitergeführt werden, um die Aussagekraft der Ergebnisse von bisher nur kleinen Gruppen durch genaue empirische Untersuchungen sowohl quantitativer als auch qualitativer Art besser verallgemeinern zu können. Dazu soll es für den Grundschulunterricht überarbeitet und im Unterricht erprobt werden.

Neben den genannten fächerübergreifenden vielseitigen Möglichkeiten, die Kinder an die Geometrie des Kreises heranzuführen, gibt es noch spannende Erweiterungen wie Fraktale (vgl. Walser 1989, S. 8f.; 2008, S. 5f.), Proportionen, Maßverhältnisse und die mittelalterliche Zahlsymbolik, die allerdings sehr vorsichtig und mit genauer Abgrenzung von esoterischen Ausflügen zu betrachten ist.

Abb. 9: Spitzbögen und filigrane Ornamente. Gotische Maßwerkfenster?
Beispiel für Neogotik: Das neue Rathaus in Erfurt.
(Baubeginn 1869; vgl. Wiegand 1978, S. 110)

Eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen des Projektes ist die eigene Begeisterung und das Engagement des Lehrers für die Geometrie und die Maßwerkthematik. Für den fächerübergreifenden Charakter ist die Zusammenarbeit der Lehrer im Team unter Einbeziehung von Fachkundigen (Museumspädagogen, Denkmalpfleger etc.) sinnvoll, denn das Maßwerkthema ist sensibel zu behandeln, um den Forschergeist der Kinder nicht zu enttäuschen. So muss der Lehrer behutsam (und wissend) mit Neostilen umgehen können: Nicht jedes stolz entdeckte Maßwerk ist über 700 oder 800 Jahre alt; Neogotik und die Restaurationswelle der letzten beiden Jahrhunderte (vgl. Binding 1989, S. 2) spielen uns oft „einen Streich“, siehe Abb. 9.

Das Thema der Maßwerkfenster ist als geometrische Konstruktion, in Schönheit und Variationsvielfalt, im Formenschatz und in der faszinierenden Farbenpracht der inneren Raumwirkung als *Kaleidoskop der Farben* (Bornschein et al. 1999, S. 15) ein so vielseitig fundiertes Projekt, das auf Grundlagen der Geometrie, der Architektur- und Kunstgeschichte, der Geschichte des Mittelalters sowie auf Anschaulichkeit durch Betrachtung vor Ort (am Heimatort bzw. bei Exkursionen) beruht und bereits hiermit auf die Vielfalt der Möglichkeiten des Herangehens verweist. Für die Kinder ist diese fachliche und historische Expedition eine spannende Reise mit großer Motivation und erstaunlich schönen Ergebnissen.

Abb. 10: Meisterwerk der Gotik: Maßwerkfenster im Hohen Chor des Erfurter Mariendomes. (1349 bis 1370/1372 Bau des Hohen Chores; vgl. Bürger 2011, S. 38)

Die an unseren fächerübergreifenden Projekten teilnehmenden Kinder gaben ihrer Begeisterung Ausdruck:

Das war richtig gute Mathematik! Das war toll! So was macht richtig Spaß!
(Aussagen der Kinder: mündliche Projekteinschätzungen)

Wir wünschen allen Interessierten viel Freude und begeisternde Ergebnisse beim Ausprobieren.

Literatur (Auswahl)

Berg, Chr. ; Klafki, W. ; Schulze, Th. (Hrsg.) (2001). Lehrkunstwerkstatt IV. Unterrichtsvariationen. – Dörfler, W. et al.: Menschenhaus – Gotteshaus. Unterrichtsvariationen über den heimatlichen Dom in Nürnberg, Gouda, Bern, Marburg. Neuwied, Kriftel: Hermann Luchterhand Verlag.

Binding, G. (1989). Maßwerk. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Bornschein, F. et al. (1999). Die Glasmalereien von Charles Crodel im Dom zu Erfurt. Leipzig: Edition Leipzig.

Bürger, Stefan (Hrsg.) (2011). Erfurt. Weimar: Verlag und Datenbank für Geisteswissenschaften.

Flachsmeyer, J. et al. (1990). Mathematik und ornamentale Kunstformen. Frankfurt a. Main: Verlag Harri Deutsch.

Franke, M. (2001). Didaktik der Geometrie. Mathematik Primar- und Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Ernst-Klett-Verlag.

Kadatz, H.-J. (1988). Wörterbuch der Architektur. Taschenbuch der Künste. Leipzig: E.A. Seemann Verlag.

Käpnick, F. (2001). Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr. Berlin: Volk und Wissen Verlag.

Lorenz, J. H. (2002). Kinder entdecken die Mathematik. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag.

Müller, G. ; Wittmann, Erich Ch. (1984). Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig; Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlag.

Wagenschein, M. (1999). Verstehen lehren. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Walser, H. (2008). Mathematik für die Sekundarstufe 1. Modul 406. Fraktale. Basel: Universität Basel.

Walser, H. (1989). Fraktale. Seminar über Mathematik und Unterricht. Wintersemester 1989/90. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule.

Wendel, S. (1993). Möglichkeiten der differenzierten Erziehung mathematisch besonders befähigter Schüler im mittleren Schulalter. Ein natürliches Experiment. Frankfurt a. Main: Verlag Peter Lang.

Wiegand, F. (1978). Erfurt. Stadtführer-Atlas. Berlin; Leipzig: Tourist Verlag.

Winter, H. (1991). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Zimmermann, B. (1998). Möglichkeiten zur Förderung kreativen Denkens durch geometrische Probleme von al Sijzi (10. Jahrhundert) mit Unterstützung durch Computer. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. 32. Tagung der GDM in München. Hildesheim; Berlin: Verlag Franzbecker, S. 667-670.

Autorenverzeichnis

Ana Donevska Todorova
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
todorova@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Dr. Michael Gieding
Fach Mathematik
Pädagogische Hochschule Heidelberg
Keplerstraße 87
D-69120 Heidelberg
gieding@ph-heidelberg.de

Diplom-Lehrerin Uta Knyrim
Clara-Zetkin-Straße 106
99099 Erfurt

Prof. Dr. Anselm Lambert
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Postfach 151150
D-66041 Saarbrücken
lambert@math.uni-sb.de

Prof. Dr. Matthias Ludwig
Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik
Goethe-Universität Frankfurt
Senckenberganlage 9
D-60325 Frankfurt
ludwig@math.uni-frankfurt.de

Prof. Dr. Lothar Profke
Fachbereich 07 Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
Justus-Liebig-Universität Gießen
Karl-Glöckner-Str. 21 C
35394 Gießen
Lothar.Profke@math.uni-giessen.de

Prof. Dr. Jürgen Roth
Fachbereich 7, Institut für Mathematik
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Fortstraße 7
76829 Landau
roth@uni-landau.de

Markus Ruppert
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Emil-Fischer-Straße 30
D-97074 Würzburg
ruppert@dmuw.de

Dr. Ralf Wagner
Fachbereich 7, Institut für Mathematik
Universität Koblenz-Landau, Campus Landau
Fortstraße 7
76829 Landau
wagner@math.uni-landau.de

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
hwalser@bluewin.ch
Homepage: www.math.unibas.ch/~walser/

Jan Wörler
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universität Würzburg
Emil-Fischer-Straße 30
D-97074 Würzburg
woerler@dmuw.de

Antonia Zeimetz
Fachbereich Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 151150
66041 Saarbrücken
zeimetz@math.uni-sb.de