Andreas Filler,
Matthias Ludwig (Hrsg.)

Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht

Ziele und Visionen 2020

Vorträge auf der 29. Herbsttagung des
Arbeitskreises Geometrie in der
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken

Andreas Filler, Matthias Ludwig (Hrsg.):
Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht
Ziele und Visionen 2020
AK Geometrie 2012

ISBN

Inhaltsverzeichnis

Editorial

Andreas Filler, Matthias Ludwig

Das Bilden und Einordnen neuer Begriffe ist einer der zentralen Bestandteile des Geometrieunterrichts. Es ist sicherlich nicht übertrieben, zu sagen, dass Begriffsbildung in der Geometrie einen höheren Stellenwert hat als in anderen Bereichen des Mathematikunterrichts. Geometrische Begriffe reichen von Objekt- über Abbildungs- und Relations- bis hin zu Maßbegriffen. Herangehensweisen an Begriffsbildung in der Geometrie haben sich im Verlauf der zurückliegenden Jahrzehnte und Jahrhunderte gewandelt – u. a. hatte der Streit um die Stellung der Abbildungsgeometrie („weg von Euklid“, „zurück zu Euklid“) erhebliche Auswirkungen auf begriffliche Herangehensweisen. Zugleich führen die zunehmende Nutzung von dynamischer Geometriesoftware im Unterricht und in Zukunft die Verwendung von Multi-Touch- und „Wischtechniken“ auf mobilen Geräten zu neuen Erfahrungen von Schülerinnen und Schülern mit geometrischen Objekten und damit zu neuen oder anders gewichteten Begriffsinhalten – unweigerlich wird dies Konsequenzen auf Begriffsbildungsprozesse haben. Der vorliegende Tagungsband befasst sich sowohl mit dem Wandel von Herangehensweisen an geometrische Begriffsbildung im Unterricht in der Vergangenheit als auch mit Erwartungen an die Zukunft: „Ziele und Visionen 2020“.

Verena Rembowski wirft in ihrem Beitrag einen historischen Blick auf die Meraner Reformen sowie die Mathematikmethodik der DDR und stellt anhand unterschiedlicher Zugänge zum Winkelbegriff sowie zu Beweisen des Innenwinkelsatzes verschiedene Ansätze von Begriffsbildung im Geometrieunterricht gegenüber – insbesondere stärker „dynamische“, abbildungsgeometrische Zugänge und eher „statische“ Zugänge anhand von Dreieckskongruenz.

Ebenfalls mit Zugängen zum Winkelbegriff befasst sich der Beitrag von *Christian Dohrmann* und *Ana Kuzle*. Die Autoren geben einen Überblick zur Forschungssituation hinsichtlich der Winkelkonzeptentwicklung sowie über die Einführung dieses Begriffs in Schulbüchern. Im Mittelpunkt ihres Interesses steht dabei, inwiefern dynamische Winkelkonzepte zum Tragen kommen, wozu auch Untersuchungen von Schülervorstellungen beschrieben werden.

Der Beitrag von *Günter Graumann* ist der Begriffsentwicklung bezüglich Koordinaten gewidmet, wobei er vor allem auf die Fundierung des Koordinatenbegriffs in der Grundschule und seinen Ausbau in der Sekundarstufe I eingeht und einen kurzen Ausblick auf Erweiterungen in der Sekundarstufe II und in Hochschulstudiengängen gibt.

In engem Zusammenhang mit der Begriffsentwicklung stehen fundamentale Ideen, auf die *Marie-Christine von der Bank* in ihrem Beitrag eingeht. Nach einer ausführlichen Begriffsklärung und Klassifikation fundamentaler Ideen sowie der Entwicklung eines diesbezüglichen Vernetzungspentagraphen befasst sie sich exemplarisch mit dem Optimieren als fundamentaler Idee.

Mit dem „Problemlösen als einem Weg zu geometrischer Begriffsbildung“ befasst sich der Beitrag von *Ana Kuzle*. Anhand der Begriffe Flächeninhalt und Umfang stellte sie Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht vor.

Methodische Fragen, die im Zusammenhang mit der Begriffserarbeitung stehen, diskutiert *Ysette Weiss-Pidstrygach* in ihrem Beitrag „Begriffsbildung, Stationenlernen oder die Zone der nächsten Stationen“ und stellt entsprechende Lehrkonzepte für die Fachdidaktik innerhalb der Lehramtsausbildung vor.

Vierecke, die interessante Eigenschaften aber keinen eigenen Namen haben und im Haus der Vierecke nicht auftreten, sind Gegenstand des Beitrags von *Hans Walser* „Vergessene Vierecke“.

Elementar- und analytisch-geometrische Herangehensweisen verbindet der Beitrag von *Dörte Haftendorn* „Wohin führen Ortskurven?“. Die Autorin führt an Beispielen aus, dass sich mathematisch relevante Begriffe und Handlungsweisen bei der Arbeit mit Ortskurven „wie von selbst“ ergeben können.

Begriffsbildung – „Los von Euklid!“ und wieder zurück?

Verena Rembowski

Zusammenfassung. „Los von Euklid!“ war ein zentrales Leitmotiv des geometrischen Unterrichts der Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge und der darauf zurückgreifenden Reformen um den RICHERTschen Lehrplan. Geprägt durch einen an der Oberfläche propädeutischen Blick auf zu lernende Begriffe und einen handelnden, operativen Zugang mit Fokus auf Bewegungsvorstellungen scheint sich Begriffslernen durch ein Ansetzen bei den Lernenden auszuzeichnen. Geometrieunterricht auf der Grundlage der mengentheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts in der Mathematikmethodik der DDR hingegen war stark fachwissenschaftlich geprägt, deduktiven Vorgehensweisen wurde eine sehr hohe Bedeutung zugemessen. Daher stellt sich die Frage, inwieweit aufgrund dessen von einer Orientierung „Zurück zu Euklid“ gesprochen werden kann. Im Folgenden werden ein Überblick über den Geometrieunterricht betreffende didaktische Kernideen sowie Grundlagen des Begriffslernens in der Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge und den Reformen um den RICHERTschen Lehrplan sowie in der mengentheoretischen Fundierung gegeben, anhand von Lehrbüchern analysiert und Vergleiche zwischen diesen Epochen angestellt.

Die Einleitung

Die Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge von 1905 zeichnete sich, mit Bezug zum Geometrieunterricht, unter anderem durch eine „Los von Euklid!“- Bewegung[1] aus. Die jene Bewegung prägenden Ideen wurden mit den Meraner Vorschlägen von 1905 entwickelt, mit den revidierten Meraner Lehrplänen von 1922 neubearbeitet vorgelegt und mit dem RICHERTschen Lehrplan von 1925 erstmals in einen staatlichen Lehrplan Preußens aufgenommen. Auch durch ein gesteigertes Bewusstsein für solche Ideen unter schulpolitischen Einflussträgern sowie Mathematiklehrkräften selbst konnte die „Los von Euklid!“-Bewegung intensiviert werden. Die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts in der Mathematikmethodik der DDR zeichnete sich allgemein durch eine strenge Organisation des Mathematikunterrichts aus. Einhergehend damit war der Geometrieunterricht wesentlich durch deduktive Vorgehensweisen geprägt, die

[1] Die Formel „Los von Euklid!“ geht auf gleichnamiges Lehrwerk von WILHELM KUSSEROW zurück (vgl. Kusserow 1985, im Original 1928), entwickelte sich aber zu einer die jeweilige Epoche (mit ihren Unterepochen) charakterisierenden Formel.

historisch mit der griechischen Mathematik (von THALES bis EUKLID) verknüpft sind.

Geometriedidaktik im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans sowie in der mengentheoretischen Fundierung zeichnen sich damit durch sehr unterschiedliche, wenn nicht sogar gegensätzliche, Konzeptionen aus. Die Unterschiede inhaltlicher und methodischer Ideen mit Bezug auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht in den betrachteten Epochen, die doch nur eine Generation entfernt sind, verdeutlichen, dass Begriffsbildung immer von normativen Setzungen geprägt ist. Außerdem wird deutlich, dass die betrachteten unterschiedlichen Epochen der Mathematikdidaktik durch eine gewisse Systemträgheit auffallen. Es waren sowohl viele im Umfeld der Meraner Vorschläge genannten Ideen und Forderungen erst in Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan umgesetzt, als das auch konkrete didaktische Errungenschaften der Mathematikmethodik nicht unmittelbar umgesetzt waren. Es bedarf damit zunächst einer Begriffsbildung von Begriffsbildung im Geometrieunterricht, bevor Begriffsbildung im Geometrieunterricht weiter thematisiert werden kann, und es muss sich einer Umsetzung von didaktischen Konzeptionen in der Unterrichtsrealität explizit und in einem realistischen Zeitrahmen gewidmet werden.[2]

Im Rahmen der Untersuchung, ob Geometrieunterricht, und dabei vor allem Begriffsbildung im Geometrieunterricht, im Umfeld der Meraner Vorschläge sowie des RICHERTschen Lehrplans und in der mengentheoretischen Fundierung wirklich in diesem Sinne gegenübergestellt werden können, wird zunächst auf die beiden genannten Epochen isoliert eingegangen. Dabei wird jeweils zuerst die Epoche historisch eingebettet, bevor auf prägende inhaltliche und methodische Ideen, sowohl allgemein mathematikdidaktischer Art als auch mit direktem Bezug zur Begriffsbildung, eingegangen wird. Zudem wird die mögliche und intendierte Unterrichtsrealität, wie sie durch Methodiken propagiert wird und in Lehr- beziehungsweise Schulbü-

[2] Die hier genannten didaktischen Epochen lassen sich durch schulpolitische Reformbestrebungen (Meraner Vorschläge und revidierte Meraner Lehrpläne) bzw. Reformen (Lehrplanreform von 1925, Gründung der Akademie der pädagogischen Wissenschaften der DDR sowie Lehrplanreform zwischen 1965 und 1972) voneinander abgrenzen. Die Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge lässt sich dabei in die Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge sowie in die Reformen im Umfeld des RICHERTschen Lehrplans unterteilen.

chern manifestiert ist, exemplarisch illustriert. Dazu werden jeweils die Behandlung des Winkelbegriffs und der Beweis des Winkelsummensatzes[3] herangezogen, sowie ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis der Lehr- beziehungsweise Schulbücher geworfen. Letztlich werden Begriffsbildung im geometrischen Unterricht im Umfeld der Meraner Vorschläge sowie des RICHERTschen Lehrplans und Begriffsbildung im Geometrieunterricht in der mengentheoretischen Fundierung einander gegenüber gestellt.

Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge

Die Entwicklung der Reformbewegung

Bis in das 19. Jahrhundert waren EUKLIDs Elemente verbreitete Basis des Geometrieunterrichts. Auch wenn laut HEINRICH SCHOTTEN im Jahr 1890 nicht mehr nach den Elementen als Lehrbuch unterrichtet wurde, so wurde doch „im wesentlichen Euklidsche Geometrie, insbesondere was die Methode betrifft“, unterrichtet (Schotten 1890, S. 10f). Euklidische Geometrie[4] meinte Kongruenzgeometrie und bedeutete, dass die Abfolge des Geometrielehrgangs durch Folgerichtigkeit in einem axiomatischen Aufbau begründet war, was heißt, dass ein Gerüst zu Grunde lag, in dem Sätze sich aus früheren Sätzen durch logisch-deduktive Schlüsse ableiten ließen. Euklidische Geometrie bedeutete außerdem, mit Bezug zur Methode, dass der Geometrielehrgang nicht durch eine Propädeutik vorbereitet wurde und dass dogmatische Lehrervorträge vorherrschend waren (vgl. Schotten 1890).[5]

Mitte des 19. Jahrhunderts kam Kritik an den Zuständen des damaligen Mathematikunterrichts auf,[6] und es wurde eine Anpassung des Mathematikun-

[3] Hier wird ausschließlich der Beweis des Innenwinkelsatzes betrachtet.

[4] Im Folgenden werden die verschiedenen, hier genannten Aspekte als typisierende Bestandteile euklidischer Geometrie gesehen.

[5] Am Ende eines Absatzes zu findende Verweise beziehen sich jeweils auf den gesamten Absatz.

[6] Schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde durch JOHANN H. PESTALOZZI und ADOLF DIESTERWEG Kritik an einem an EUKLID ausgerichteten Geometrielehrgang für die Volksschule geäußert. Viele der Mitte des 19. Jahrhunderts mit Bezug auf den Geometrieunterricht der höheren Schulen kritisierten Punkte stimmen mit diesen schon früher an Volksschulen entdeckten Missständen überein, was ebenso für die formulierten Ziele gilt (vgl. Zeimetz 2011).

terrichts an die damals aktuellen Aufgaben der Schule gefordert. In Folge dessen wurden inhaltliche und methodische Reformansätze entwickelt, es kam aber auch zur Äußerung von „utopischen Wünschen“ (vgl. Gutzmer 1906, S. 142). Die Reformideen spiegelten sich schon relativ bald in Lehrbüchern wider, beispielsweise in dem Ende des 19. Jahrhunderts herausgegebenen *Lehrbuch der Elementargeometrie* von JULIUS HENRICI und PETER TREUTLEIN. Allerdings hatten die inhaltlichen und methodischen Reformansätze zunächst nur geringe Wirkung, und der Unterricht blieb weitestgehend an älteren Lehrbüchern ausgerichtet (vgl. Gutzmer 1906; Henrici & Treutlein 1891; Schotten 1890).

Der preußische Lehrplan von 1901 zeigt in seinen methodischen Bemerkungen dann aber schon Neuerungen gegenüber vorherigen Lehrplänen. So sollte der geometrische Unterricht mit einem Vorbereitungsunterricht beginnen, in dem vor allem das Anschauungsvermögen der Lernenden geschult werden sollte. Auch insgesamt sollte Anschaulichkeit betont und die Selbsttätigkeit der Lernenden gefördert werden. Allerdings blieben planimetrische und stereometrische Betrachtungen noch stark voneinander getrennt, und der Fokus war weiterhin auf statische Aspekte der Geometrie gelegt. Damit wurde der Unterricht der traditionellen euklidischen Geometrie in wenigen Punkte im Sinne neuerer didaktischer Vorstellungen reformiert, blieb aber dem System nach weitestgehend bestehen (vgl. Inetveen 1976; Lehrplan 1901; Schotten 1890).

Der Lehrplan von 1901 entsprach allerdings nicht den Vorstellungen von FELIX KLEIN. Daher trat dieser verstärkt mit Vertretern von Schule und weiteren Vertretern der Hochschule, auch aus naturwissenschaftlichen Fächern, in Kontakt. Die Gruppe um KLEIN veröffentlichte im Folgenden in Form verschiedener Abhandlungen ihre Reformideen bezüglich des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts und engagierte sich für die Einsetzung der sogenannten Unterrichtskommission unter dem Vorsitz von AUGUST GUTZMER durch die Naturforscherversammlung von Breslau im Jahr 1904. Diese Kommission arbeitete in verschiedenen Besprechungen dann die Vorschläge aus, welche im Jahr 1905 der Naturforscherversammlung in Meran vorgelegt wurden (vgl. Gutzmer 1906; Lietzmann 1930). [7]

[7] Zu den Meraner Vorschlägen siehe den Absatz „Die Meraner Vorschläge konkret“.

Die nach dem Ort der Versammlung benannten Meraner Vorschläge enthielten allgemeine Leitsätze, die sich sowohl gegen eine einseitig sprachlich-geschichtliche als auch gegen eine einseitig mathematisch-naturwissenschaftliche Bildung aussprachen. Sie betonten damit ein Prinzip der Allgemeinbildung[8] für die Schule und erklärten außerdem die Gleichberechtigung der höheren Schulen für notwendig. Weiterhin enthielten die Meraner Vorschläge Lehrpläne für das Gymnasium für die Fächer Mathematik, Physik, Chemie und Biologie. In dem mathematischen Lehrplan wurden Gedanken aufgenommen, die schon in dem preußischen Lehrplan von 1901 angedeutet waren und die bereits als Allgemeingut unter Lehrkräften bezeichnet wurden, wobei als solche Gedanken für den Bereich der Geometrie das Prinzip der propädeutischen Behandlung, das Betonen der Anschauung und von praktischen Anwendungen sowie die Fusion von Stereometrie und Planimetrie zu nennen sind. Gegen den Einbau des Funktionsbegriffs in geometrischem Gewand schon von den mittleren Klassen an und die Einführung der Infinitesimalrechnung in der Oberstufe wurde allerdings Einwand erhoben, weswegen dieser Vorschlag relativiert und den einzelnen Lehrkräften viel Entscheidungsfreiheit eingeräumt wurde (vgl. Gutzmer 1906; Lietzmann 1955).

Nach Veröffentlichung der Meraner Vorschläge wurden diese positiv durch die Regierungen aufgenommen. Die Vorschläge wurden daher mit Erlaubnis des preußischen Ministeriums der geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten in einigen Schulen implementiert und damit erprobt. Außerdem wurden neue Didaktiken und Methodiken herausgegeben sowie Lehrbücher im Sinne der Meraner Vorschläge verfasst. Darüber hinaus wurde ein allgemeiner Unterrichtsausschuss eingesetzt, dessen Aufgabe es war, in einem erweiterten Rahmen die Durchführung der Reform zu betreiben. Trotz allem wurden jedoch auch weiterhin Didaktiken und Methodiken sowie Lehrbücher, welche auf den traditionellen preußischen Lehrplänen aufbauten und in welchen der Stoff die Anordnung beeinflusste, veröffentlicht (vgl. Lietzmann 1955).

[8] Das durch die Meraner Vorschläge institutionalisierte Prinzip der Allgemeinbildung bedeutete, dass die Kenntnisse des Menschen in verschiedenen Bereichen miteinander in Beziehung gesetzt werden müssen, und dass Denken vernetzt werden muss. So wurde auch die Bedeutung der Mathematik als Kulturfaktor, der in Verbindung zu anderen Wissenschaften und dem praktischen Leben steht, herausgehoben (vgl. Schülke 1906).

Kritik an der Unterrichtsrealität konkret

Schon in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde explizit Kritik an der damaligen Unterrichtsrealität geäußert. So äußert Oberlehrer LUDWIG KAISER in dem Jahresbericht seiner Schule:

> So war es nicht zu verwundern, wenn trotz aller Definitionen und Deduktionen – um mit Kant zu reden – die Begriffe ohne die Anschauung leer blieben, wenn folglich die Lust und Liebe, welche der unbefangene Schüler der Geometrie nicht weniger wie jedem andren neuen Unterrichtsgegenstande entgegenbringt, gleich zu Anfang erstickt werden musste. (Kaiser 1881, S. 4)

Ausgehend von dieser Kritik an der in einem von der deduktiven Methode geprägten Unterricht begründeten Begriffsbildung fordert KAISER weiterhin, dass der Geometrieunterricht mit einem propädeutischen Unterricht beginnen soll, in welchem von der Betrachtung konkreter Körper- und Raumformen ausgegangen werde (vgl. Kaiser 1881).

Dass eine solche Betrachtung von Körpern im Raum zur wirklichen Begriffsbildung nicht ausreicht, sondern dass stattdessen ein Begreifen der Körper notwendig ist, erläutert Alois Höfler in seiner Methodik etwa 30 Jahre später (Abb. 1 & 2).

Ein geometrischer Lehrtext, wie er *nicht* sein soll.

1. Betrachtung des Würfels.)*

§ 1. Der Würfel (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Der Würfel ist ein Körper [2].

Der Würfel ist nach drei Hauptrichtungen ausgedehnt, von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben. Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge [3]*, die von vorne nach hinten Breite* [3] *und die von unten nach oben Höhe* [3].

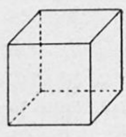


Fig. 1.

Jeder Körper hat drei [4] *Hauptausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke).*

Abb. 1: Beispiel lebensfremder Begriffsbildung aus Höfler 1910, S. 89

Pädagogische Einwendungen gegen einen solchen Lehrtext.

Schon daß hier der Würfel einfach vor den Schüler hingestellt wird, ohne daß dieser Gelegenheit hat, etwas mit ihm zu machen, ist ein Beispiel dafür, daß der Begriff des „Anschauungsunterrichtes“ viel zu eng genommen wird. Hier heißt „anschauen“ wirklich nur so viel wie „anstarren“. Doch darüber ein mehreres später (S. 93, 94 u. a.). Wenn es nun aber heißt, daß eine [1] Fläche des Würfels dem Auge des Schülers zugewendet ist und dann doch zugleich die Fig. 1 im Schrägbilde drei Flächen zeigt, wobei weder diese Schrägdarstellung noch die drei punktierten Linien irgendwie für das Verständnis des Schülers vorbereitet sind („der betrachtete Würfel aus Holz, Pappe oder Blech“ zeigt ja natürlich nichts jenen punktierten Linien Entsprechendes), so macht all das sogleich den Eindruck des Konventionellen, Leblosen.

Im § 1 steuert alles vor allem auf den Begriff des Körpers [2] zu. Daß mit diesem Worte der Schüler wahrscheinlich von vornherein die Vorstellung seines eigenen Körpers, seines Leibes, verbindet, wird nicht bedacht.

So spricht vom ersten Augenblick an das Buch eine andere Sprache als die des lebendigen Schülers und ladet schon hierdurch diesen zum tödlichen Auswendiglernen ein. Wäre hierdurch dem Schüler das Denken nicht schon beim zweiten Absatz ausgetrieben, so müßte ihn dieser zweite Satz „Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge [3], die von unten nach oben Höhe“ zum Einwand reizen: aber bei mir selber, der ich 150 cm lang bin, erstreckt sich doch gewöhnlich (nämlich wenn ich stehe und nicht liege) diese Länge von unten nach oben. Und da im dritten Absatz auch der Begriff der Dicke eingeführt wird, so müßte der vorwitzige Jüngling wieder sagen, daß sich bei ihm gerade diese Dicke „von hinten nach vorn erstreckt“. Aber nein – diese „Hauptrichtung“ heißt in der Geometrie just wieder „Breite“. Dagegen die Schulterbreite, die von rechs nach links, heißt in der Geometrie „gewöhnlich Länge“. Doch wir vergessen ja bei diesen heiteren Diskrepanzen, daß sich der Schüler das Denken an etwas Wirkliches schon beim ersten Aufschlagen des Geometriebuches abgewöhnt hat, und wir haben also gar nicht zu fürchten, daß er sich durch einen solchen Lehrtext irgendwie belustigt fühle.

Abb. 2: Ausführungen zu lebensfremder Begriffsbildung aus Höfler 1910, S. 91f

HÖFLER weist hier zunächst auf die Gefahren einer zu wörtlichen Auslegung von „Betrachtung“, die zu einer sehr oberflächlichen und nicht durch Verständnis geprägten Begriffsbildung führt, hin. Zudem spricht er die Gefahren einer unreflektierten Verwendung in der Mathematik üblicher Bezeichner[9] an, die eine alltagsfremde, weil an mathematische Begriffskonventionen gebundene, Begriffsbildung bedingt.[10]

Die Meraner Vorschläge konkret

Die laut dem Bericht der Unterrichtskommission, welche die Meraner Vorschläge verfasst hat, wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts sind insbesondere auch für den Geometrieunterricht relevant:

> Unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik muß auf einseitige und praktisch wertlose Spezialkenntnisse verzichtet, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen geweckt und gekräftigt werden. Demgemäß stellt die Kommission die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens als wichtigste Aufgaben des Mathematikunterrichts hin. Dabei bleibt die Pflege der logischen Schulung nicht nur unbeeinträchtigt, sondern sie wird bei der gekennzeichneten Richtung des mathematischen Unterrichts noch gewinnen. (Gutzmer 1906, S. 146)

Die hier genannten Ziele der Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens sowie der Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens[11] deu-

---

[9] Als zentrale Vokabeln mit Bezug zur Begriffsbildung werden hier „Begriff“ (konstituiert durch Begriffsinhalt und -umfang, durch eine logische Definition/Konvention oder Repräsentanten) und „Bezeichner“ (Begriffsnamen oder –wort) nach Lambert (2012) verwendet.

[10] HÖFLER spricht hier implizit bereits das Problem einer an einem einzigen Prototyp orientierten Begriffsbildung an, was einen Vergleich mit der Prototypentheorie von ROSCH erlaubt (vgl. Rosch 1983, für weitere Beispiele vgl. Lambert 2010). HÖFLERS Ausführungen können auch durch die Theorie subjektiver Erfahrungsbereiche (vgl. Bauersfeld 1983) erklärt werden.

[11] Die im Umfeld der Meraner Vorschläge geäußerte Forderung nach einer Erziehung zum funktionalen Denken ist verwandt mit dem von ERICH CH. WITTMANN formulierten operativen Prinzip:

> Objekte erfassen bedeutet, zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, …) ausgeübt werden. Daher muß man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise
>
> (1) Untersuchen, welche Operationen ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,

ten auf eine wirkliche Reformierung des Mathematikunterrichts hin. Sie beeinflussen weiterhin die Behandlung geometrischer Begriffe und das Führen geometrischer Beweise im Unterricht und haben somit eine direkte Implikation auf Begriffsbildung in der Geometrie.

Doch FELIX KLEIN relativiert in seiner Elementarmathematik diese beiden, die wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts genannten Punkte:

> Die <u>Darstellung auf der Schule</u> muß nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, <u>psychologisch, nicht systematisch</u> sein. Der Lehrer muß sozusagen ein wenig Diplomat sein, er muß auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen zu können und das wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in <u>anschaulich faßbarer Form</u> darbietet. Erst auf den oberen Klassen ist auch eine abstraktere Darstellung möglich. […]
>
> In dieser Art aber sollte auch überhaupt im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft gehalten werden mit allem, was den Menschen gemäß seinen sonstigen Interessen bewegt, und was nur irgend in Beziehung zu ihr sich bringen läßt. Das ist es ja was die neuen Bestrebungen zur Hervorhebung der <u>angewandten Mathematik</u> auf der Hochschule mit bezwecken […].[12] (Klein 1908, S. 8f)

KLEIN schreibt demnach, dass psychologisches, anschauliches Vorgehen, was auch durch die Aufgaben der Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens angedeutet wird, bedeutet, dass die Mathematik mit der Lebenswelt der Lernenden verknüpft werden muss. Er führt weiterhin aus, dass dies Ziel der angewandten Mathematik auf der Hochschule sei.

Zu Beginn des Berichts der Unterrichtkommission selbst wird ebenfalls auf die angewandte Mathematik verwiesen:

> Auf Seiten der Mathematik war schon seit vielen Jahren eine Bewegung im Flusse, die eine vertiefte und lebendigere Auffassung des eigentlichen Gedan-

---

(2) Herausfinden, welche Eigenschaften und Beziehungen den Objekten durch Konstruktion aufgeprägt werden,

(3) Beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben (Was geschieht mit …, wenn…?) (Wittmann 1985)

Funktionales Denken unterscheidet sich jedoch von dem operativen Prinzip dadurch, dass beim funktionalen Denken mit Anfangs- und Endzustand die Zweiseitigkeit des Betrachteten sowie Detailanalysen höhere Bedeutung haben (vgl. Führer 1985).

[12] Hervorhebungen in Zitaten entsprechen ausschließlich den Quellen.

> keninhalts der Mathematik und eine verstärkte Berücksichtigung der Anwendungen verlangte […], um der stetig wachsenden Bedeutung der Mathematik und ihrer Methoden für unsere Gesamtkultur, insbesondere die theoretische Naturwissenschaft, die Technik und das Verkehrswesen, das soziale und wirtschaftliche Leben (Versicherungswesen) in geeigneter Weise Rechnung zu tragen. (Gutzmer 1906, S. 142)

Dieser Ausschnitt sowie weitere Ausführungen von KLEIN in dessen Elementarmathematik und dessen Bemerkungen zur Schulkonferenz verdeutlichen, dass es primäres Ziel der Hochschulvertreter um KLEIN war, die Rolle der angewandten Mathematik auf der Hochschule zu stärken (vgl. Klein 1904 & 1908). Lediglich eine Unterstützung dafür scheinen die Forderungen nach Erziehung zum funktionalen Denken und Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens zu sein (vgl. Führer 2012).

Der in den Meraner Vorschlägen beinhaltete Lehrplan[13] weist mit Bezug zur Geometrie dennoch innovative Elemente auf. So wird als Geometrieunterricht in der Quinta gerade eine propädeutische Raumlehre[14] gefordert, die erst in der Quarta hinter sich gelassen werden soll. Genauer heißt es:

Propädeutische Raumlehre. Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, dass der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint. Raumausdehnungen, Flächen, Linien, Punkte zunächst an der Umgebung erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zunächst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. Übung im Gebrauche des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen.

Abb. 3: Meraner Lehrplan für die propädeutische Raumlehre in der Quinta aus Gutzmer 1906, S. 159

---

[13] Der in den Meraner Vorschlägen beinhaltete Lehrplan wird im Folgenden Meraner Lehrplan genannt.

[14] Der Bezeichner „Raumlehre“ wurde im Umfeld der Meraner Vorschläge mit leicht voneinander abweichenden Bedeutungen verwendet. Meist wurde er nur bezogen auf den Geometrieunterricht der Volksschule sowie den geometrischen Vorbereitungsunterricht der höheren Schulen verwendet (vgl. Lietzmann 1916 & 1985, im Original 1912), im Meraner Lehrplan wird der Geometrieunterricht allerdings allgemein als Raumlehre bezeichnet. In diesem Beitrag wird der Bezeichner „Raumlehre“ nur mit Bezug zur Volksschule oder zu den diesen Bezeichner enthaltenden Quellen verwendet.

Raumlehre. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Beweglichkeit der Figuren; Abhängigkeit der Dreiecksstücke von einander; Übergangsfälle (rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige, gleichseitige). Einfache Parallelogrammsätze, ausgehend von der Konstruktion der Gebilde.

Abb. 4: Meraner Lehrplan für die Raumlehre in der Quarta aus Gutzmer 1906, S. 159

Hier wird deutlich, dass in der propädeutischen Raumlehre der Zusammenhang zu dem lebensweltlichen, dreidimensionalen Raum auch bei planimetrischen Betrachtungen erhalten bleiben soll. Dennoch zeigt besonders die Formulierung „dass der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint“ schon eine Betonung ebener Geometrie. Mit Beginn des Raumlehreunterrichts der Quarta ist der Übergang in die ebene Geometrie abgeschlossen. Darüber hinaus ist vor allem in der Quarta eine Hervorhebung von Beweglichkeiten, Abhängigkeiten und Übergangsfällen vorhanden.

Begriffsbildung im Umfeld der Meraner Vorschläge

In Anschluss an die Meraner Vorschläge wurden einige Methodiken, die auf den Inhalt der Meraner Vorschläge zurückgreifen, veröffentlicht. Als solche Methodiken sind speziell für den propädeutischen Geometrieunterricht Peter Treutleins *Der geometrische Anschauungsunterricht* sowie allgemein Alois Höflers *Didaktik des mathematischen Unterrichts* zu nennen. Jene Werke unterscheiden sich von Didaktiken wie Friedrich Reidts *Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen*, Karl Schwerings *Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer* und Max Simons *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*, in denen viele der im Folgenden genannten Reformideen auch schon erwähnt sind, noch dadurch, dass didaktische Gesichtspunkte an Stelle des Stoffs die Anordnung beeinflussen (vgl. Schotten 1910). Wilhelm Killing und Heinrich Hovestadts *Handbuch des mathematischen Unterrichts* in zwei Bänden enthält neben einer Methodik auch eine Kritik der Unterrichtsrealität. Darüber hinaus beschäftigt Walther Lietzmann sich in seiner umfassenden, schließlich dreibändigen *Methodik des mathematischen Unterrichts*, deren zuerst erschienener Band *Didaktik der einzelnen Unterrichtsgebiete* 1916 herausgegeben wurde, sowohl mit inhaltlichen als auch mit unterrichtsorganisatorischen, methodischen und psychologischen Fragen.[15] Die hier genannten Werke stimmen hinsichtlich der in Ihnen thematisierten, im Folgenden genannten inhaltlichen und methodischen Kernideen mit weiterem und engerem Bezug zur Begriffsbildung überein und dienen als Quelle folgender Ausführungen, sofern keine gesonderte Quelle ausgewiesen ist (vgl. Höfler 1910; Killing & Hovestadt 1910 & 1913; Lietzmann 1916; Reidt 1906; Schwering 1907; Simon 1985, im Original 1908; Treutlein 1985, im Original 1911). [16]

Zunächst bilden allgemeine inhaltliche Ideen den Rahmen, in dem Begriffsbildung im Mathematikunterricht, laut im Anschluss an die Meraner Vorschläge entstandenen Methodiken, stattfinden soll. So wird eine gegenseitige Durchdringung von Geometrie und Arithmetik zu Grunde gelegt. Dies zeigt sich in der Forderung nach häufiger Verwendung geometrischer Veranschaulichungen und graphischer Verfahren im Arithmetikunterricht, die auch die Möglichkeit bieten sollen, Einsicht in funktionale Zusammenhänge zu erhalten, und in der Ergänzung und Begleitung des Geometrieunterrichts durch Koordinaten und analytische Formeln (vgl. auch Krüger 2000).

Weiterhin wird, wie auch schon der Meraner Lehrplan zeigt, ein propädeutischer Geometrieunterricht im Sinne eines „Anschauungsunterrichtes“ propagiert, der an die schon aus dem Alltag der Lernenden vorhandenen Raumvorstellungen nutzbringend anknüpft und die Voraussetzungen für

---

[15] Obwohl LIETZMANNS Band *Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts* 1919 erst als zweiter Band des Werkes herausgegeben wurde, bezifferte LIETZMANN ihn als den 1. Teil und zuerst herausgegebenen Band als 2. Teil. Dies spiegelt die Wertstellung wider, die LIETZMANN organisatorischen, methodischen und technischen Fragen zuwies. Der Band *Didaktik der angewandten Mathematik* wurde als dritter Teil des Werkes erst im Rahmen der zweiten Auflage der beiden anderen Bände veröffentlicht und KLEIN gewidmet. In diesem Beitrag wird aus Relevanzgründen ausschließlich auf zuerst erschienenen Band *Didaktik der einzelnen Unterrichtsgebiete* Bezug genommen.

[16] Trotz der im Folgenden genannten groben Übereinstimmungen der genannten Werke setzten die entsprechenden Autoren doch auch unterschiedliche Akzente. So gab es Unterschiede hinsichtlich des geforderten Umfangs des Geometrieunterrichts allgemein und auch speziell des propädeutischen Unterrichts. Darüber hinaus gab es unterschiedliche Abstufungen mit Bezug auf die Intensität der geforderten Fusion von Stereometrie und Planimetrie und Variationen im geforderten Ausmaß des Anknüpfens an das Umfeld der Lernenden sowie des handelnden Umgangs mit Modellen. Auch standen einige Autoren den Meraner Vorschlägen kritischer gegenüber als andere. Allerdings sollen diese Unterschiede hier nicht weiter analysiert werden.

den späteren Geometrieunterricht legt. So ist vor allem für diesen propädeutischen Geometrieunterricht handelnder Umgang mit Modellen vorgesehen. Mit Hinblick auf die geometrische Begriffsbildung soll Abstraktionsfähigkeit aufgebaut werden, was bedeutet, dass von allen Eigenschaften der Körper außer der Gestalt abstrahiert werden soll. Als Hilfsmittel diesbezüglich sind für jeden Körper verschiedene Modelle vorgesehen, die sich durch verschiedene Größe, Herstellung aus unterschiedlichen Materialien und verschiedene Farbe voneinander unterscheiden. Es wird betont, dass die Modelle nicht speziell für den Unterricht hergestellt sein müssen und auch alltägliche Körper oder Figuren eingesetzt werden können. Unmittelbar verknüpft mit der Einführung eines propädeutischen Geometrieunterrichts ist die geforderte Fusion von Stereometrie und Planimetrie, die in einer Progression des geometrischen Unterrichts von der Stereometrie, als der Erfahrungswelt der Lernenden, zur Planimetrie konstituiert ist.

Schließlich wird, wie ebenfalls ansatzweise in dem Meraner Lehrplan zu erkennen ist, versucht, eine „beweglichere Geometrie“ in den Schulunterricht einzuführen. Dieser Bezeichner dient hier zur Abgrenzung von dem sehr weit verwendeten Bezeichner „neuere Geometrie“[17], und bezieht sich darauf, dass Kongruenzabbildungen die Kongruenzsätze als Beweismittel ersetzen, dass funktional dynamisch im Gegensatz zu statisch vorgegangen wird, dass an Stelle von Einzelheiten Beziehungen zwischen Figuren betrachtet, Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten untersucht werden sowie dass Veränderlichkeit und Beweglichkeit sowie Verformungen von Körpern und Figuren stark betont werden. Oft sind auch mehrere dieser Gesichtspunkte miteinander verwoben, wobei darauf hingewiesen wird, diese mit der beweglicheren Geometrie assoziierten Vorgehens- und Vorstellungsweisen anhand von Modellen und möglichst viele Gelegenheiten nutzend auszubilden (vgl. auch Bender 1982; Krüger 2000).

Mit direktem Bezug zur Begriffsbildung, und auch Beweisführung, ist von Bedeutung, dass induktives Vorgehen lange und stark legitimiert wird. Dieses Vorgehen bedeutet für Begriffsbildung, dass Körper oder Figuren aus

[17] Der Bezeichner „neuere Geometrie“ kann auch bedeuten, dass projektive Geometrie gegenüber euklidischer Geometrie bevorzugt wird, dass analytische Geometrie zurückgedrängt wird, oder dass der Gruppenbegriff verwendet und Abbildungsgruppen untersucht werden (vgl. Bender 1982).

anderen Körpern oder Figuren operativ hergeleitet werden, und dass nicht möglichst allgemeine Körper oder Figuren vorangestellt werden.[18] Induktives Vorgehen meint weiterhin, dass von verschiedenen Fällen ausgehend auf die Verallgemeinerung hingeführt, statt von einem Fall ausgehend verallgemeinert, wird.[19]

Es sollen Übergangsfälle betrachtet und Grenzen herausgearbeitet werden, was unmittelbar einen Fokus auch auf das im Unterricht herzustellende Begriffsnetz impliziert. Zu diesem Zweck sind die Unterteilung von Begriffen in Unterbegriffe sowie gelegentliche Übungen im Über- und Unterordnen auftauchender Begriffe vorgesehen. In diesem Zusammenhang ist auch von Bedeutung, dass Begriffe anschaulich verstanden werden und Bezeichner zu nutzen gelernt werden, und dass aus diesem Grund Definitionen als Selbstzweck und der damit verbundene Schein, Definitionen würden nur rein willkürlich vorgenommen, sowie Definitionsfehler und versteckte Behauptungen in Definitionen vermieden werden. Schließlich ist ein insgesamt logischer Aufbau des Begriffssystems vorgesehen. Das bedeutet, dass Begriffe auseinander hergeleitet werden, und dass, auch durch die Betonung von Beziehungen zwischen Begriffen, ein wirkliches Bedürfnis nach Begriffserweiterung sowie ein Grund, einen Begriff auf eine bestimmte Weise und nicht anders zu erweitern, entstehen sollen.

Zudem dürfen Beweise auf Veranschaulichungen von Begriffen und derer Beziehungen untereinander begründet sein, womit bei der Weiterentwicklung eines Sachverhalts Lernenden die einen Satz legitimierende Allgemeinheit eines Beweises verdeutlicht wird. Es soll nicht das Gefühl vorausgehenden ungenauen oder lückenhaften Arbeitens gegeben werden, weswegen einer anschaulichen Begründung nicht unmotiviert ein deduktiver Beweis nachgeschoben werden darf. Weiterhin sollen Beweise sukzessive, unter Betonung der verwendeten Heuristiken, entwickelt, statt als Produkt gegeben werden, um für Beweisen notwendige prozessuale Fähigkeiten aufzubauen. Darüber hinaus soll ein Bedürfnis nach logischer Strenge entwi-

---

[18] Aus diesem Grund wird induktives Vorgehen mit Bezug zur Begriffsbildung im Folgenden als operativ induktives Vorgehen bezeichnet.

[19] Einem solchen induktiven Vorgehen liegen die Legitimationsmethoden der Naturwissenschaften zu Grunde, entsprechend derer mittels Beobachtungen und Experimenten geschlossen wird (vgl. Lietzmann 1916 & 1985, im Original 1912).

ckelt werden, im Zuge dessen auch die logische Terminologie nach und nach aufgebaut wird.

Insgesamt soll die logische Schulung also auf einem Weg stattfinden, der bei einfachen Begriffszu-, Über- und Unterordnungen startet und erst schrittweise zu Aufgaben im Definieren und Beweisen führt. Ab der Quarta soll deduktives Denken dann nach und nach entwickelt werden, und auf der Oberstufe sollen schließlich strenges Definieren und Beweisen Bestandteil des mathematikunterrichtlichen Alltags sein.

Begriffsbildung konkret im Umfeld der Meraner Vorschläge

Die im Anschluss an die Meraner Vorschläge veröffentlichten Methodiken enthalten neben inhaltlichen und methodischen Ideen konkrete Unterrichtsvorschläge zur Behandlung unterschiedlicher Themen auch des Geometrieunterrichts, die in letztem Abschnitt genannte Ideen umsetzen und damit unmittelbar die Gelegenheit bieten, den Unterricht zu reformieren. Ausführungen zur Behandlung des Winkelbegriffs sind dabei weniger ausführlich, und haben meist die Form von einzelne Unterrichtsgänge bereichernden Ideen. Ein vollständiger Unterrichtsgang findet sich bei PETER TREUTLEIN. Dabei wird über die Betrachtung von regelmäßigem Tetraeder und gleichseitigem Dreieck auf den Winkelbegriff geführt. Es werden dann verschiedene Winkelgrößen[20] zunächst mittels der Zeiger einer Uhr veranschaulicht, und die Vergrößerung und Verkleinerung von Winkeln wird angesprochen. Anschließend wird eine Unterteilung des Winkelbegriffs in rechte, spitze und stumpfe Winkel anhand der Veranschaulichung durch Uhrzeiger erarbeitet, bevor sich von der Uhr gelöst wird, und zeichnerisch Eigenschaften der unterschiedlichen Winkelarten hergeleitet werden, sowie Manifestationen von Winkeln im Umfeld der Lernenden thematisiert werden. Im Unterricht soll die Behandlung von Dreiecken anschließen, wobei der Winkelbegriff grundlegend ist (vgl. Treutlein 1985, im Original 1911).

Bei ALOIS HÖFLER dienen rechte Winkel zur Einführung in die Arbeit mit Winkeln, wobei hauptsächlich mit Hilfe eines Winkelhakens konstruiert oder Orthogonalität überprüft werden soll. Mit Bezug auf schiefe Winkel

[20] Der Winkelbegriff kann sowohl eine bei einer Drehung überstrichene Fläche als auch einen Kreissektor bedeuten, wobei erste Bedeutung eine funktionale Denkweise betont. Bei TREUTLEIN sind beide Bedeutungen von Winkel enthalten.

wird zur Veranschaulichung durch die Drehung von Zirkelschenkeln oder Uhrzeigern, sowie zum Herstellen einer Verbindung von Winkel- und Bogengrößen mit Zeitgrößen, und konkreter beispielsweise zum Vergleichen von „Winkelminute“ und „Zeitminute“, aufgerufen. Zudem wird in direktem Zusammenhang mit Winkeln die Behandlung der Kreisteilung, und dabei auch von gleichschenklig-rechtwinkligen und gleichseitigen Dreiecken angeraten (vgl. Höfler 1910).

WALTHER LIETZMANN weist vor allem auf die Bedeutung der Schätzung von Winkelgrößen, sowohl von Winkeln zwischen Uhrzeigern als auch von Winkeln außerhalb des Klassenraums, beispielsweise an Wegkreuzungen oder Böschungen, und den Vergleich geschätzter mit gemessenen Größen hin. Darüber hinaus fordert er zu Addition, Subtraktion, Vervielfältigung und Teilung gezeichneter Winkel nach Augenmaß auf (Lietzmann 1916).

FRIEDRICH REIDT, KARL SCHWERING, MAX SIMON sowie WILHELM KILLING und HEINRICH HOVESTADT widmen der Behandlung des Winkelbegriffs nur begrenzten Raum. Ein Winkel wird dabei als Dreh- oder Flächengröße, beziehungsweise beides gemeinsam, aufgefasst und mit dem Schnitt zweier Kanten, Geraden oder zweier Durchmesser eines Kreises als Ausgangspunkt thematisiert (vgl. Killing & Hovestadt 1910; Reidt 1906; Schwering 1907; Simon 1985, im Original 1908).

In Methodiken zu findende Ausführungen zum Beweis des Winkelsummensatzes sind demgegenüber ausführlicher. Ein vollständiger Unterrichtsgang findet sich wiederum bei TREUTLEIN. Dabei wird über die Betrachtung von dreiseitiger Pyramide auf einem beliebigen Dreieck und Versuche, Dreiecke mit drei gegebenen Winkeln zu konstruieren, auf den Winkelsummensatz geführt.[21] Es wird dann die Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks mittels Umklappens der drei Ecken des Dreiecks zu einem Punkt auf einer Dreiecksseite, so dass ein gestreckter Winkel entsteht, hergeleitet. Anschließend wird ein zweiter Beweis der Winkelsumme eines beliebigen Dreiecks anhand des Drehens des Dreiecks um einen Punkt in seinem Inneren um seine Außenwinkel, wobei Drehung um die drei Außenwinkel gleich einer Drehung um 360° ist, und folgendem Schluss auf die Innenwinkelsumme, angegeben. Im Unterricht soll die Behandlung von unregelmäßigen Vierecken

[21] TREUTLEIN zeigt mit seinen Ausführungen, wie die Motivation des Winkelsummensatzes eine Fusion von Stereometrie und Planimetrie erlaubt.

anschließen, wobei auf den Winkelsummensatz zurückgekommen werden kann (vgl. Treutlein 1985, im Original 1911).

Einen weiteren vollständigen Unterrichtsgang liefert HÖFLER. Dabei wird zunächst die Winkelsumme rechtwinkliger Dreiecke mittels der Unterteilung von Rechtecken und speziell Quadraten in zwei Dreiecke hergeleitet, bevor die Winkelsumme gleichseitiger Dreiecke anhand der Unterteilung eines Sechseckes in solche Dreiecke erarbeitet wird. Schließlich wird zu beliebigen Dreiecken übergegangen, und die Winkelsumme mittels Ausschneidens und Aneinanderlegens jeweils drei gleicher beliebiger Dreiecke, wobei die drei verschiedenen Ecken in einem Punkt zusammenkommen sollen, so dass ein gestreckter Winkel entsteht, geschlossen (vgl. Höfler 1910).

LIETZMANN gibt unter der Überschrift „Das Beweisen geometrischer Lehrsätze“ eine Reihe von Beweisen zum Winkelsummensatz an und vergleicht diese nach der jeweils angewendeten Methode. Zunächst weist er auf die Möglichkeit hin, die Winkelsumme induktiv mittels Winkelmessung an verschiedenen Dreiecken zu verifizieren. Anschließend gibt er drei sich ähnelnde experimentelle Beweise an. So können von einem beliebigen Dreieck die Ecken abgerissen und in einem Punkt zusammengelegt werden, dass ein gestreckter Winkel entsteht. Weiterhin können, wie auch bei HÖFLER beschrieben, drei gleiche, beliebige Dreiecke ausgeschnitten und aneinandergelegt werden, oder, wie bei TREUTLEIN genannt, die drei Ecken eines beliebigen Dreiecks umgeklappt werden, so dass erkannt wird, dass die drei Winkel eines Dreiecks zusammen einen gestreckten Winkel ergeben. Darüber hinaus nennt LIETZMANN den sowohl experimentelle als auch logisch-deduktive Elemente vereinenden THIBAUTschen Beweis, bei dem ein Lernender ein auf den Boden gezeichnetes Dreieck abschreiten und sich an den Ecken um die Innenwinkel drehen muss, so dass er sich nach den Drehungen um die drei Winkel nur einmal um sich selbst gedreht hat. Schließlich gibt LIETZMANN zwei logisch-deduktive Beweise an, wobei zwei Winkel eines Dreiecks an dessen dritten Winkel grenzend abgetragen werden (Abb. 5).

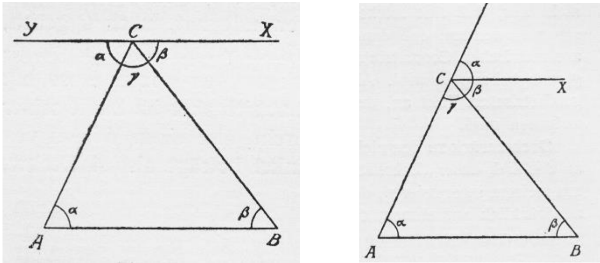


Abb. 5: Skizzen zum Beweis des Winkelsummensatzes aus Lietzmann 1916, S. 130f

Die beiden Beweise unterscheiden sich darin, dass in erstem Fall die Parallele durch den Punkt C zur Seite $\overline{AB}$ unmotiviert entsteht, in zweitem Fall dagegen die Parallele durch das Abtragen des Winkels α motiviert wird. Den Beweisen nach unterschiedlichen Beweisverfahren folgen bei LIETZMANN Ausführungen zur Entwicklung von Beweisen, so dass Heuristiken erlernt und die für Beweisen notwendigen prozessualen Fähigkeiten aufgebaut werden können. Dabei weist er unter anderem auf die Bedeutung einer Darstellungsvielfalt, auch beim Beweisen, hin (vgl. Lietzmann 1916).

KILLING und HOVESTADT gehen einen deutlich abweichenden Weg, wenn sie vorschlagen, in der Unterstufe als Axiom „In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte“ zu formulieren und dieses Axiom an die Spitze der Dreieckslehre zu stellen. Erst nachdem in der Oberstufe erkannt worden ist, dass in jedem Kugeldreieck die Winkelsumme größer als 180° ist, soll der Satz „In einem einzigen Dreieck beträgt die Winkelsumme zwei Rechte“, oder auch „Sobald in einem einzigen Dreieck die Winkelsumme gleich zwei Rechten ist, beträgt die Winkelsumme in jedem Dreieck zwei Rechte“, formuliert und bewiesen werden. Die beiden angeführten Beweise gründen dabei auf Kongruenzargumenten beziehungsweise einer Reihe von Hilfssätzen und sind sehr umfangreich (vgl. Killing & Hovestadt 1910).[22]

REIDT, SCHWERING und SIMON widmen dem Winkelsummensatz wiederum nur begrenzten Raum und erwähnen bereits genannte Vorgehensweisen. So wird auf den logisch-deduktiven Beweis, in dem eine Parallele zu einer Dreiecksseite durch den nicht auf dieser Seite liegenden Eckpunkt des Dreiecks unmotiviert entsteht, verwiesen. Ebenso wird die Möglichkeit, den

[22] KILLING und HOVESTADT zeigen mit ihren Ausführungen, wo der Beweis des Winkelsummensatzes eine Fusion von Stereometrie und Planimetrie erlaubt.

Winkelsummensatz als Grundlage der Dreieckslehre zu formulieren, genannt (vgl. Reidt 1906; Schwering 1907; Simon 1985, im Original 1908).

Begriffsbildung in Lehrbüchern im Umfeld der Meraner Vorschläge

Den Meraner Vorschlägen folgend wurden, ebenso wie Methodiken, einige Lehrbücher, welche den Inhalt der Vorschläge umzusetzen versuchten, veröffentlicht. Auch wenn diese nicht durch einen offiziell verankerten Lehrplan legitimiert waren, so erhielten sie doch durch die Bedeutung der in den Vorschlägen involvierten Reformer eine gewisse Legitimation (vgl. Schotten 1910). Als ein solches Schulbuch ist beispielsweise OTTO BEHRENDSEN und EDUARD GÖTTINGS *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen* zu nennen, welches unter Mitwirkung von FELIX KLEIN an einem Göttinger Gymnasium entstand. Weitere Lehrbücher wurden von KARL SCHWAB und OSKAR LESSER, WALTHER LIETZMANN, FRIEDRICH PIETZKER sowie ALBERT SCHÜLKE veröffentlicht (vgl. Lietzmann 1955; Schotten 1910).

Es darf allerdings nicht unmittelbar davon ausgegangen werden, dass der genannte inhaltliche und methodische Rahmen, das geforderte Vorgehen mit Bezug zur Begriffsbildung sowie konkrete Unterrichtsvorschläge im Unterricht so umgesetzt wurden, wie es in im Anschluss an die Meraner Vorschläge entstandenen Methodiken entworfen wurde. Diesbezüglich schreibt LIETZMANN in *Form und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland*:

> Ganz anders steht es mit der Raumlehre. In diesem Unterricht, handele es sich nun um die Volksschulen oder um den propädeutischen Kurs der höheren Schule, hat der Fusionsgedanke bereits festen Fuß gefaßt. Freilich noch lange nicht überall. Es gibt außerdem eine beträchtliche Anzahl von Lehrbüchern, die das Ausgehen vom Körperlichen sehr oberflächlich auffassen. KNOCHE kennzeichnet dieses Verfahren so: „Man geht zwar von Körpern aus und läßt an diesen die Flächen, Linien und Winkel anschauen, aber bereits in der zweiten oder dritten Stunde geht man zur Longimetrie und Planimetrie über und läßt die körperlichen Größen zu sehr unberücksichtigt, vergessend, daß diese dreifachen Größen in einer einzigen Anschauung vor unsere Seele treten."
>
> (Lietzmann 1985, im Original 1912, S. 23)

Laut LIETZMANN wurde die Stereometrie zu Beginn des propädeutischen Geometrieunterrichts sehr oberflächlich behandelt, und die Verbindung von stereometrischem und planimetrischem Unterricht kam vielmals sehr kurz.

Diese Kritikpunkte können auch in dem *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen* für die Unterstufe[23] von BEHRENDSEN und GÖTTING beobachtet werden. In dem Vorwort des Lehrbuchs heißt es noch:

> Man muss die Starrheit der geometrischen Figuren aufgeben und sie als veränderlich, ihre „Stücke“ als abhängig in Lage und Größe voneinander sein lassen. Dies kann schon im Anfangsunterricht geschehen, wenn man die in Betracht kommenden Punkte sich bewegen, Linien sich drehen oder verschieben läßt und die sich dabei ergebende Veränderlichkeit oder Konstanz der Eigenschaften einer Figur ins Auge faßt. […] - Die Verfasser hielten es für notwendig, namentlich im Anfangsunterrichte einen auf axiomatischer Grundlage aufgebauten, deduktiven Lehrgang durchaus zu vermeiden. Übung des Auges und der Hand, Beobachtung und Schätzung von Größen, Gebrauch von Lineal, Zirkel und Zentimetermaß sind die Grundpfeiler, auf welchen, durch reine Erfahrung vermittelt, sich die erste geometrische Erkenntnis aufbaut.
>
> (Behrendsen & Götting 1909, S. IV)

Hier ist die Einführung der beweglicheren Geometrie in den Unterricht konstatiert, da Zusammenhänge, Veränderlichkeit und Beweglichkeit stark betont sind. Zudem wird ein propädeutischer Geometrieunterricht angesprochen, wobei jedoch ein besonderes Anknüpfen an aus dem Alltag der Lernenden vorhandene Raumvorstellungen sowie ein Ausgehen von der Stereometrie nicht deutlich wird. Schon das Inhaltsverzeichnis des Lehrbuchs ist besonders aufschlussreich.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt. Vorbereitender Lehrgang.

II. Abschnitt. Planimetrie.

Abb. 6: Ausschnitt aus dem Inhaltsverzeichnis aus Behrendsen & Götting 1909, S. V

[23] Die Unterstufe umfasste die Sexta bis Untersekunda (Jahrgangsstufen 5 bis 10).

Es lässt sich erkennen, dass in Paragraph 1 des vorbereitenden Lehrgangs ein kurzer Blick auf geometrische Körper, Flächen, Linien und Punkte geworfen wird, bevor bald zu planimetrischen Begriffen fortgeschritten wird. In Paragraphen 8, 9, 10 und 13 wird erneut zur Stereometrie zurückgegangen. Der an den vorbereitenden Lehrgang anschließende Geometrieunterricht beschäftigt sich allerdings ausschließlich mit planimetrischen Themen, insgesamt kommt die Stereometrie in dem Lehrbuch somit sehr kurz.

In Paragraph 1 des vorbereitenden Lehrgangs sind Verweise auf das Umfeld der Lernenden teils funktional geprägt. Allerdings wird insgesamt nur knapp auf aus dem Alltag der Lernenden vorhandene Raumvorstellungen zurückgegangen, und handelnder Umgang mit Modellen kommt sehr kurz. Neben in zwei Zeilen angesprochenen Naturkörpern sowie der Aufforderung an die Lernenden, bestimmte Körper im Alltag ausfindig zu machen, beziehen sich Verweise auf das Umfeld der Lernenden auf ideativ ein- oder zweidimensionale Objekte, die darüber hinaus einseitig[24] dargestellt sind. Der Paragraph enthält außerdem auffallend viele Merksätze.[25]

Die späteren, sich auf stereometrische Themen beziehenden Paragraphen 8, 9 und 10 widmen der Stärkung des Raumanschauungsvermögens der Lernenden sowie enaktivem Arbeiten mehr Raum, wie auch eine Aufgabe zur Flächen- und Raummessung illustriert (Abb. 7).

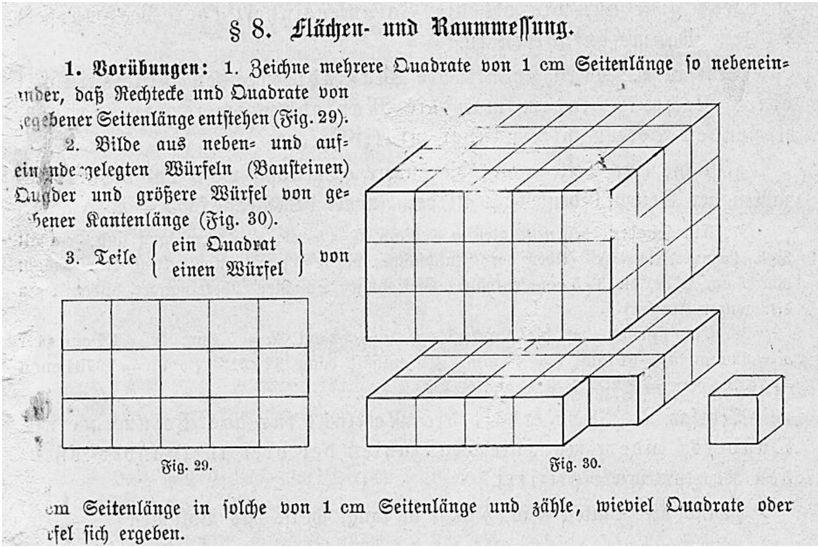
Hier wird die Raummessung mittels handelndem Umgang mit Einheitswürfeln eingeführt. Später werden die Lernenden außerdem aufgefordert, den Rauminhalt eines Schulzimmers, Kastens und Ziegelsteins zu bestimmen, was den Einsatz alltäglicher Körper und Figuren aufzeigt. Zudem findet, wie in Abbildung 7 offensichtlich, sowohl eine Fusion von Stereometrie und Planimetrie statt, indem Quadrat und Würfel in denselben Aufgaben

[24] Einseitig meint hier, dass mathematische Objekte meist auf eine spezielle Weise dargestellt sind. So sind Würfel häufig mit einer dem Betrachter zugewendeten Seite abgebildet (siehe: Ausschnitt aus Höfler, Abb. 1), Quadrate und Rechtecke sind größtenteils mit zu den Schulbuchseiten parallelen Seiten dargestellt.

[25] Diese Merksätze haben genetischen Charakter, wenn sie auf die Entstehung geometrischer Objekte verweisen. So heißt es:

> **Die Bahn eines sich bewegenden Punktes ist eine Linie.**
>
> Das Zerschneiden eines Körpers durch die Bewegung der Messerschneide zeigt, daß durch **die Bewegung einer Linie seitlich zu sich selbst eine Fläche entsteht.**
>
> (Behrendsen & Götting 1909, S. 3)

analog behandelt werden, als das auch operativ induktiv vorgegangen wird, da Quader aus Einheitswürfeln hergeleitet werden.


§ 8. Flächen- und Raummessung.

1. Vorübungen: 1. Zeichne mehrere Quadrate von 1 cm Seitenlänge so nebeneinander, daß Rechtecke und Quadrate von gegebener Seitenlänge entstehen (Fig. 29).

2. Bilde aus neben- und aufeinandergelegten Würfeln (Bausteinen) Quader und größere Würfel von gegebener Kantenlänge (Fig. 30).

3. Teile {ein Quadrat / einen Würfel} von

Fig. 29. Fig. 30.

cm Seitenlänge in solche von 1 cm Seitenlänge und zähle, wieviel Quadrate oder rfel sich ergeben.

Abb. 7: Aufgabe zur Flächen- und Raummessung aus Behrendsen & Götting 1909, S. 15

In Paragraph 11 wird allerdings direkt zur Planimetrie zurückgegangen, wie auch die Behandlung des Winkelbegriffs zeigt (Abb. 8 & 9).

In der Erklärung, ein Winkel entstehe durch die Drehung eines Strahls, findet sich der funktionale Gedanke wieder. Die Formulierung dieser Erklärung zeigt zudem, dass nicht mit einer strengen mathematischen Terminologie gearbeitet wird. Es wird allerdings nicht operativ induktiv vorgegangen, da nicht begründet von einem bestimmten Winkel ausgehend andere Winkel hergeleitet werden. Zudem werden Winkel sehr einseitig, jeweils mit dem unteren Schenkel parallel zur kürzeren Buchseite, dargestellt. Im folgenden Unterrichtsgang wird zwischen verschiedenen Winkelarten unterschieden, was als Übung im Über- und Unterordnen von Begriffen gelten kann, bevor zur Winkelmessung übergegangen wird und in diesem Kontext auch ein Bezug zur Stereometrie und zum Umfeld der Lernenden hergestellt wird.

1. Vorübungen: Lege einen rechten Winkel (des Holzdreiecks oder aus Papier hergestellt) an die Winkel der Körpermodelle an, die nach § 10 hergestellt sind. Stelle durch Falten oder Ausschneiden aus Papier Winkel her, die den Winkeln jener Körper gleich sind. Zeichne diese Winkel nach. Vergleiche die verschiedenen Winkel durch Aufeinanderlegen dieser Winkelmodelle.

Erklärung. Winkel, die nicht rechte Winkel sind, heißen **schiefe Winkel.** Sie werden wie die rechten Winkel von zwei Strahlen, ihren **Schenkeln,** gebildet, die vom **Scheitelpunkte** ausgehen.

Die **Winkelbezeichnung** ist dieselbe wie beim rechten Winkel, also $\sphericalangle ABC$ (Fig. 40). Vergleiche § 6, Seite 11.

Andere Winkelbezeichnung: 1. $\sphericalangle(g, l)$ bezeichnet den Winkel zwischen den

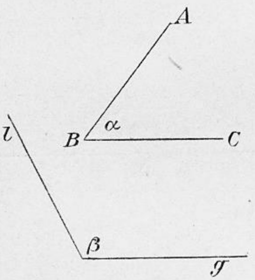


Fig. 40.

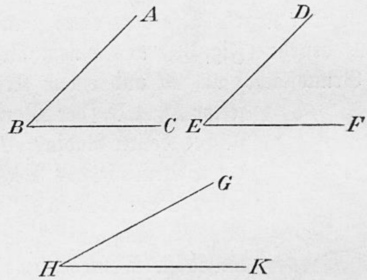


Fig. 41.

Strahlen g und l (Fig. 40); 2. man schreibt einen kleinen griechischen Buchstaben in den Raum zwischen den beiden Schenkeln und liest $\sphericalangle\alpha$ oder $\sphericalangle\beta$.[1])

Das Zeichen $\sphericalangle$ wird „Winkel" gelesen. Es darf nicht für sich allein stehen, sondern immer nur vor der Buchstabenbezeichnung des Winkels.

Abb. 8: Ausführungen zum Winkelbegriff aus Behrendsen & Götting 1909, S. 22

3. Die beiden Zeiger einer Uhr bilden einen Winkel miteinander. Durch **Drehung** der Zeiger (der Schenkel) verändert sich dieser Winkel. Von zwei um einen Punkt drehbaren Stäben (etwa den beiden Schenkeln eines Zirkels) wird der eine festgehalten, der andere gedreht.

Erklärung: Ein Winkel entsteht durch die **Drehung** eines Strahles um seinen Anfangspunkt. Anfangs- und Endlage des Strahles ergeben die beiden Schenkel, der Drehpunkt den Scheitelpunkt des Winkels.

Bei der Drehung beschreibt jeder Punkt des gedrehten Strahles einen Kreisbogen.

Abb. 9: Ausführungen zum Winkelbegriff aus Behrendsen & Götting 1909, S. 23

In dem an den vorbereitenden Lehrgang anschließenden Geometrieunterricht wird weiterhin bald deduktiv vorgegangen, wie auch der Beweis des Winkelsummensatzes illustriert (Abb. 10).

§ 18. Von den Winkeln der Dreiecke.

Vorübungen. 1. Miß die drei Winkel eines gezeichneten Dreiecks (eines Dreiecks an einem Körper) mit dem Transporteur und zeige, daß sich näherungsweise $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ergibt.

2. Konstruiere die Summe der drei Winkel eines Dreiecks an einer beliebigen Stelle (nach § 11, Aufg. 6) und zeige, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist.

3. Konstruiere die Summe der drei Winkel eines Dreiecks ABC (Fig. 60) an der Ecke A, so daß $\sphericalangle\, \alpha$ unverändert bleibt, γ an α angelegt wird und in der neuen Lage CAE Wechselwinkel zu ACB wird. Was gilt von der Lage der Geraden AE? Weshalb wird der Winkel zwischen EA und der Verlängerung AD der Seite $AB \sphericalangle\, EAD = \beta$?

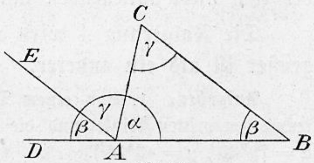


Fig. 60.

Lehrsatz 1. Die Summe der drei Winkel in einem Dreiecke beträgt 2R oder 180⁰.

Beweis. (Fig. 60.) Zeichne durch die Ecke A die Gerade $AE \parallel CB$ und verlängere AB über B hinaus. Dann ist $\sphericalangle\, EAC = ACB = \gamma$ als Wechselwinkel und $\sphericalangle\, EAD = CBA = \beta$ als Gegenwinkel bei den Parallelen EA und CB.

Also ist $\qquad \alpha + \beta + \gamma = 2R = 180^0$.

Abb. 10: Beweis des Winkelsummensatzes aus Behrendsen & Götting, 1909, S. 15

Hier deuten die Vorübungen induktives Vorgehen an, da vorweggenommen wird, dass für verschiedene Dreiecke die Verallgemeinerung gilt. In dem Beweis wird allerdings nicht mehr funktional und außerdem formal-deduktiv vorgegangen. Zudem stellt sich die Frage, ob durch die Vorübungen der Beweis tatsächlich ausreichend in seine unterschiedlichen Schritte aufgegliedert wird.

Insgesamt lässt sich, bezogen auf die Behandlung des Winkelbegriffs und den Beweis des Winkelsummensatzes, somit feststellen, dass der Zeitgeist im Umfeld der Meraner Vorschläge, welcher die Mathematikdidaktiker schon erfasst hatte, noch nicht zu den Schulbuchautoren vorgedrungen war. So bleibt das Lehrbuch von Behrendsen und Götting noch hinter den in Methodiken veröffentlichten Unterrichtsvorschlägen zurück. Es wird bei der Behandlung des Winkelbegriffs nicht die von Treutlein formulierte Fusion von Stereometrie und Planimetrie umgesetzt. Zudem kommt weder der von Treutlein entworfene noch der von Höfler angedeutete operativ induktive Weg zum Einsatz, und auch die Betrachtung von Übergangsfällen wird höchstens implizit umgesetzt. Darüber hinaus wird vor Behandlung der Winkelmessung kein Bezug zum Umfeld der Lernenden hergestellt. Auch hinsichtlich des Beweis des Winkelsummensatzes lässt sich nicht die von

TREUTLEIN oder KILLING und HOVESTADT formulierte Fusion mit der Stereometrie erkennen. Weiterhin wird keiner der in den Methodiken genannten experimentellen, Funktionalität betonenden Beweise angegeben, und auch die durch HÖFLER und LIETZMANN formulierten induktiven Wege sind nicht umgesetzt. Zudem wird der Beweis nicht, wie bei LIETZMANN ausgeführt, schrittweise formalisiert, und Heuristiken werden nicht deutlich, was die Entwicklung von für Beweisen notwendigen prozessualen Fähigkeiten erlauben würde.

Reformen im Umfeld des RICHERTschen Lehrplans

Der RICHERTsche Lehrplan konkret

Wie der vorherige Abschnitt gezeigt hat, wurde etwa fünf Jahre nach der Veröffentlichung der Meraner Vorschläge den im Bericht der Unterrichtskommission genannten Aufgaben des Mathematikunterrichts durch Lehrbücher noch nicht nachgekommen, und auch in im Anschluss an die Meraner Vorschläge entstandenen Methodiken genannte Ideen waren noch nicht umgesetzt. Daher stellt sich die Frage, inwieweit sich diese Situation durch den Lehrplanvorschlag von 1922 sowie die Lehrplanreform von 1925 änderte. Der Lehrplanvorschlag von 1922 war eine Überarbeitung des Meraner Lehrplans unter Berücksichtigung unterrichtspraktischer Erfahrungen sowie praktischer Anwendungen, und der Lehrplan von 1925 griff mit Bezug auf das Unterrichtsfach Mathematik wesentlich auf diesen revidierten Meraner Lehrplan zurück (vgl. Becker 1985; Lehrplan 1922). Die Lehrziele des Mathematikunterrichts werden dem Lehrplan von 1925 vorangestellt:

> Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbstständig anzuwenden; insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte. Schulung im logischen Schließen und Beweisen und ein gewisses Verständnis für den philosophischen Gehalt der mathematischen Verfahren [u]nd die geistesgeschichtliche Bedeutung der Mathematik.
>
> (Lietzmann 1925, S. 194)

Hier zeigt sich ein Fokus auf die Lernenden und den Unterrichtsstoff. Es werden mit Lebensnähe des Unterrichts sowie Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und funktionalen Denkens, hier konkret im Sinne des Auffassens der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte, die auch schon in den Meraner Vorschlägen erwähnten, für den Geometrieunterricht besonders relevanten und auch die Begriffsbildung beeinflussenden Aufgaben des Mathematikunterrichts genannt.

Die methodischen Bemerkungen mit Bezug zur Geometrie betonen weiterhin viele schon in jenen im Anschluss an die Meraner Vorschläge entstandenen Methodiken genannten Ziele. So wird auf die Rolle des propädeutischen Geometrieunterrichts zur Stärkung des Anschauungsvermögens und das Ziel der Fusion von Stereometrie und Planimetrie hingewiesen. Die beweglichere Geometrie wird in dem Sinne propagiert, dass Abbildungen einen hohen Stellenwert haben sollen und Zusammenhänge betont werden sollen. Zudem soll basierend auf induktivem Vorgehen erst die deduktive Vorgehensweise entwickelt werden. Dennoch wirkt die Wortwahl der angesprochenen Bemerkungen teils relativierend, wenn es heißt:

> 1. Ein von der Betrachtung einfacher Körper ausgehender Vorbereitungsunterricht bildet das Anschauungsvermögen aus, entwickelt die geometrische Abstraktionsfähigkeit […].
>
> 2. Der Unterricht vermittelt einen Einblick in den planmäßigen Aufbau der Geometrie und führt von geometrischen Kenntnissen zu geometrischer Erkenntnis, indem er von empirischer Grundlegung zu logisch-deduktiver Betrachtungsweise aufsteigt und so die Schüler zum Beweisbedürfnis erzieht.
>
> (Lietzmann 1925, S. 195f)

Es wird mit Bezug auf den Vorbereitungsunterricht direkt die Entwicklung der geometrischen Abstraktionsfähigkeit erwähnt. Weiterhin wird mit Punkt 2 sehr früh geometrische Erkenntnis, logisch-deduktive Betrachtungsweise und Erziehung zum Beweisbedürfnis angesprochen, was diesen Punkten einen hohen Stellenwert gibt.

Der RICHERTsche Lehrplan selbst stimmt für den Geometrieunterricht in weiten Teilen mit dem Meraner Lehrplan überein. Der propädeutische Geometrieunterricht erstreckt sich allerdings über die Sexta und die Quinta, der Inhalt ist dabei sehr allgemein gehalten. Es fällt zudem auf, dass sich der Geometrieunterricht der folgenden Jahrgänge wiederum weitestgehend auf planimetrische und nur gelegentlich auf stereometrische Themen bezieht. Weiterhin ist schon sehr früh, in der Quarta, die Behandlung der Kongruenzsätze vorgesehen, und eine funktionale Vorgehensweise wird nicht betont.

Begriffsbildung psychologisch aufgearbeitet in Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan

Da der RICHERTsche Lehrplan in weiten Teilen auf den Meraner Lehrplan zurückgreift, bleiben die in den Methodiken von PETER TREUTLEIN, ALOIS HÖFLER, FRIEDRICH REIDT, KARL SCHWERING, MAX SIMON, WILHELM KILLING und HEINRICH HOVESTADT sowie WALTHER LIETZMANN thematisierten inhaltlichen und methodischen Kernideen mit weiterem und engerem Bezug zur Begriffsbildung weiterhin aktuell. Die konkreten Unterrichtsvorschläge zur Behandlung unterschiedlicher Themen auch des Geometrieunterrichts, welche die Ideen umsetzen, bleiben ebenso innovativ.[26]

Im Jahr 1927 wurden zudem erstmals die Ergebnisse der Psychologie für den Mathematikunterricht ausgewertet und als Beiheft zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht herausgegeben (vgl. Lietzmann 1927).[27] Der Autor GUSTAV ROSE stellt in diesem Beiheft *Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht* (*Eine psychologische Analyse*) die Begriffsbildung in Bezug zu anderen psychologisch untersuchten Tätigkeiten des Mathematikunterrichts, betrachtet sie aber auch isolierter. ROSE unterscheidet dabei zwischen naturwüchsigen Begriffen, die auf Anschauung basiert sind, und logischen Begriffen, die auf logischen und somit speziell systematischen Gesichtspunkten basiert sind. Das Ziel des Mathematikunterrichts ist, laut ROSE, die Überführung naturwüchsiger in logische Begriffe, wobei keine scharfe Grenze zwischen den naturwüchsigen Begriffen auf der einen und den logischen Begriffen auf der anderen Seite existiert. Da naturwüchsige Begriffe die Bildung logi-

---

26 Neu erschienene Methodiken, wie PHILIPP MAENNCHENS Band *Mathematik* aus dem *Handbuch des Unterrichts an höheren Schulen* oder GUSTAV ROSES *Rechnen und Raumlehre* aus dem *Handbuch der Volksschulpädagogik* greifen verstärkt auf den Arbeitsschulgedanken zurück (vgl. Männchen 1928; Rose 1932). Damit besteht ein expliziter Rückbezug auf die Arbeiten von beispielsweise JOHANN H. PESTALOZZI und ADOLF DIESTERWEG. Diese Tradition der Reformpädagogik soll hier allerdings nicht angerissen werden.

27 Die wachsende Bedeutung der Psychologie der Mathematikdidaktik ist ebenso darin sichtbar, dass LIETZMANN sich im Band *Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts* seiner Methodik auch psychologischen Erkenntnissen widmet (vgl. Lietzmann 1919). Allerdings kondensiert er viele Erkenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Psychologie auf wenig Raum, weswegen auch die Begriffsbildung sehr kurz kommt.

scher Begriffe beeinflussen und damit zum Bestandteil der logischen Begriffe werden, ist es unerlässlich, dass bei dieser Begriffsumformung das Stammkapital von Begriffsvorstellungen, welches die Lernenden in den Unterricht mitbringen, verwertet wird. Die Veränderlichkeit naturwüchsiger Begriffe bedingt damit auch eine Veränderlichkeit logischer Begriffe, weswegen Begriffsbildung zu keinem Zeitpunkt abgeschlossen ist (vgl. Rose 1927).

ROSE propagiert Begriffsbildung durch Abstraktion, wobei der Begriffsinhalt im Sinne der wesentlichen Merkmale des Begriffs, die allerdings auch je nach Kontext variieren können, deutlich herausgearbeitet wird. Begriffsbildung wird dabei unterstützt durch das Abgrenzen von und Herstellen klarer Beziehungen zu anderen, vor allem verwandten, Begriffen. Durch Vergleich sollen übereinstimmende und nicht übereinstimmende Merkmale sich ähnelnder Begriffe herausgearbeitet werden und auch Grenzfälle von Begriffen vor Augen geführt werden. Als Stützpfeiler der Abstraktion ist vielseitiges Anschauungsmaterial, auch im Sinne einer ausreichenden Anzahl verschiedener Modelle, vorgesehen. Schließlich sollen Begriffe in das sie umgebende Netz eingeordnet werden und somit systematisiert werden. ROSE schreibt weiterhin, dass bei einer solchen Begriffsbildung gleichermaßen wie bei dem Lösen eines Problems oder dem Führen eines Beweises vorgegangen werde (vgl. Rose 1927).

Begriffsbildung und Beweisführung im Unterricht sollen sich allerdings, auch laut ROSE, am Entwicklungsstand der Lernenden orientieren. Im Anfangsunterricht wird daher einer Erklärung von Begriffen, einer Verdeutlichung anhand von Beispielen oder genetischem Definieren der Vorzug vor, in der entsprechenden Altersgruppe noch nicht möglichem, mathematischen Konventionen entsprechendem Definieren gegeben. Dabei ist ein schrittweises Üben im selbstständigen Erarbeiten logischer Definitionen, womit auch logisches Denken ausgebildet werden soll, vorgesehen. Es wird allerdings betont, dass Definitionen kein Mittel zur Begriffsbildung, sondern erst das Endziel bereits vollzogener Begriffsbildung seien. Zudem soll die Betrachtung des Begriffsnetzes von einer Angabe von Begriffsumfängen zu einem flexiblen Umgang mit Begriffsreihen führen und mit dem Fortschreiten des Unterrichts von steigender Systematik geprägt sein. Gleichermaßen wird im Anfangsunterricht eine Erklärung von Sachverhalten strengem Beweisen vorgezogen. Die Lernenden sollen wiederum schrittweise üben, zunächst induktive und dann auch deduktive Beweise zu führen, durch das Begriffsnetz zu navigieren und damit auch ihre Fähigkeit, logisch zu denken, verbessern. Mit Bezug auf Beweise wurde wiederum die Prozesshaftigkeit betont (vgl. Rose 1927).

Begriffsbildung in Lehrbüchern in Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan

Dem RICHERTschen Lehrplan folgend wurden bereits zuvor veröffentlichte Lehrbücher überarbeitet, und damit dem neuen, politisch eingesetzten Lehrplan angepasst. So wurde eine Neubearbeitung von OTTO BEHRENDSEN und EDUARD GÖTTINGS *Lehrbuch der Mathematik* durch GÖTTING und ALFRED HARNACK herausgegeben, die sich in ihrem Aufbau teilweise von dem Vorläufer aus dem Jahr 1909 unterscheidet. So sind der vorbereitende Lehrgang und der darauf folgende Geometrieunterricht auf unterschiedlichen Büchern basiert. Zudem wurde dem Lehrbuch zu dem auf den vorbereitenden Lehrgang folgenden Geometrieunterricht ein Kapitel zur Darstellung von Körpern durch Projektion hinzugefügt. Weiterhin ist festzuhalten, um die mit Bezug auf das Werk von 1909 angesprochenen Aspekte wiederaufzugreifen, dass, wenn auch selten, so doch teilweise eine Fusion von Stereometrie und Planimetrie durchgesetzt ist und an aus dem Alltag der Lernenden vorhandene Raumvorstellungen angeknüpft wird. Handelndem Umgang mit Modellen wird jedoch weiterhin wenig Raum gewidmet. Die Behandlung des Winkelbegriffs erscheint nicht grundsätzlich verändert, allerdings wird abschließend ein Bezug zu Raumwinkeln hergestellt. Der Beweis des Winkelsummensatzes bleibt darüber hinaus formal-deduktiv, allerdings werden umfangreichere Vorübungen in Form des Folgerns aus Abreisen und Zusammenlegen der Ecken eines Dreiecks sowie Abschreiten der Seiten eines auf dem Boden gezeichneten Dreiecks und Betrachtung der dabei vorgenommenen Drehungen vorangestellt (vgl. Behrendsen & Götting 1909; Götting & Harnack 1930).

Andere Werke, welche den Inhalt des Lehrplans umzusetzen versuchten, und damit auch auf die Meraner Vorschläge zurückgriffen, wurden neuveröffentlicht. Als solche Lehrbücher sind beispielsweise die von FELIX BEHREND und ARTHUR MORGENSTERN herausgegebenen Lehrbücher der Mathematik zu nennen, wobei im Folgenden der von BEHREND verfasste

Band *Form und Abbildung* für die Mittelstufe[28] betrachtet wird, der im Gegensatz zu der Neubearbeitung von BEHRENDSEN und GÖTTINGs Werk durch stark reformatorische Elemente auffällt. Dabei stellt sich insbesondere die Frage, inwieweit bezüglich des Vorgehens mit Bezug zur Begriffsbildung die Auswertung psychologischer Ergebnisse für den Unterricht berücksichtigt wurde.

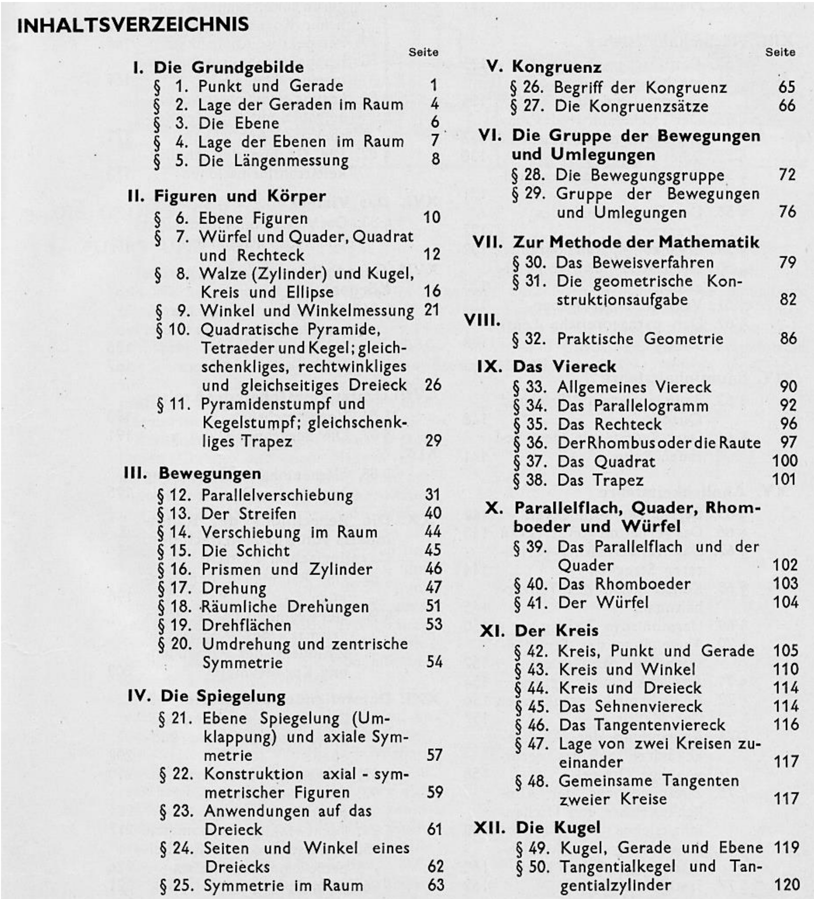
In dem Vorwort des Lehrbuchs heißt es:

> Die Mittelstufe der Geometrie beginnt mit einem Vorkursus, der von den Formen der wirklichen Welt ausgeht. Der Schüler wird durch geeignete künstlerische Abbildungen dazu angeregt, die Geometrie nicht als rein abstrakte Wissenschaft, sondern als eine Methode zum Verständnis und zur Darstellung der Formenwelt des praktischen Lebens, der Technik und der Architektur anzusehen. Es ist ein entschiedener Mangel des älteren geometrischen Unterrichts, daß er die Schwierigkeiten unterschätzt, die die Abstraktion der Formen aus der Wirklichkeit den Schülern macht, ebenso auch die Bedeutung, die diese Fähigkeit für die Lösung von angewandten Aufgaben hat. Für den Schüler ist es bereits schwierig, in einer Kiste einen hohlen Quader, in einem Gartenbeet einen Kreisring zu erkennen oder einen Gasbehälter, eine Röhre, ein Geldstück als Zylinder anzusehen. Auch die einfachsten mathematischen Formen erscheinen den Schülern bei verschiedenen Größenverhältnissen und verschiedener Lage nicht gleichartig. Es ist deshalb Wert darauf gelegt worden, die mathematischen Figuren teils in ihrer Entstehung wiederzugeben, teils in möglichst verschiedenartiger Form und Lage, vor allem möglichst nicht in der dem Schüler geläufigsten Lage unter Bevorzugung der waagerechten und senkrechten Richtung.
>
> (Behrend 1932, S. V)

Hier wird propädeutischer Geometrieunterricht angesprochen, wobei auch ein Anknüpfen an das Umfeld der Lernenden sowie dort vorhandene Körper deutlich wird. Die dargelegte vielseitige Darstellung mathematischer Formen erlaubt zudem Begriffsbildung durch Abstraktion. Weiterhin wird im Vorwort die Fusion von Stereometrie und Planimetrie als „erstmals vollständig durchgeführt“ erwähnt und es heißt, dass im propädeutischen Unterricht keine Trennung zwischen räumlichen und ebenen Betrachtungen gemacht werde, sowie dass auch anschließend räumliche und ebene Themen analog aufgebaut seien. Darüber hinaus wird im Vorwort die Einführung

[28] Der betrachtete Band bezieht sich somit auf die gleichen Jahrgangsstufen, wie BEHRENDSEN und GÖTTINGs *Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen*.

der beweglicheren Geometrie in den Unterricht konstatiert, was in diesem Fall bedeute, dass nicht axiomatisch sondern gruppentheoretisch vorgegangen werde und die Existenz der Bewegungsgruppe vorausgesetzt werde. Das Inhaltsverzeichnis des Lehrbuchs ist wiederum aufschlussreich.



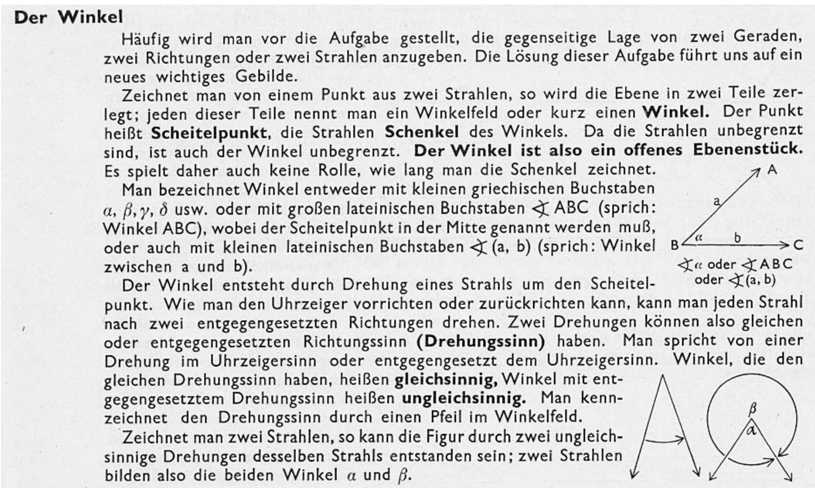
INHALTSVERZEICHNIS

Abb. 11: Ausschnitt aus dem Inhaltsverzeichnis aus Behrend 1932, S. VII

Es lässt sich erkennen, dass in Kapitel I ein Blick auf die mathematisch elementarsten Objekte geworfen wird, statt auf aus dem Alltag der Lernenden vorhandene Raumvorstellungen zurückzugehen. Es fällt aber auf, und das gilt auch für die zweite, hier nicht abgebildete Hälfte des Inhaltsverzeichnisses, dass stereometrische Betrachtungen wiederholt aufgegriffen werden und auch analog zu entsprechenden planimetrischen Betrachtungen behandelt werden. Allerdings werden die räumlichen und ebenen Themen teils in unterschiedlichen Paragraphen und teils in getrennten Kapiteln angesprochen und damit doch nicht unmittelbar verknüpft. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich zudem schon mit der Kongruenz und stellt damit zumindest die beweglichere Geometrie neben die zuvor vorherrschende Geometrie.

In den Kapiteln I und II selbst werden geometrische Formen im Umfeld der Lernenden, zunächst ein- oder zweidimensionale Objekte und anschließend Körper, in Erinnerung gerufen. Diese werden von vornherein vereinfacht dargestellt, weswegen ein Ideationsprozess notwendig bleibt, um die geometrisch definierenden Eigenschaften hineinzusehen. Anschließend werden die geometrischen Objekte genetisch, im Sinne ihrer Entstehung, definiert, womit an die Anschauung angeknüpft wird. Wiederholt wird auch auf Anwendungen zurückgegriffen, ebenso wie geschichtliche Ausführungen eingebunden werden. Allerdings kommt handelnder Umgang mit Modellen sehr kurz. Außerdem ist die Visualisierung vieler Objekte einerseits bezogen auf das Umfeld der Lernenden statisch, andererseits innermathematisch teils funktional geprägt, aber insgesamt sehr einseitig. Stattdessen enthält das Kapitel bereits auffallend viele Grundsätze axiomatischen Charakters.

In Paragraph 9 des zweiten Kapitels hat allerdings das Umfeld der Lernenden und damit die Stereometrie zunächst geringeres Gewicht, wie die Behandlung des Winkelbegriffs zeigt (Abb. 12).



Der Winkel

Häufig wird man vor die Aufgabe gestellt, die gegenseitige Lage von zwei Geraden, zwei Richtungen oder zwei Strahlen anzugeben. Die Lösung dieser Aufgabe führt uns auf ein neues wichtiges Gebilde.

Zeichnet man von einem Punkt aus zwei Strahlen, so wird die Ebene in zwei Teile zerlegt; jeden dieser Teile nennt man ein Winkelfeld oder kurz einen **Winkel.** Der Punkt heißt **Scheitelpunkt**, die Strahlen **Schenkel** des Winkels. Da die Strahlen unbegrenzt sind, ist auch der Winkel unbegrenzt. **Der Winkel ist also ein offenes Ebenenstück.** Es spielt daher auch keine Rolle, wie lang man die Schenkel zeichnet.

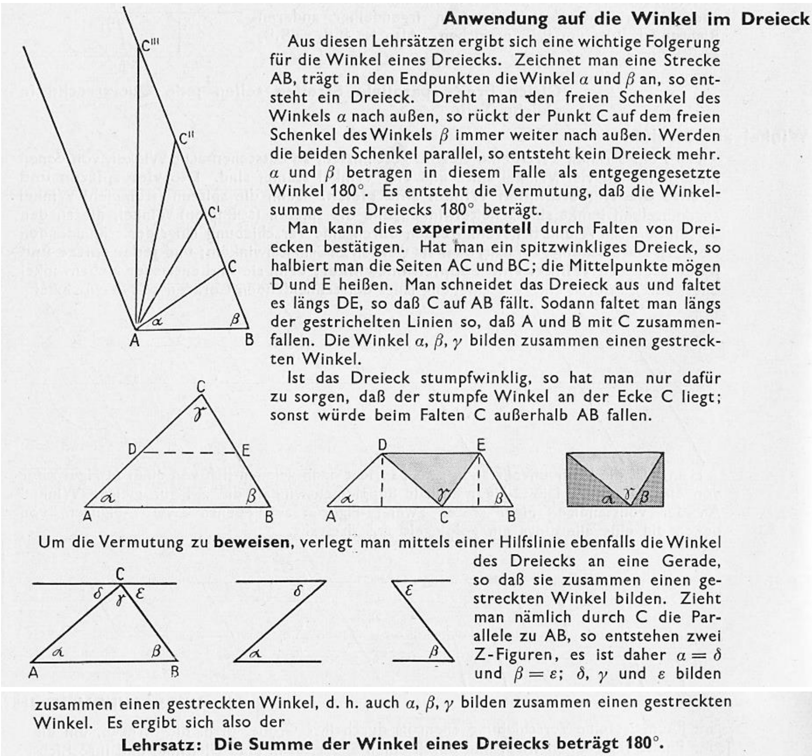
Man bezeichnet Winkel entweder mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ usw. oder mit großen lateinischen Buchstaben $\sphericalangle$ ABC (sprich: Winkel ABC), wobei der Scheitelpunkt in der Mitte genannt werden muß, oder auch mit kleinen lateinischen Buchstaben $\sphericalangle$ (a, b) (sprich: Winkel zwischen a und b).

Der Winkel entsteht durch Drehung eines Strahls um den Scheitelpunkt. Wie man den Uhrzeiger vorrichten oder zurückrichten kann, kann man jeden Strahl nach zwei entgegengesetzten Richtungen drehen. Zwei Drehungen können also gleichen oder entgegengesetzten Richtungssinn **(Drehungssinn)** haben. Man spricht von einer Drehung im Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn. Winkel, die den gleichen Drehungssinn haben, heißen **gleichsinnig,** Winkel mit entgegengesetztem Drehungssinn heißen **ungleichsinnig.** Man kennzeichnet den Drehungssinn durch einen Pfeil im Winkelfeld.

Zeichnet man zwei Strahlen, so kann die Figur durch zwei ungleichsinnige Drehungen desselben Strahls entstanden sein; zwei Strahlen bilden also die beiden Winkel α und β.

Abb. 12: Ausführungen zum Winkelbegriff aus Behrend 1932, S. 21

In der Beschreibung eines Winkels als offenes Ebenenstück und in der Erklärung, ein Winkel entstehe durch die Drehung eines Strahls, finden sich sowohl eine statische als auch eine funktionale Herangehensweise. Die Formulierungen zeigen zudem erneut, dass nicht mit einer strengen mathematischen Terminologie gearbeitet wird. In folgenden Erläuterungen zur Länge der Schenkel sowie zum Drehungssinn findet außerdem eine Reflexion der Darstellungen statt. Es wird allerdings auch hier nicht operativ induktiv vorgegangen, da nicht begründet von einem Winkel ausgehend andere Winkel hergeleitet werden. Zudem werden Winkel auch in diesem Fall einseitig, meist mit einem Schenkel parallel zur kürzeren Buchseite, dargestellt. Im folgenden Unterrichtsgang wird zur Winkelmessung übergegangen und in diesem Kontext auch ein Bezug zum Umfeld der Lernenden und zur Stereometrie hergestellt.



Anwendung auf die Winkel im Dreieck

Aus diesen Lehrsätzen ergibt sich eine wichtige Folgerung für die Winkel eines Dreiecks. Zeichnet man eine Strecke AB, trägt in den Endpunkten die Winkel α und β an, so entsteht ein Dreieck. Dreht man den freien Schenkel des Winkels α nach außen, so rückt der Punkt C auf dem freien Schenkel des Winkels β immer weiter nach außen. Werden die beiden Schenkel parallel, so entsteht kein Dreieck mehr. α und β betragen in diesem Falle als entgegengesetzte Winkel 180°. Es entsteht die Vermutung, daß die Winkelsumme des Dreiecks 180° beträgt.

Man kann dies **experimentell** durch Falten von Dreiecken bestätigen. Hat man ein spitzwinkliges Dreieck, so halbiert man die Seiten AC und BC; die Mittelpunkte mögen D und E heißen. Man schneidet das Dreieck aus und faltet es längs DE, so daß C auf AB fällt. Sodann faltet man längs der gestrichelten Linien so, daß A und B mit C zusammenfallen. Die Winkel α, β, γ bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Ist das Dreieck stumpfwinklig, so hat man nur dafür zu sorgen, daß der stumpfe Winkel an der Ecke C liegt; sonst würde beim Falten C außerhalb AB fallen.

Um die Vermutung zu **beweisen**, verlegt man mittels einer Hilfslinie ebenfalls die Winkel des Dreiecks an eine Gerade, so daß sie zusammen einen gestreckten Winkel bilden. Zieht man nämlich durch C die Parallele zu AB, so entstehen zwei Z-Figuren, es ist daher $\alpha = \delta$ und $\beta = \varepsilon$; δ, γ und ε bilden zusammen einen gestreckten Winkel, d. h. auch α, β, γ bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Es ergibt sich also der

Lehrsatz: Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°.

Abb. 13: Beweis des Winkelsummensatzes aus Behrend 1932, S. 42f

In den sich noch auf Bewegungen beziehenden Kapiteln III und IV sind weiterhin innermathematisch funktionale Betrachtungen zu beobachten. Beweisführungen sind induktiv geprägt, wie auch der Beweis des Winkelsummensatzes zeigt (Abb. 13).

Hier motiviert die Einleitung den Lehrsatz. Es wird durchweg funktional verfahren, da zunächst Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten untersucht werden, wobei der funktionale Gedanke auch bei dem in der Einleitung enthaltenen unendlichen Grenzprozess ausgeschöpft wird, und anschließend, auch durch eigenes Falten, Veränderlichkeit und Beweglichkeit sowie Verformungen betont werden. Weiterhin wird nach einer induktiven Beweisführung vorgegangen, da von beliebigen Dreiecken ausgehend verallgemeinert wird. Dabei ist der Beweis auf Anschauungsargumenten begründet und wird sukzessive entwickelt.

Insgesamt lässt sich, bezogen auf die Behandlung des Winkelbegriffs und den Beweis des Winkelsummensatzes, somit feststellen, dass das Lehrbuch von BEHREND die in den Methodiken veröffentlichten Unterrichtsvorschläge nur mit Bezug zum Beweis des Winkelsummensatzes teilweise umsetzt. Zunächst wird bei der Behandlung des Winkelbegriffs auch hier nicht die von TREUTLEIN geforderte Fusion von Stereometrie und Planimetrie umgesetzt. Zudem kommt erneut weder der von TREUTLEIN entworfene noch der von HÖFLER angedeutete operativ induktive Weg zum Einsatz, und auch die Betrachtung von Übergangsfällen wird höchstens implizit umgesetzt. Darüber hinaus wird auch hier vor Behandlung der Winkelmessung kein Bezug zum Umfeld der Lernenden hergestellt. Hinsichtlich des Beweis des Winkelsummensatzes wird allerdings ein experimenteller, Funktionalität betonender Beweis angegeben, und es ist ein, wenn auch von jenen durch HÖFLER und LIETZMANN formulierten Wegen abweichender, so doch induktiver Weg umgesetzt. Zudem wird der Beweis weniger aufgegliedert wie bei LIETZMANN, mit geringerer Betonung der verwendeten Heuristiken und mittels unmotivierter Hilfslinie, aber schrittweise formalisiert, was die Entwicklung von für Beweisen notwendigen prozessualen Fähigkeiten erlaubt.

Begriffsbildung in Lehrbüchern für die Volksschule in Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan

Raumlehreunterricht hatte seinen Ursprung in der Volksschule, und der propädeutische Geometrieunterricht der höheren Schulen wurde in seiner inhaltlichen und methodischen Organisation von der Volksschule angeregt (vgl. Lietzmann 1916 & 1985, im Original 1912). Als ein auf der Volksschule verwendetes Lehrbuch ist WILHELM KUSSEROWS *Los von Euklid!*, das gleichnamige Formel geprägt hat, zu nennen (vgl. Kusserow 1985, im Original 1928; Schreiber 1985). Daher ist dieses Werk eine fruchtbare Quelle zur Untersuchung eines Geometrieunterrichts, der möglicherweise den durch die Meraner Vorschläge geforderten inhaltlichen und methodischen Rahmen sowie das konkretere Vorgehen mit Bezug zur Begriffsbildung im Unterricht umsetzt und die Auswertung psychologischer Ergebnisse für den Unterricht berücksichtigt.

In dem Vorwort des Lehrbuchs heißt es:

> In den „Richtlinien zur Aufstellung von Lehrplänen für die oberen Jahrgänge der Volksschule“ vom 15. Oktober 1922 wird in dem von der Raumlehre handelnden Abschnitt folgende methodische Anweisung gegeben: „Bei der Beweisführung ist das Verfahren durch Messung und Bewegung (Verschieben, Umlegen, Drehen) gegenüber dem durch bloße Schlußfolgerung (dem Euklidischen) zu bevorzugen. Von der Anwendung des letzteren kann auch ganz abgesehen werden.“
>
> Eine ähnliche Vorschrift finden wir in den „Bestimmungen über die Mittelschulen in Preußen“ vom 1. Juni 1925; sie lautet: „Die Bewegung (Parallelverschiebung, Umlegung, Drehung) ist weitgehend zu benutzen. Erst auf Grund der so gewonnenen klaren Vorstellungen sind Begriffserklärungen, Grund- und Lehrsätze zu erarbeiten.“
>
> Diesen Forderungen haben die Verfasser der neuen Lehrbücher sich anzupassen gesucht, einige vorsichtig zurückhaltend, andere fester zugreifend; aber in keinem der uns bekannten Werke ist der Grundsatz der Bewegung planmäßig durchgeführt. […]
>
> […]
>
> In diesem vorliegenden Buche ist – vielleicht zum erstenmal – der Versuch gemacht worden, die Behandlung des Hauptgliedes der Raumlehre durchgehend auf Bewegung zu gründen. (Kusserow 1985, im Original 1928, S. 5f)

Hier wird eine Abwendung von dem euklidischen Lehrgang in dem Sinn angesprochen, dass Bewegungen die Grundlage für Begriffsbildungen und Beweisführungen werden sollen. Dies impliziert, wie anschließend erläutert wird, auch eine bessere Vernetzung von Begriffen miteinander sowie eine anschaulichere Gestaltung von Beweisführungen. Weiterhin wird im Vorwort der Arbeitsschulgedanke dahingehend angesprochen, dass Lernende sich Inhalte selbst, auch in Anlehnung an deren historische Entwicklung, erarbeiten sollen.

Das Inhaltsverzeichnis des Lehrbuchs ist erneut aufschlussreich (Abb. 14).

Inhaltsverzeichnis.

Abb. 14: Ausschnitt aus dem Inhaltsverzeichnis aus Kusserow 1985, im Original 1928, S. 3

Es lässt sich wiederum erkennen, dass im ersten Kapitel ein Blick auf ausschließlich planimetrisch betrachtete mathematisch elementarste Objekte geworfen wird, statt auf aus dem Alltag der Lernenden vorhandene Raumvorstellungen zurückzugehen. Auch insgesamt bezieht sich der Lehrgang ausschließlich auf planimetrische Betrachtungen und die Stereometrie bleibt komplett ausgeschlossen. Das dritte Kapitel behandelt schon die Kongruenzsätze und stellt damit zumindest der beweglicheren Geometrie die zuvor vorherrschende Geometrie zur Seite.

In den ersten beiden Kapiteln selbst werden ebene geometrische Formen anhand ihres Auftretens im Umfeld der Lernenden oder in der Technik beschrieben, Erklärungen sind dabei stark funktional geprägt und Definitionen werden nicht vorgenommen. Aktives Handeln in Form von mit auf Pauspapier gezeichneten Objekten durchgeführten Operationen kommt teilweise zur eigenständigen Erarbeitung von Sachverhalten zum Einsatz. Die Visualisierung vieler Objekte ist jedoch sehr einseitig, Bewegungen werden allerdings angedeutet.

Im dritten Abschnitt des ersten Kapitels haben das Umfeld der Lernenden und technische Betrachtungen geringeres Gewicht, wie die Behandlung des Winkelbegriffs zeigt (Abb. 15).

In der Erzeugung eines Winkels durch Drehung ist der funktionale Gedanke inhärent. Zudem wird operativ induktiv vorgegangen, da genauer von zwei Strahlen ohne Richtungsunterschied ausgehend ein Winkel als Richtungsunterschied der Strahlen erzeugt wird. Die Darbietung in Form eines Fließtextes zeigt auch, dass nicht mit einer strengen mathematischen Terminologie gearbeitet wird. Allerdings werden Winkel erneut einseitig, meist mit einem Schenkel parallel zur kürzeren Buchseite, dargestellt. Im folgenden Unterrichtsgang wird mit einer Winkeluhr gearbeitet, die zur Veranschaulichung sowie zum Herstellen einer Verbindung von Winkel- und Bogengrößen mit Zeitgrößen dient. Darüber hinaus wird allerdings kein Bezug zum Umfeld der Lernenden und auch kein Bezug zur Stereometrie hergestellt.

Der Winkel.

Unter einem Winkel verstehen wir den Richtungsunterschied zweier Strahlen. Ob sie den Anfangspunkt gemein haben oder von verschiedenen

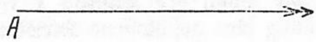


Fig. 7.

Punkten ausgehen, halten wir für belanglos; denn ein Richtungsunterschied ist immer vorhanden, wenn die Strahlen nicht gleichgerichtet sind. Die Größe der Abweichung läßt sich allerdings nicht ohne weiteres messen, wenn die Strahlen von verschiedenen Punkten auslaufen; doch davon später.

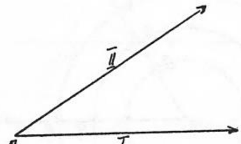


Fig. 8.

Wir führen zunächst zwei Strahlen vor, die unzweifelhaft dieselbe Richtung haben (Fig. 7). Den oberen Strahl, der auf Pauspapier gezeichnet ist, halten wir im Punkte A mit einer Nadel auf der Unterlage fest und drehen ihn. Dadurch erhält er eine andere Richtung; es ist ein Richtungsunterschied der beiden Strahlen entstanden. Seine Größe ist offenbar von der Größe der Drehung abhängig. Wir bestimmen den Richtungsunterschied zweier Strahlen, indem wir die Größe der Drehung messen, durch die er entstanden ist, oder anders aufgefaßt, durch die der

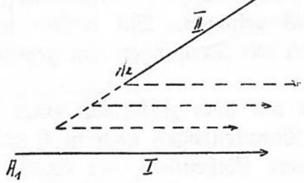


Fig. 9.

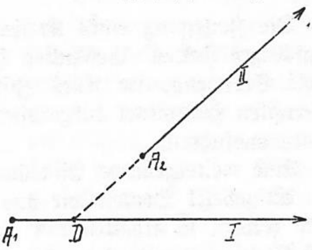


Fig. 10.

entstandene Richtungsunterschied wieder aufgehoben werden kann.

Abb. 15: Ausführungen zum Winkelbegriff aus Kusserow 1985, im Original 1928, S. 26

In den ersten beiden Kapiteln sind weiterhin Beweisführungen funktional und induktiv geprägt, wie auch der Beweis des Winkelsummensatzes zeigt (Abb. 16).

2. Satz: Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°. Auch diesen Satz leiten wir durch Drehung und Verschiebung ab. (Fig. 51.) Wieder legen wir den beweglichen Strahl auf AB, drehen ihn aber nicht um den Eckpunkt B, sondern um A linksherum, bis er durch den Eckpunkt C geht. Die Drehungsgröße ist in dem Winkel x gegeben. Jetzt halten wir den Punkt C fest und drehen den Strahl in demselben Sinne weiter, bis er die Seite BC deckt; der Winkel z stellt die Größe der Drehung dar. Zuletzt drehen wir den Strahl noch um B in die Richtung BA.

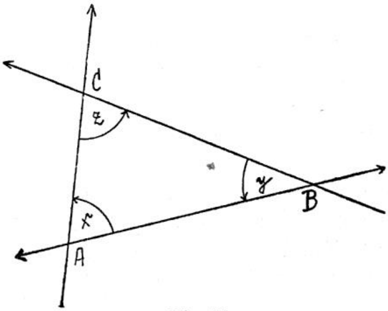


Fig. 51.

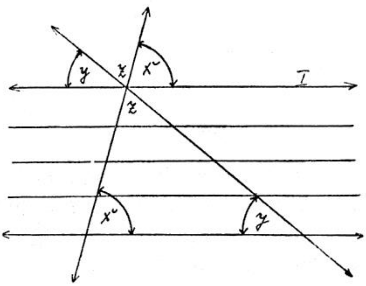


Fig. 52.

Den Vorgang noch einmal überschauend, stellen wir fest: Der Strahl ist um die Summe der Winkel x, z und y gedreht worden, und er hat jetzt, mit seiner Ausgangslage verglichen, die entgegengesetzte Richtung; folglich $\sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 180^{\circ}$.

Abb. 16: Beweis des Winkelsummensatzes aus Kusserow 1985, im Original 1928, S. 41[29]

Hier geht der Satz über die Außenwinkelsumme des Dreiecks dem über die Innenwinkelsumme zuvor. Es wird funktional verfahren, da durch Drehung des Strahls Veränderlichkeit und Beweglichkeit sowie Verformungen betont werden. Zudem wird induktiv geschlossen, da von einem beliebigen Dreieck, mit dem enaktiv mittels Pauspapier operiert wird, aus verallgemeinert wird. Dabei ist der Beweis auf Anschauungsargumenten begründet und wird sukzessive entwickelt.

Insgesamt lässt sich, bezogen auf die Behandlung des Winkelbegriffs und den Beweis des Winkelsummensatzes, somit feststellen, dass das Lehrbuch von KUSSEROW teilweise Ideen aus in den Methodiken veröffentlichten Un-

[29] Es ist zu erwähnen, dass Fig. 51 aus Kusserow ein Dreieck visualisiert, von dessen Schenkeln keiner parallel zu einer Buchseite liegt. Bei dem Fokus auf die Parallelität einer Dreiecksseite zur Hilfslinie durch den gegenüberliegenden Punkt in Fig. 52 ist allerdings auch die Parallelität zur kürzeren Buchseite wieder vorhanden.

terrichtsvorschlägen in elementarerer Form umsetzt. Es wird zunächst bei der Behandlung des Winkelbegriffs, wenn auch anders als bei TREUTLEIN oder HÖFLER, so doch operativ induktiv vorgegangen. Allerdings wird auch hier nicht die von TREUTLEIN geforderte Fusion von Stereometrie und Planimetrie umgesetzt, und es wird kein Bezug zum Umfeld der Lernenden hergestellt. Hinsichtlich des Beweises des Winkelsummensatzes wird ein experimentelle und logisch-deduktive Elemente vereinender, Funktionalität betonender Beweis angegeben, und es ist ein, wenn auch von jenen durch HÖFLER und LIETZMANN formulierten Wegen abweichender, so doch induktiver Weg umgesetzt. Der Beweis wird so auf einer elementaren Ebene sukzessive, mit Verweis auf die verwendeten Heuristiken, dargestellt, was die Entwicklung von elementaren, für Beweisen notwendigen prozessualen Fähigkeiten erlaubt.

Mathematikmethodik[30] der DDR in den 1960er und 1970er Jahren

Entwicklungsphasen der Mathematikmethodik

In den späten 1940er Jahren erfolgte eine Anknüpfung der Mathematikmethodik an Erfahrungen aus der Weimarer Zeit. Die 1950er waren dann durch einen wachsenden Einfluss der Sowjetunion, dabei insbesondere auch eine wachsende Bezugnahme auf die sowjetische Psychologie, sowie einen bleibenden Rückbezug auf reformpädagogische Ansätze gekennzeichnet. Die Lehrpläne dieser Zeit waren noch reine Stoffpläne, die Freiheiten bezüglich der Stoffanordnung erlaubten und nur knappe fachdidaktische Anmerkungen enthielten (vgl. Borneleit 2003; Junge/Neigenfind 1960; Schulz 2003).

In den 1960er Jahren wurden einige politische Entscheidungen mit Einfluss auf mathematikmethodische Forschungen getroffen. So wurde in Folge des Mathematikbeschlusses des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR im Jahr 1962 die zentrale staatliche Kommission für den Ma-

[30] Sowohl Ziele und Inhalte als auch Methoden können als unter die Mathematikmethodik fallend gesehen werden, wobei Ziele und Inhalte wenig öffentlich diskutiert wurden und Lehrpläne teilweise sehr eng vorgegeben waren (vgl. Bender 2003). Die Mathematikmethodik zeichnete sich außerdem durch starken Rückgriff auf die Bezugswissenschaften der Gesellschaftstheorie, Erkenntnistheorie, allgemeinen Didaktik und Mathematik sowie durch ein hohes Maß an Interdisziplinarität aus (vgl. Walsch 2003).

thematikunterricht gegründet, welche dann die Arbeit und Forschung des Fachgebiets koordinierte. Eine weitere Entscheidung mit großem Einfluss auf die Mathematikmethodik war die Gründung der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften im Jahr 1970 sowie die Gründung der Forschungsgruppe „Mathematik“ dort, die von da an die Arbeit des Fachgebiets koordinierte. Sie hatte weiten Einfluss auf die Auswahl der Forschungsgegenstände der einzelnen Gruppen und beeinflusste auch wesentlich die verwendeten Forschungsmethoden, wobei im Laufe der Zeit aus der Koordinierung der Forschungsaktivitäten eine immer stärker werdende Führung wurde (vgl. Borneleit 2003; Schulz 2003; Weber 2003).

Die 1960er und 1970er Jahre insgesamt lassen sich durch die „mengentheoretische Fundierung“ des Mathematikunterrichts kennzeichnen. Mit der mengentheoretischen Fundierung einher ging die Überwindung der als negativ bezeichneten Einflüsse der Reformpädagogik, die für den Mathematikunterricht auch einen endgültigen Bruch mit dem Raumlehreunterricht der Volksschule bedeutete. So verschwanden beispielsweise Termini aus dem Unterricht, die in der Fachwissenschaft Mathematik nicht gebräuchlich waren,[31] und die Fachsprache wurde präziser. Auf Grund bereits erwähnter politischer Entscheidungen wurden allerdings erst ab Ende der 1960er Jahre mengentheoretisch fundierte mathematikmethodische Arbeiten herausgegeben, und es dauerte ebenfalls bis Ende der 1960er Jahre, bis sich die mengentheoretische Fundierung vollständig in Lehrplänen und Schulbüchern niedergeschlagen hatte. Der mengentheoretische Lehrplan war dabei stark vorgeprägt und ließ den Lehrkräften wenig Freiheiten mit Bezug auf Auswahl, Umfang und Tiefe der zu behandelnden Stoffe (vgl. Borneleit 2003; Schulz 2003).

Die mengentheoretische Fundierung unterschied sich, auch wenn sie teilweise von ähnlichen Überlegungen geleitet war, von der auch in diese Zeit fallende Bewegung der Neuen Mathematik im Westen. So stand nicht das Unterrichten von Elementen der Mengenlehre im Mittelpunkt. Man sah weiterhin von einer Algebraisierung der Geometrie, der Verwendung von Vektoren in den ersten 10 Schuljahren und der Behandlung von Determinanten

[31] So wurden im Raumlehreunterricht der Volksschule beispielsweise deutsche Bezeichner verwendet, wie Halbmesser anstatt Radius und Kreisumfang anstatt Peripherie. Dies war in der mengentheoretischen Fundierung nicht mehr der Fall.

und Matrizen ab. Der Grund dafür, dass die Neue Mathematik keinen Niederschlag in der Mathematikmethodik fand, ist darin zu sehen, dass sich das System der Volksbildung noch im Institutionalisierungsprozess befand, was zur Folge hatte, dass eventuell in Aussicht genommene Veränderungen nicht mehr wirksam wurden, weil bereits die ersten Negativmeldungen über das Unterrichten der Mengenlehre vorlagen. Weiterhin war mit der mengentheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts bereits ein Alternativkonzept entwickelt worden (vgl. Schulz 2003).

Die 1980er waren schließlich gekennzeichnet durch die Reduktion theoretischer Erhöhungen. Damit sollte auf Probleme in der Schulpraxis reagiert werden und eine Hinwendung zu den Lernenden und deren Könnensentwicklung erfolgen. In den 1980ern wurden auch die Lehrpläne entschlackt, um den Spielraum von Lehrkräften bei Planung und Gestaltung des Unterrichts zu vergrößern (vgl. Borneleit 2003; Schulz 2003).

Der Lehrplan der mengentheoretischen Fundierung konkret

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts, welche die Mathematikmethodik wesentlich prägte. Die Ziele und Aufgaben des Unterrichts, hier für die Klassen 6 bis 8 der polytechnischen Oberschulen[32], werden als Einleitung in den jeweils jahrgangsstufenspezifisch aufgegliederten Lehrplan von 1969 formuliert:

> Die Schüler müssen sich in diesem Zeitraum mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten in einem solchen Umfang und in einer solchen Qualität aneignen, daß sie einmal in zunehmendem Maße mathematische Mittel und Methoden zum besseren Erkennen und tieferen Verstehen ihrer Umwelt einsetzen können und zum anderen den erhöhten Anforderungen in den beiden Abschlußklassen der polytechnischen Oberschule gerecht zu werden vermögen. Durch die weitere Schulung des Abstraktionsvermögens, durch die Befähigung zum Verallgemeinern, zur Begriffsbildung, zum Erkennen von Zusammenhängen und zum Systematisieren sowie durch das Herausbilden erster Fähigkeiten zum Definieren und Beweisen trägt der Mathematikunterricht gleichzeitig zur allgemeinen geistigen Entwicklung der Schüler bei. (Lehrplan 1969, S. 23)

[32] Praktisch alle Schülerinnen und Schüler der DDR besuchten mindestens bis zur Klassenstufe 8 die allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen.

Hier wird auf den Beitrag der Mathematik zum Verstehen der Umwelt, und damit auch auf ein Prinzip der Allgemeinbildung[33], auf die vorbereitende Rolle des Unterrichts für den weiteren Bildungsgang sowie auf den formalen Bildungswert der Mathematik als Bestandteil geistiger Entwicklung verwiesen. Es wird die Bedeutung des Unterrichts für die sozialistische Gesellschaft deutlich, dessen erklärtes Ziel die bestmögliche Bildung und Entwicklung der einzelnen Bürger war, damit diese die Gesellschaft als Ganzes bestmöglich unterstützen können.

Die Ziele und Aufgaben mit Bezug zum Geometrieunterricht beziehen sich weitestgehend auf Inhalte. Etwas über rein inhaltliche Ideen hinausreichend heißt es allerdings:

> Die geometrischen Stoffgebiete des Mathematikunterrichts der Klassen 6 bis 8 haben das Ziel, die Schüler auf abbildungsgeometrischer Grundlage mit den Begriffen „Kongruenz“ und „Ähnlichkeit“ sowie mit wichtigen Eigenschaften der entsprechenden umkehrbar eindeutigen Abbildungen der Ebene auf sich vertraut zu machen und sie zu befähigen, unter Verwendung dieser Kenntnisse wichtige Lehrsätze über ebene Figuren abzuleiten beziehungsweise zu beweisen. (Lehrplan 1969, S. 24)

Auch wenn Abbildungsgeometrie als Grundlage genannt wird, erhält Kongruenzgeometrie vor allem als Beweismittel eine zentrale Rolle. Weiterhin wird planimetrischen Betrachtungen und einer formal-deduktiven Vorgehensweise, insbesondere dem Beweisen, ein hoher Stellenwert zugewiesen.

Der Lehrplan enthält zudem verschiedene Leitlinien, deren Bedeutung für die geistige Entwicklung besonders herausgehoben wird. Diese Leitlinien sind dennoch sehr inhaltlich geprägt und beziehen sich größtenteils auf Ideen, die den Mathematikunterricht auf verschiedenen Jahrgangsstufen durchziehen. Die zentrale Leitlinie bildet dabei der mengentheoretische Aufbau. Es wird außerdem wieder auf die im Laufe der Schuljahre wachsende Bedeutung der Entwicklung eines Beweisverständnisses hingewiesen. Weiterhin wird konsistent zur Ausbildung des sprachlichen Ausdrucksvermögens aufgerufen, wobei Vagheit ausgeschlossen und der Umgang mit in der Mathematik üblichen Sprachformen immer geübter werden soll.

[33] Das Prinzip der Allgemeinbildung umfasste in der mengentheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts fachliches Wissen und Können, feste sozialistische Überzeugungen, bestimmte Charaktereigenschaften sowie eine sozialistische Moralauffassung (vgl. Walsch 1977).

In den Hinweisen zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts für die Klassen 6 bis 8 sowie 9 und 10 heißt es weiterhin:

> Von der Einführung eines Begriffs wird gesprochen, wenn die Schüler mit dem Begriff lediglich durch Umschreibung seines Inhalts und Umfangs, durch seine Verwendung in verschiedenen Zusammenhängen, durch Angabe von Beispielen und ähnliches vertraut zu machen sind. Ist dagegen vom Definieren des betreffenden Begriffs die Rede, so soll das Erarbeiten des Begriffs tatsächlich bis zu dessen Definition in der logischen Bedeutung des Wortes geführt werden.
>
> (Lehrplan 1969, S. 33 & S. 92)

Hier wird der Stellenwert der Begriffsbildung für den Mathematikunterricht allgemein deutlich. Die Bedeutung des sprachlichen Ausdrucksvermögens wiederum wird gezeigt durch die Unterscheidung zwischen Umschreiben und Definieren von Begriffen. Im Folgenden werden als wichtige Bestandteile eines guten Begriffsverständnisses weiterhin die Fähigkeiten, Definitionen umzuformulieren, Begriffe in ein Begriffssystem einzuordnen und im Kontext richtig zu verwenden, genannt.

Die Stoffübersicht sieht für Klasse 5 eine Wiederholung von bereits bekannten planimetrischen Grundbegriffen sowie die Behandlung darauf aufbauender Begriffe vor.[34] Es werden analog zu Flächeninhalten Rauminhalte behandelt, wobei enaktives Vorgehen vorgesehen ist, sowie Abbildungen thematisiert. Ab Klasse 6 wird dann der Fokus auf Kongruenz gelegt, und der Unterrichtsaufbau ist mit dem Fortschreiten des Unterrichts immer stärker an dem deduktiv geprägten Aufbau der Fachmathematik orientiert.

Begriffsbildung in der mengentheoretischen Fundierung

Im Rahmen der mengentheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts in der Mathematikmethodik wurde eine umfassende Methodik, Werner Walsch und Karlheinz Webers *Methodik Mathematikunterricht*, veröffentlicht, die auch primäres Lehrerhandbuch war und wesentlich die mengentheoretische Fundierung widerspiegelt. Zudem wurden durch Elisabeth Fuhrmann, Walsch sowie Hans Bock Werke zum logischen Denken, Definieren und Beweisen im Mathematikunterricht veröffentlicht, welche ebenfalls durch die mengentheoretische Fundierung geprägt sind,

[34] Der systematische Aufbau der Geometrie mit planimetrischen Grundbegriffen wie Strecken, Punkten und Geraden begann in der DDR bereits im zweiten Schuljahr (vgl. Griesel 2003).

wobei die hier genannten Werke hinsichtlich der in Ihnen thematisierten inhaltlichen und methodischen Kernideen mit weiterem und engerem Bezug zur Begriffsbildung in vielen Punkten übereinstimmen. Darüber hinaus hatten Quellen aus der psychologischen Forschung der Sowjetunion[35] einen hohen Stellenwert in der mathematikmethodischen Forschung.

Die zentrale Leitlinie des Mathematikunterrichts der Mathematikmethodik, die auch der Begriffsbildung vorangestellt war, bildet, wie bereits erwähnt, der mengentheoretische Aufbau. Der Wert dieses Aufbaus wird darin gesehen, dass Mengen aus beliebigen Objekten, insbesondere aus realen Gegenständen, gebildet werden können. Der mengentheoretische Aufbau lässt sich zudem dadurch charakterisieren, dass das Bezeichnete darin wichtiger ist, als der Bezeichner. Die Definitionen beschränken sich auf das, was zu einer eindeutigen Kennzeichnung von Begriffen unbedingt notwendig ist, wobei eine solche klare Darstellung als Bestandteil erfolgreichen mathematischen Arbeitens gesehen wird. Weiterhin wird von einem genetischen Aufbau gesprochen, der bedeutet, dass eine Fülle im Unterricht behandelter Begriffsdefinitionen aus immer wiederkehrenden einfachsten Bestandteilen konstruiert wird. Eine solche Überschaubarkeit soll es den Lernenden erleichtern, Forderungen nach Reproduktion von Begriffsbildungen und Zusammenhängen zu erfüllen (vgl. Fuhrmann 1972; Walsch & Weber 1977).

Auch in der mengentheoretischen Fundierung der Mathematikmethodik wird ein propädeutischer Unterricht bis Klasse 5 propagiert, was bedeutet, dass Begriffe zunächst der Umwelt entstammen, anschaulich erzeugt und in das angestrebte Begriffssystem eingeordnet werden sollen. Zudem sollen auch geometrisch nicht grundlegende Begriffe wie Grundbegriffe behandelt und diesen damit gleichgesetzt werden. Weiterhin wird handelnder Umgang mit Modellen angeregt. So sollen Abstraktionsfähigkeiten aufgebaut werden, indem von allen Eigenschaften der Körper außer der Gestalt abstrahiert wird. Als Hilfsmittel diesbezüglich sind für jeden Körper verschiedene Modelle vorgesehen, die sich durch verschiedene Größe, Herstellung aus unterschiedlichen Materialien und verschiedene Farbe voneinander unterscheiden

[35] Psychologische Quellen aus der Sowjetunion mit hohem Stellenwert für die mathematikmethodische Forschung lieferte beispielsweise der Entwicklungs- und pädagogische Psychologe WASSILI DAWYDOW, die pädagogischen Psychologen JOACHIM LOMPSCHER, ARTUR PETROWSKI und SERGEJ RUBINSTEIN sowie der Entwicklungspsychologe LEW WYGOTSKY.

und die nicht unbedingt für den Unterricht hergestellt sein müssen. So soll eine Wechselwirkung von Geometrie und Anschauung sowie von Geometrie im Unterricht und Geometrie im Alltag stattfinden (vgl. Fuhrmann 1972; Walsch & Weber 1977).

Schließlich sollen Elemente der euklidischen Geometrie vermittelt werden, wobei sich an einem Axiomensystem orientiert wird, das Bewegungsaxiome statt Kongruenzaxiome beinhaltet. Der Abbildungsgedanke soll dabei eine Strukturierung des Stoffes sowie klare und gut erfassbare Begriffsbildungen, auch für die Begriffe der Kongruenz und Ähnlichkeit, sowie mengentheoretisches Arbeiten, da die meisten Figuren als Punktmengen aufgefasst werden, ermöglichen. In Klassen 4 und 5 wird dabei ein propädeutischer Bewegungsbegriff erarbeitet, auf dem dann der stark deduktiv aufgebaute, an der Kongruenzidee orientierte Teil des Geometrielehrgangs ab Klasse 6 fußt (vgl. Elstermann 1992; Lorenz 1974; Walsch & Weber 1977).

Mit direktem Bezug zur Begriffsbildung werden induktives und deduktives Vorgehen unterschieden. Der induktive Weg einer Begriffsentwicklung über Beschreibungen, Erläuterungen und Anwendungen bis hin zur Definition wird als stets gangbar betrachtet, jedoch teilweise als langwierig und umständlich. Als Voraussetzungen für den deduktiven Weg eines Ausgehens von der Definition und eines Erschließens des Begriffsinhalts über Beispiele, Beschreibungen, Erläuterungen und Anwendungen werden genannt, dass den Lernenden die im Definiens enthaltenen Begriffe bekannt sind, dass die Formulierung der Definition für die Lernenden der jeweiligen Altersstufe fassbar ist, und dass das Denkvermögen der Lernenden so weit entwickelt ist, dass ein fruchtbares Arbeiten auf einem relativ hohen Abstraktionsniveau machbar ist. In der Methodik wird allerdings auch, ausgehend von der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie in der Psychologie, Begriffsbildung „vom Abstrakten zum Konkreten“ betrachtet, was meint, dass aus Erscheinungen ein Begriff abstrahiert wird, und dass dieser Begriff dann an den Erscheinungen validiert wird.[36] Das Vorgehen vom

[36] Dawydow beschreibt Begriffsbildung vom Abstrakten zum Konkreten folgendermaßen:

> Das Denken auf der Grundlage solcher Begriffe besteht einerseits im Übergang vom Sinnlich-Konkreten und Einzelnen zum Gedanklich-Abstrakten und formal Gemeinsamen, andererseits im umgekehrten Weg, im Übergang vom Abstrakten zum Sinnlich-Konkreten bei der Definition und beim Erkennen einzelner Gegenstände als zu einer be-

Abstrakten zum Konkreten wird als vorteilhaft angesehen, da die Kenntnis einzelner Objekte nicht isoliert, sondern in allgemeine Zusammenhänge und Wesensmerkmale eingeordnet und verankert wird. Zudem heißt es, dass im Prozess des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten Verfahren der Analyse des Konkreten entstehen, was zur Ausbildung der Selbstständigkeit der Lernenden beiträgt. Schließlich wird die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten als die einzige Methode genannt, durch die wissenschaftliche Begriffe und Verfahren des wissenschaftlichen Denkens herausgebildet werden können (vgl. Dawydow 1977; Fuhrmann 1972; Lompscher 1989; Walsch 1972; Walsch & Weber 1977).

Außerdem sollen Übergangsfälle betrachtet und Grenzen herausgearbeitet werden. Hier wird schon deutlich, dass das Begriffsnetz betont werden soll. Dazu sollen Übungen im Über- und Unterordnen von Begriffen, sowie im Beschreiben, Vergleichen und Herausheben von Eigenschaften herangezogen werden. Definitionen dürfen zunächst auch umgangssprachlich formuliert werden und überflüssige Nennungen enthalten, ab Klasse 6 sollen Lernende allerdings sowohl Definitionen von Objekten als auch Definitionen von Relationen kennenlernen und mit der formalen Sprache von Definitionen vertraut gemacht werden. Schließlich ist ein insgesamt einheitlicher und folgerichtiger Aufbau des Begriffssystems vorgesehen, wobei der einheitliche Aufbau unmittelbar durch den mengentheoretischen Aufbau gegeben ist. Folgerichtiger Aufbau bedeutet, dass Begriffe, sofern das mit dem Entwicklungsstand der Lernenden vereinbar ist, wenn sie verwendet werden, vollständig auf bekannte Begriffe zurückgeführt, in das Begriffsnetz eingeordnet und klar formuliert werden (vgl. Bock & Walsch 1975; Fuhrmann 1972; Walsch 1972; Walsch & Weber 1977).

Wolfgang Steinhöfel, Klaus Reichold und Lothar Frenzel beschreiben den Prozess der Begriffsbildung einheitlich durch ihre schematische Übersicht zur methodischen Gestaltung der Begriffsbildung (Abb. 17). Der Prozess der Begriffsbildung wird dabei kondensiert auf die Phasen der Orientierung auf das Problem, der Problembearbeitung, der Problemlösung sowie rückschauenden und weiterführenden Betrachtungen. Die Autoren

stimmten (gemeinsamen) Klasse gehörend. Sowohl *Anfang* als auch *Ende* dieses Prozesses ist das *Sinnlich-Konkrete* (seine Klassifizierung und Systematisierung, seine Identifizierung und Unterscheidung). (Dawydow 1977, S. 46) erwähnen, dass innerhalb dieses Schemas zumindest die Phase der Erarbeitung des Begriffsinhalts, demnach der erste Schritt der Phase der Problemlösung, unterschiedlich strukturiert sein kann, da beispielsweise von ausgewählten Repräsentanten oder der Herstellung solcher, von einem Oberbegriff, bereits verwendeten unscharfen Begriffen, analogen Begriffen oder Begriffsdefinitionen ausgegangen werden kann. Dennoch wird das Schema auf die unterschiedlichen Begriffsarten, wobei Objektbegriffe, Eigenschaftsbegriffe, Relationsbegriffe und Operationsbegriffe unterschieden werden, verallgemeinert. Dies betont wiederum das Ziel eines einheitlichen und folgerichtigen Aufbaus des Begriffssystems (vgl. Steinhöfel, Reichold & Frenzel 1977 & 1988).

Schematische Übersicht zur methodischen Gestaltung der Begriffseinführung

Orientierung auf das Problem (1)[1]	Zusammenfassung der in bezug auf den einzuführenden Begriff schon vorhandenen Kenntnisse (Ausgangsniveau)
	Motivierung für die Einführung des „neuen“ Begriffs bzw. für das Erarbeiten einer Definition für den Begriff
	Zielstellung und -präzisierung: Präzisierung der Forderungen, was zu definieren ist (Objekt, Relation, Operation) unter Beachtung inhaltlicher (Zweckmäßigkeit z. B. durch Berücksichtigung des Permanenzprinzips) und logischer Bedingungen (Umfangsgleichheit, Zirkelfreiheit, Widerspruchsfreiheit)
Problembearbeitung	Schaffung einer Ausgangssituation durch Bereitstellen bzw. „Erzeugen“ von Untersuchungsobjekten entsprechend der Zielstellung
	Wahl einer Strategie vor allem durch Orientieren am Vorgehen bei ähnlichen Definitionsproblemen (z. B.: gemeinsame Merkmale der Objekte suchen, Permanenzprinzip beachten, . . .) und entsprechendes Festlegen von Handlungsschritten für die Untersuchung bestimmter Objekte unter Beachtung des Begriffsumfangs
Problemlösung	Feststellen gemeinsamer (und nichtgemeinsamer) Merkmale der betrachteten Objekte bzw. Finden der Beziehungen, durch die das Definiendum ersetzt werden kann (bei Definitionen von Operationen, Termen, . . .)
	Formulieren einer Begriffserklärung bzw. Definition (dabei Reduktion der gemeinsamen Merkmale auf ein notwendiges und hinreichendes System von Merkmalen)
Rückschauende und weiterführende Betrachtungen (2)[1]	Grenzfälle und Sonderfälle des Begriffs
	Betrachtungen zur Zweckmäßigkeit der Definition
	Einordnen des Begriffs in ein Begriffssystem (graphische Veranschaulichung)
	Verdeutlichen und „Abheben“ der Strategie der Begriffsbildung (Möglichkeiten der Übertragung)

Abb. 17: Schematische Übersicht zur methodischen Gestaltung der Begriffsbildung aus Steinhöfel, Reichold & Frenzel 1977, S. 648

Letztlich dürfen Beweise zunächst induktiven Charakter oder die Form von Plausibilitätsbetrachtungen, verpackt in Begründungen und Argumentationen, haben. Ab Klasse 6 soll allerdings ein Gefühl für Problemsituationen und damit auch ein Verständnis für Beweisnotwendigkeiten entstehen. Dabei sollen Beweise sukzessive, mit Hilfe von Handlungen auf unterschiedlichen Internalisierungsebenen, erarbeitet werden, damit die für Beweisen notwendigen prozessualen Fähigkeiten gelernt werden können. Darüber hinaus soll ein Bedürfnis nach logischer Strenge, vor allem bezogen auf die formal deduktive Ebene, sowie Sicherheit im Umgang mit formalisierten Ausdrücken entwickelt werden. Der Prozess der Beweisführung wird schließlich in einer schematischen Übersicht zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise ebenfalls kondensiert auf vier Phasen, die jenen des Prozesses der Begriffsbildung sehr ähnlich sind. So wird unterschieden zwischen der Orientierung auf das Problem, der Bearbeitung des Problems bei der Satzfindung, der Lösung des Problems sowie rückschauenden und weiterführenden Betrachtungen. Es wird wiederum erwähnt, dass die Umsetzung des Schemas abhängig von jeweils situativen Bedingungen, wie stoff-, alters- und zeitbedingten Umständen sowie Aneignungsniveau und Zielstellung ist. Dennoch betont die Existenz eines solchen Schemas das Ziel einer einheitlichen Entwicklung von Sätzen und Beweisen. Die Analogie der schematischen Übersichten zur methodischen Gestaltung der Begriffsbildung sowie zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise zeigt zusätzlich Parallelen zwischen der Arbeit mit Begriffen sowie mit Sätzen und Beweisen auf. Diese schematischen Übersichten liefern eine Orientierung für konkretes unterrichtliches Vorgehen und damit auch einen Grund, weswegen konkrete Unterrichtsvorschläge in methodischer Literatur weniger weit verbreitet sind (vgl. Bock & Walsch 1975; Steinhöfel Reichold & Frenzel 1988; Walsch & Weber 1977).

Begriffsbildung in der Schulbuchreihe der mengentheoretischen Fundierung

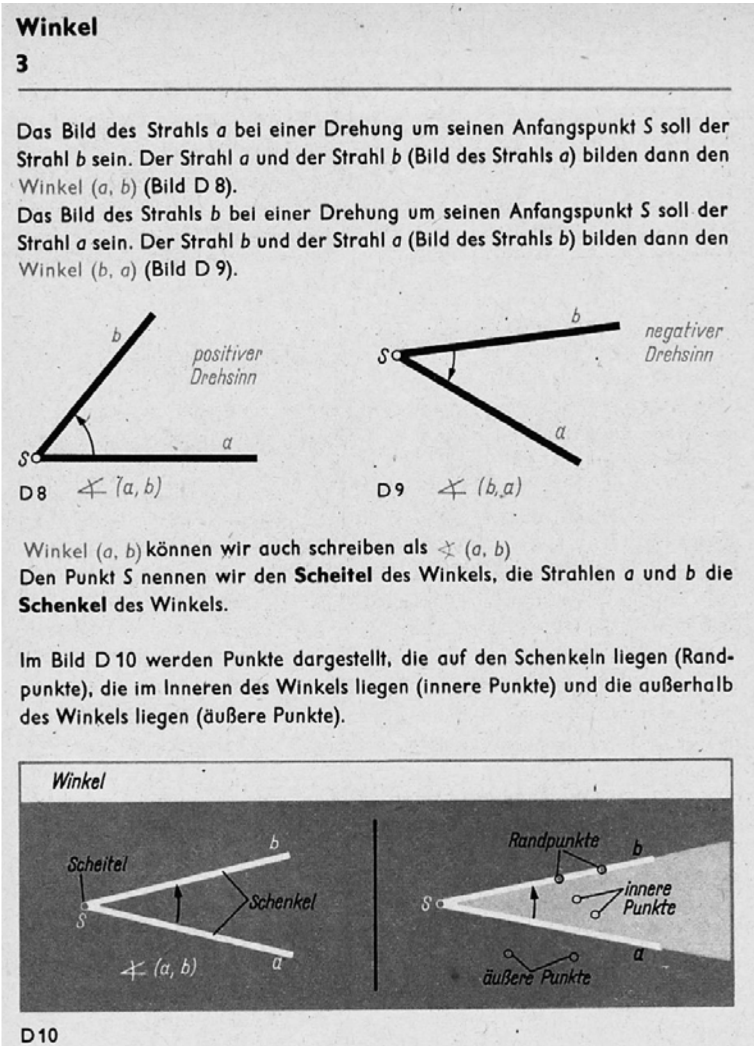
In der früheren DDR wurde ab den 1960er Jahren in mehreren Auflagen nur eine Schulbuchreihe für polytechnische Oberschulen mit jeweils einem Buch pro Jahrgangsstufe veröffentlicht, die basierend auf den jeweils aktuellen Lehrplänen von einer Reihe in der Fachmethodik tätiger Autoren erarbeitet wurde. Daher ist davon auszugehen, dass die im Lehrplan formulierten Ziele und Aufgaben, Leitlinien sowie Hinweise zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts weitestgehend, die vorgesehenen Inhalte hingegen sogar vollständig berücksichtigt wurden (vgl. Borneleit 2003).

Die Inhaltsübersichten der Schulbuchreihe enthalten für den Geometrieunterricht, wie die Stoffübersicht des Lehrplans erwarten lässt, für Klasse 5 die Themen „Messen und Einheiten“, worunter das Arbeiten mit, insbesondere das Messen von Strecken, Flächeninhalten und Rauminhalten fällt, sowie „Geometrische Grundbegriffe und Konstruktionen“, worunter das Arbeiten mit den Begriffen „Drehungen“, „Winkel“ und „Spiegelungen“ fällt. In Klasse 6 folgt „Planimetrie“ mit den Unterthemen „Bewegung und Kongruenz“, „Beziehungen zwischen Winkeln“, „Dreiecke“, „Kongruenz von Dreiecken“, „Vierecke und Vielecke“ und „Flächeninhalt und Umfang von Vielecken“ sowie in Klasse 7 „Darstellende Geometrie“, „Der Kreis“ und „Stereometrie“ mit den Unterthemen „Prismen“ und „Kreiszylinder“. In Klasse 8 wird sich der „Ähnlichkeit“ und „Flächen- und Rauminhaltsberechnung“ gewidmet, und der Geometrieunterricht der Mittelstufe wird in Klasse 10 mit „Winkelfunktionen“ abgeschlossen (vgl. Bittner et al. 1982a; Bittner et al. 1982b; Kreusch et al. 1982; Richter et al. 1985; Tietz et al. 1982). Eine solche Unterrichtsstruktur ist mit einem mengentheoretischen Aufbau vereinbar und erlaubt propädeutischen Unterricht in Klasse 5 einschließlich Konstruktionen von Bewegungen. Die Eigenschaften dieser bilden darauf aufbauend in Klassenstufe 6 die Grundlage für die Kongruenzsätze, welche dann eine zentrale Rolle einnehmen. Dass sich dabei implizit an einem Axiomensystem orientiert wurde, zeigt das zentrale mathematik-methodische Werk aus der mengentheoretischen Fundierung:

> Möglich ist jedoch eine Orientierung an einem Axiomensystem […], um ein den ganzen Lehrgang durchziehendes einheitliches Begriffssystem entwickeln und die der Geometrie innewohnenden Potenzen zur Herausbildung von Elementen einer deduktiven Denk- und Arbeitsweise wenigstens von einer gewissen Klassenstufe an (etwa von Klasse 6 an) ausnutzen zu können.
>
> (Walsch & Weber 1977, S. 112)

In dem Kapitel „Messen und Einheiten“ in Klasse 5 werden zunächst bereits bekannte Grundbegriffe wiederholt. Dabei werden auch geometrisch als nicht grundlegend betrachtete Begriffe wie Rechteck oder Quader naiv verwendet. Die Begriffe des Flächen- und Rauminhalts werden analog zueinander mittels enaktivem Zugang behandelt, auf verschiedene Modelle wird allerdings nur kurz verwiesen. Im Kapitel „Geometrische Grundbegriffe und Konstruktionen“ wird der mengentheoretische Aufbau bereits angedeutet, mit diesem Kapitel wird auch der Abbildungsgedanke dem Kongruenzgedanken vorangestellt. In beiden genannten Kapiteln haben Definitionen den Charakter von Umschreibungen, und auch Beweise werden in der Form von Plausibilitätsbetrachtungen gegeben, die Notation wirkt dennoch schon sehr fachwissenschaftlich geprägt und damit formal. In dem Kapitel „Planimetrie“ in Klasse 6 werden schließlich grundlegende Eigenschaften von Bewegungen systematisch zusammengefasst, bevor die Kongruenzsätze behandelt werden.

Der schon in Klasse 5 angedeutete mengentheoretische Aufbau zeigt sich auch in der Behandlung des Winkelbegriffs (Abb. 18).



Winkel

3

Das Bild des Strahls *a* bei einer Drehung um seinen Anfangspunkt S soll der Strahl *b* sein. Der Strahl *a* und der Strahl *b* (Bild des Strahls *a*) bilden dann den Winkel (*a*, *b*) (Bild D 8).
Das Bild des Strahls *b* bei einer Drehung um seinen Anfangspunkt S soll der Strahl *a* sein. Der Strahl *b* und der Strahl *a* (Bild des Strahls *b*) bilden dann den Winkel (*b*, *a*) (Bild D 9).

Winkel (*a*, *b*) können wir auch schreiben als ∢ (*a*, *b*)
Den Punkt S nennen wir den **Scheitel** des Winkels, die Strahlen *a* und *b* die **Schenkel** des Winkels.

Im Bild D 10 werden Punkte dargestellt, die auf den Schenkeln liegen (Randpunkte), die im Inneren des Winkels liegen (innere Punkte) und die außerhalb des Winkels liegen (äußere Punkte).

Abb. 18: Ausführungen zum Winkelbegriff aus Kreusch et al. 1982, S. 78

In dem Hinweis auf den Winkel als Punktemenge zeichnet sich bereits der mengentheoretische Aufbau ab, wenn die Definition anfangs auch umgangssprachlich formuliert ist. Darüber hinaus ist propädeutisches Vorgehen, im Sinne eines Anknüpfens an die Umwelt und eines Arbeitens mit Modellen, allerdings nicht durchgesetzt. Weiterhin wird schon deduktiv, in elementarer Form, vorgegangen, da eine Beschreibung von Winkel vorangestellt wird, bevor im Folgenden kurz Beispiele, Erläuterungen und Anwendungen thematisiert werden. Zudem werden im weiteren Unterrichtsgang verschiedene Winkelarten unterschieden, was als Übung im Über- und Unterordnen von Begriffen gelten kann. Das Schema zur methodischen Gestaltung der Begriffseinführung findet sich allerdings, auch bei Einbettung der Behandlung des Winkelbegriffs in den Kontext des Geometrielehrgangs, bestenfalls sehr oberflächlich. So sind im vorhergehenden Abschnitt „Drehungen“ höchstens implizit die Phasen der Orientierung auf das Problem und der Problembearbeitung enthalten, die angegebene Beschreibung von Winkel kann kaum als Problemlösung angesehen werden, allenfalls können folgende Abschnitte mit rückschauenden und weiterführenden Betrachtungen identifiziert werden.[37]

Der geometrische Unterricht ab Klasse 6 zeichnet sich weiterhin durch ein sehr formales Vorgehen aus, wie auch der Beweis des Winkelsummensatzes zeigt (Abb. 19).

Hier stehen eine formal-deduktive Beweisführung und eine sehr formalisierte Ausdrucksweise nebeneinander. Es lässt sich das Schema zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise in das hier propagierte Vorgehen hineinlesen.[38] So können a), b) und c) als Phasen der Orientierung auf das Problem sowie der Bearbeitung des Problems bei der Satzfindung gesehen werden. Der Beweis selbst ließe sich der Lösung des Problems zuordnen, bei der abschließend geforderten Begründung würde es sich um eine rückschauende und weiterführende Betrachtung handeln.

[37] Die Ausführungen in der auf dem Lehrbuch basierten Unterrichtshilfe bestätigen, dass das Schema zur methodischen Begriffseinführung nicht explizit befolgt wurde (vgl. Ritter et al. 1976).

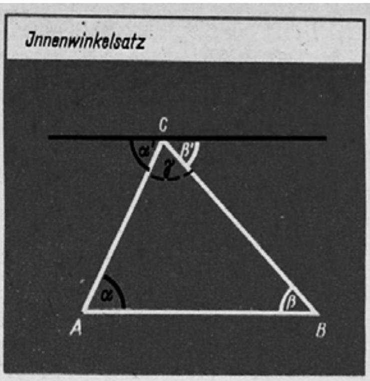
[38] Die Ausführungen in der auf dem Lehrbuch basierten Unterrichtshilfe zeigen auch hier allerdings keine explizite Befolgung des Schemas zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise (vgl. Ritter et al. 1975).

15 Satz über die Innenwinkel eines Dreiecks

a) Zeichne ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck!
b) Miß in jedem Dreieck die Innenwinkel und bilde jeweils ihre Summe!
c) Vergleiche die Summen! Was vermutest du?

SATZ: In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Beweis: α, β und γ seien die Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ABC.
Durch C gibt es genau eine Parallele zur Geraden AB. Die zu α bzw. β gehörigen Wechselwinkel bezeichnen wir mit α' bzw. β' (Bild D 26).



D 26

Dann gilt: $\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$ als gestreckter Winkel
$\left.\begin{array}{l}\alpha = \alpha' \\ \beta = \beta'\end{array}\right\}$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

Daraus folgt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, w. z. b. w.

Begründe, daß ein Dreieck höchstens einen rechten bzw. höchstens einen stumpfen Winkel haben kann!

Abb. 19: Beweis des Winkelsummensatzes aus Tietz et al. 1982, S. 109f

Gegenüberstellung der Begriffsbildung in den betrachteten Epochen

Die Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge, die Reformen im Umfeld des RICHERTschen Lehrplans sowie die mengentheoretische Fundierung des Mathematikunterrichts in der Mathematikmethodik der DDR zeichnen sich durch einige, mit Bezug zur Begriffsbildung im Geometrieunterricht relevante, übereinstimmende Aspekte aus. So wurde eine stärkere Vernetzung verschiedener Gebiete des Mathematikunterrichts gefordert. Diese sollte im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERT-schen Lehrplans durch eine Durchdringung von Geometrie und Arithmetik, in der Mathematikmethodik hingegen durch den mengentheoretischen Aufbau erreicht werden. Zudem wurde ein propädeutischer Geometrieunterricht gefordert, in dem handelnder Umgang mit Modellen stattfinden sollte und der zu einer Fusion von Stereometrie und Planimetrie, beziehungsweise Geometrie und Anschauung beitragen sollte. Weiterhin wurde im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans eine beweglichere Geometrie und damit eine Verwendung von Kongruenzabbildungen statt Kongruenzsätzen als zentrales Beweismittel gefordert. Diese Forderung findet sich in der mengentheoretischen Fundierung teilweise repliziert in dem Aufruf zum Unterrichten einer euklidischen Geometrie, die auf Bewegungen statt auf Kongruenzaxiomen aufgebaut ist. Hierbei ist allerdings auch zu erwähnen, dass die Forderungen aus dem Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans bedeutend weiter sind, als jene aus der mengentheoretischen Fundierung, da diese sich auf ein allgemein funktional dynamisches Vorgehen bei der Bearbeitung geometrischer Fragestellungen, jene aus der mengentheoretischen Fundierung hingegen nur auf die Verwendung von Eigenschaften von Bewegungen als Grundlage für die Kongruenzsätze beziehen.

In den genannten Epochen war mit direktem Bezug zur Begriffsbildung zu einer Orientierung am Entwicklungsstand der Lernenden aufgerufen, womit sowohl induktives als auch deduktives Vorgehen, neben in der mengentheoretischen Fundierung auch dem Vorgehen vom Abstrakten zum Konkreten, als legitim galt. Dabei wurde allerdings im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans der operative Aspekt stark betont, der induktivem Vorgehen bei der Begriffsbildung einen eigenen Wert aufprägte, in der mengentheoretischen Fundierung hingegen wurde induktives Vorgehen vor allem als Hilfsmittel beim Erlernen einer deduktives Arbeitsweise gesehen. Darüber hinaus sollte insgesamt das Begriffsnetz betont werden, im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans wurde allerdings die Anschaulichkeit stärker akzentuiert, in der mengentheoretischen Fundierung waren Definitionen wichtiger. Schließlich wurde im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans ein logischer Aufbau des Begriffssystems, in dem die Behandlung von Begriffen motiviert geschieht, in der mengentheoretischen Fundierung hingegen ein einheitlicher und folgerichtiger Aufbau dessen gefordert, der sich unter anderem in der Angabe des Schemas für den Prozess der Begriffsbildung widerspiegelte. Auch bezogen auf die Beweisführung sollte der Entwicklungsstand der Lernenden berücksichtigt werden, im Umfeld der Meraner Vorschläge und des RICHERTschen Lehrplans hatte allerdings das Beweisverständnis einen sehr hohen Wert, in der mengentheoretischen Fundierung der Umgang mit formalisierten Ausdrücken. Zudem wurde in der mengentheoretischen Fundierung die Einheitlichkeit im Aufbau des mathematischen Systems ebenso durch die Angabe des Schemas für den Prozess der Beweisführung ausgedrückt.

Des Weiteren darf nicht unberücksichtigt bleiben, dass die im Umfeld der Meraner Vorschläge entstandenen methodischen Ideen und Forderungen sowie Unterrichtsvorschläge nur teilweise in jenen in direktem Anschluss an die Meraner Vorschläge veröffentlichten Lehrbüchern umgesetzt waren. So kam in dem Lehrbuch von BEHRENDSEN und GÖTTING handelnder Umgang mit Modellen sehr kurz, und auch die Fusion von Stereometrie und Planimetrie war nur ansatzweise durchgesetzt. Zudem wird bei Begriffsbildungen operativ induktives Vorgehen vernachlässigt und bei Beweisführungen deduktives und auch symbolisch formales Vorgehen angewendet, wenn auch eine strenge mathematische Terminologie nachrangig scheint.

Die im Umfeld der Meraner Vorschläge genannten Ideen und Forderungen finden sich dabei in dem im Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan veröffentlichten Lehrbuch von BEHREND stärker berücksichtigt. Die Fusion von Stereometrie und Planimetrie kann, wenn auch nicht vollständig, so doch zumindest verstärkt konstatiert werden, Begriffsbildungen sind stärker reflexiv geprägt und bei Beweisführungen ist funktional dynamisches, induktives Vorgehen bedeutend verbreiteter. Allerdings muss erwähnt werden, dass die in Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan veröffentlichten psychologischen Erkenntnisse nur ansatzweise Niederschlag in den Lehrbüchern gefunden haben, da Visualisierungen von mathematischen Objekten häufig statisch und vor allem sehr einseitig sind und auch Beweise nicht ausreichend in das Begriffsnetz eingebettet werden.[39]

Die in der mengentheoretischen Fundierung genannten Aufgaben des Mathematikunterrichts werden in den basierend auf dem Lehrplan erarbeiteten

[39] Für betrachtetes Lehrbuch für die Volksschule von KUSSEROW gilt, dass eine Fusion von Stereometrie und Planimetrie nicht zu beobachten ist, allerdings das Buch stark durch funktional dynamisches, induktives Vorgehen geprägt ist. Auch wenn Visualisierungen von mathematischen Objekten häufig noch einseitig sind, so wird doch das Begriffsnetz verstärkt betont. Für die endgültige Gegenüberstellung ist dieses Schulbuch auf Grund seines Volksschulbezugs allerdings nicht relevant.

Schulbüchern teilweise umgesetzt. Dabei ist der vorgesehene propädeutische Unterricht in Klasse 5 nur ansatzweise im Lehrbuch realisiert, da auf Modelle nur kurz verwiesen wird und die Notation schon sehr fachwissenschaftlich geprägt ist. Die Forderungen mit direktem Bezug zu Begriffsbildungen und Beweisführungen sind allerdings, mit Ausnahme der Schemata zur methodischen Gestaltung der Begriffseinführung und Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise, größtenteils verwirklicht.

Fazit

Insgesamt lässt sich feststellen, dass insbesondere viele in den Meraner Vorschlägen geäußerten Forderungen politischen Anliegen geschuldet waren und wohl auch aus diesem Grund nur ansatzweise in direkt im Anschluss an die Meraner Vorschläge entstandenen Lehrbüchern umgesetzt waren. Daher kann im direkten Umfeld der Meraner Vorschläge nicht unmittelbar eine „Los von Euklid!“-Bewegung ausgemacht werden. In den betrachteten, im Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan entstandenen Lehrbüchern war die Fusion von Stereometrie und Planimetrie, wie auch eine funktional dynamische und induktive Arbeitsweise, die als wichtige Aspekte des „Los von Euklid!“-Gedankens gesehen werden können, allerdings verstärkt umgesetzt. Doch auch in diesem Bezug ist zu beachten, dass zur Analyse fortschrittliche Lehrbücher gewählt wurden. Einige Nachfolger der im Anschluss an die Meraner Vorschläge veröffentlichten Lehrbücher zeigten auch in den 1920ern noch ein anderes Bild.

In den Schulbüchern aus der mengentheoretischen Fundierung des Mathematikunterrichts in der Mathematikmethodik wird schließlich ein axiomatischer Aufbau der Geometrie verfolgt, wenn auch nicht alle in der mengentheoretischen Fundierung entworfenen Konzeptionen umgesetzt waren. Ausgehend von den, in Anschluss an die Meraner Vorschläge und den RICHERTschen Lehrplan entstandenen, unterschiedlich schattierten Lehrbüchern lässt sich jedoch kein direkter Gegensatz zwischen diesen Epochen und der Mathematikmethodik ausmachen. In Kontrast zu den hier betrachteten, im Anschluss an den RICHERTschen Lehrplan entstandenen Lehrbüchern kann das Vorgehen in den Schulbüchern der mengentheoretischen Fundierung allerdings als Anzeichen für eine Orientierung in Richtung EUKLIDs gesehen werden, andererseits liegt mit dem mengentheoretischen Aufbau eine grundlegende aber antieuklidische Prägung vor.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und –lehrens. In: H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.). Lernen und Lehren von Mathematik (S. 1-56). Köln: Aulis.

Becker, G. (1985). Einführung. In: W. Lietzmann. Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland (S. E5-E14). Paderborn: Schöningh.

Behrend, F. (1932). Form und Abbildung. Breslau: Ferdinand Hirt.

Behrendsen, D. & Götting, E. (1909). Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Leipzig: Teubner.

Bender, P. (1982). Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 14.1, S. 9-24.

Bender, P. (2003). Lehramtsausbildung in der BRD unter besonderer Berücksichtigung der Verhältnisse in Rheinland-Pfalz, Hessen und Nordrhein-Westfalen. In: P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S. 85-100).

Bender, P. & Henning, H. (Hrsg.) (2003). Didaktik der Mathematik in den alten Bundesländern – Methodik des Mathematikunterrichts in der DDR. Bericht über eine Doppeltagung zur gemeinsamen Aufarbeitung einer getrennten Geschichte. http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning/tagung.pdf.

Bittner, R. et al. (1982a). Mathematik. Lehrbuch für Klasse 7. Berlin: Volk und Wissen.

Bittner, R. et al. (1982b). Mathematik. Lehrbuch für Klasse 8. Berlin: Volk und Wissen.

Bock, H. & Walsch, W. (Hrsg.) (1975). Zum logischen Denken im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Borneleit, P. (2003). Lehrplanerarbeitung und Schulentwicklung in der DDR. In: P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S. 26-49).

Dawydow, W. W. (1977). Arten der Verallgemeinerung im Unterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Elstermann, R. (1992). Konzept zur instrumentalen Nutzung spezieller Kongruenzzuordnungen in der Sekundarstufe I. Berlin: Humboldt Universität, Fachbereich Mathematik, Lehr- u. Forschungsgebiet Didaktik der Mathematik, Dissertation A.

Führer, L. (1985). „Funktionales Denken“: Bewegtes fassen – das Gefaßte bewegen. In: Mathematik lehren 11, S. 12-13.

Führer, L. (2012). Verstehen oder berechnen? Wie passt der Computer zum Analysisunterrichts des 20. Jahrhunderts? In: U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.). Medien Vernetzen. Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge). Bericht über die 26. und 27. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 26.–28.9.2008 in Fuldatal und 25.–27.9.2009 in Soest (S. 103-136). Hildesheim: Franzbecker.

Fuhrmann, E. (1972). Zum Definieren im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Götting, E. & Harnack, A. (1930). Behrendsen-Götting-Harnack. Lehrbuch der Mathematik mit Aufgaben für höhere Lehranstalten aller Art. Unterstufe/Teil I. Geometrie für die Klassen Quarta bis Untersekunda. Ausgabe B: mit Trigonometrie. Leipzig: Teubner.

Griesel, H. (2003). Vergleich grundlegender Konzeptionen der Mathematikdidaktik in der BRD und in der DDR. In: P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S.175-186).

Gutzmer, A. (1906). Allgemeiner Bericht der Unterrichtskommission. In: A. Wangerin (Hrsg.). Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte (S. 142-200). Leipzig: Vogel.

Henrici, J. & Treutlein, P. (1891). Lehrbuch der Elementargeometrie Teil 1. Gleichheit der Gebilde in einer Ebene, Abbildung ohne Maßänderung. Leipzig: Teubner.

Höfler, A. (1910). Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen. In zehn Bänden. Erster Band: Mathematik. Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig: Teubner.

Inetveen, H. (1976). Die Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts zwischen 1890 und 1914. Eine sozioökonomische Analyse. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Junge, H. & Neigenfind, F. (1960). Mathematikunterricht. Methodisches Handbuch für den Lehrer. Berlin: Volk und Wissen.

Kaiser, L. (1881). Über einige Hauptpunkte des geometrischen Unterrichts. In: O. Petry. Elfter Jahresbericht über die Städtische Gewerbeschule (Realschule II. Ordnung) zu Remscheid womit zu den am Montag den 4. und Dienstag den 5. April 1881 stattfindenden öffentlichen Prüfungen und Schlussfeierlichkeiten ergebenst einladet der Director Dr. Otto Petry (S. 21-25). Remscheid: Hermann Krumm.

Killing, W. & Hovestadt, H. (1910). Handbuch des mathematischen Unterrichts. Erster Band. Leipzig: Teubner.

Killing, W. & Hovestadt, H. (1913). Handbuch des mathematischen Unterrichts. Zweiter Band. Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1904). Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900. In: F. Klein & E. Rieke (Hrsg.). Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge gehalten bei der Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Göttingen, Ostern 1904 (S. 33-47). Leipzig: Teubner.

Klein, F. (1908). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08. Leipzig: Teubner.

Kreusch, J. et al. (1982). Mathematik. Lehrbuch Klasse 5. Berlin: Volk und Wissen.

Krüger, K. (2000). Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos.

Kusserow, W. (1985, im Original 1928). Los von Euklid! Paderborn: Schöningh.

Lambert, A. (2010). Experimentelle Geometrie – Aus Erfahrung lernen. In: K. Krüger & P. Ullmann. Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer (S. 139-165). Eichstätt: Polygon.

Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.). Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 28. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. Bis 11. September 2011 in Marktbreit. (S. 5-32). Hildesheim: Franzbecker.

Lehrplan 1901: Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen. 1901. Berlin: Wilhelm Hertz.

Lehrplan 1922: Neue Lehrpläne für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht an den höheren Lehranstalten. Nach den Meraner Lehrplänen vom Jahr 1905 neubearbeitet vom Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (1922). In: MU 80.6: S. 63-80.

Lehrplan 1969: Lehrplan Mathematik. Kl. 5 bis 10 (1980). Berlin: Volk und Wissen.

Lietzmann, W. (1916). Methodik des mathematischen Unterrichts. 2. Teil: Didaktik der einzelnen Gebiete des mathematischen Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W. (1919). Methodik des mathematischen Unterrichts. 1. Teil: Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts. Leipzig: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W. (1925). Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in Preußen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 56. Leipzig: Teubner, S. 193-207.

Lietzmann, W. (1928). Geleitwort. In: G. Rose. Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht (Eine psychologische Analyse). Leipzig: Teubner.

Lietzmann, W. (1930). 25 Jahre Meraner Vorschläge. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 61, Leipzig: Teubner, S. 289-300.

Lietzmann, W. (1955). 50 Jahre Meraner Vorschläge: In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 8, S. 5-8.

Lietzmann, W. (1985, im Original 1912). Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Paderborn: Schöningh.

Lompscher, J. (1989). Die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten. In: J. Lompscher et al. (Hrsg.). Psychologische Analysen der Lerntätigkeit (S. 51-90). Berlin: Volk und Wissen.

Maennchen, P. (1928) Handbuch des Unterrichts an höheren Schulen. Band 13. Mathematik. Frankfurt: Diesterweg.

Lorenz, G. (1974). Der am Abbildungsbegriff orientierte Aufbau des Geometrielehrgangs in unserer Schule (Teil 1). In: Mathematik in der Schule 12, S. 13-18.

Reidt, F. (1906). Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Berlin: Grote`sche Verlagsbuchhandlung.

Richter, D. et al. (1985) Mathematik. Klasse 10. Berlin: Volk und Wissen.

Ritter, K. et al. (1976). Unterrichtshilfen Mathematik 5. Berlin: Volk und Wissen.

Ritter K. et al. (1975). Unterrichtshilfen Mathematik 6. Berlin: Volk und Wissen.

Rosch, E. (1983). Prototype Classification and Logical Classification: The Two Systems. In: E. Scholnick (Hrsg.). New trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget’s Theory (S. 73-110). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Rose, G. (1928). Die Schulung des Geistes durch den Mathematik- und Rechenunterricht (Eine psychologische Analyse). Leipzig: Teubner.

Rose, G. (1932). Handbuch der Volksschulpädagogik. Rechnen und Raumlehre. Frankfurt: Diesterweg.

Schotten, H. (1890). Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts I. Eine vergleichende Planimetrie. Leipzig: Teubner.

Schotten, H. (1910). Die „Meraner Vorschläge“ und die neuere mathematische Schulliteratur (S. 5-24). Halle: Städtische Oberrealschule zu Halle a. S..

Schreiber, A. (1985). Einführung. In: W. Kusserow. Los von Euklid! (S. E5-E9). Paderborn: Schöningh.

Schülke, A. (1906). Über die Reform des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 37. Leipzig: Teubner, S. 161-168.

Schulz, W. (2003). Entwicklungsphasen in der DDR-Zeit. In: P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S. 238-247).

Schwering, K. (1907). Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer. Leipzig: Teubner.

Simon, M. (1985, im Original 1908). Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. Paderborn: Schöningh.

Steinhöfel, W., Reichold, K. & Frenzel, L. (1977). Zur Behandlung von Begriffen im Mathematikunterricht. In: Mathematik in der Schule 15, S. 647-654.

Steinhöfel, W., Reichold, K. & Frenzel, L. (1988). Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht. Berlin: Ministerium für Volksbildung.

Tietz, W. et al. (1982). Mathematik. Lehrbuch Klasse 6. Berlin: Volk und Wissen.

Treutlein, P. (1985, im Original 1911). Der geometrische Anschauungsunterricht. Paderborn: Schöningh.

Verhandlungen 1902: Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, Berlin 6. bis 8. Juni 1900. Halle: Waisenhaus.

Walsch, W. (1972). Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Walsch, W. & Weber, K. (1977). Methodik Mathematikunterricht. Berlin: Volk und Wissen.

Walsch, W. (2003). Methodik des Mathematikunterrichts als Lehr- und Wissenschaftsdisziplin. In: P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S. 141-148).

Weber, K. (2003). Mathematikunterricht und mathematikmethodische Forschung in der DDR – wesentliche schul- und wissenschaftspolitische Rahmenbedingungen. P. Bender & H. Henning (Hrsg.) (S. 1-12).

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: Mathematik lehren 11, S. 7-11.

Zeimetz, A. (2011) „Los von Euklid?“ In: T. Krohn, E. Malitte, G. Richter, K. Richter, S. Schöneburg & R. Sommer (Hrsg.). Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik – Mathematikdidaktische Ansätze – Festschrift für Wilfried Herget (S. 411-420). Hildesheim: Franzbecker.

Begriffsbildung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zum Thema Winkel

Christian Dohrmann, Ana Kuzle

Zusammenfassung. Der Winkelbegriff als elementarer Begriff der ebenen Geometrie und Raumgeometrie ist aufgrund vielfältiger Aspekte und Definitionen ein komplexer Lehr- und Lerngegenstand. Sätze über Gleichheit, Summen und Differenzen von Winkeln, sowie der Winkel als Objekt-, Relations- und Maßbegriff sind für die gesamte (Schul-)Geometrie relevant. Der Winkelbegriff muss folglich im Mathematikunterricht systematisch und ganzheitlich ausgebildet werden (KRAINER, 1989). Ergebnisse fachdidaktischer Forschung zum Thema innerhalb der letzten 30 Jahre stellen aufgrund nachweisbarer Fehlkonzepte und Fehlermuster die Bedeutung einer operativen Begriffsentwicklung heraus, bei der sowohl geeignete (digitale) Werkzeuge, als auch anschauliche Materialen und Darstellungsformen zum Einsatz kommen (u.a. KRAINER, 1989; MITCHELMORE & WHITE, 2000; BERRY III & WIGGINS, 2001). Weiterhin wird festgesellt, dass bestimmte Fehlkonzepte mit der systematischen Begriffseinführung nach dem Grundschulübergang dauerhaft und resistent über die Schullaufbahn „erworben“ werden. Als Einflussfaktoren gelten hierbei mentale Operationen und Vorstellungen zu Winkelaspekten, die eng mit den vorhandenen Fehlkonzepten verknüpft sind. Konrad KRAINER (1989) stellt bereits den relevanten Bezug von Vorstellungen zu Begriffsaspekten bei Winkeln heraus: Winkel als „abgeknickte“ Gerade; Winkel als Ebenenteil; Winkel als Umlaufwinkel.

In diesem Beitrag werden Schulbücher hinsichtlich verwendeter Repräsentationen und Darstellungsformen zu Winkeln in der Sek I analysiert. Bezüge zur didaktischen Genese zum Winkelbegriff werden eingangs basierend auf der Arbeit von KRAINER (1989) hergestellt. Darüber hinaus werden erste Ergebnisse einer Untersuchung zu Winkelvorstellungen von Fünft- und Zehntklässlern vorgestellt und mit ausgewählten Forschungsbefunden kontrastiert. Die vorliegende Arbeit versteht sich als Annäherung an die didaktische Auseinandersetzung zur Begriffsausbildung zum Winkel.

Winkel – ein vielfältiger Begriff

Das Bedürfnis eindeutiger Begriffsdefinitionen ist seit der philosophischen Auseinandersetzung mit der Mathematik als Strukturgebilde der Welt erwachsen und bis heute ein zentraler Bestandteil der Schulmathematik. Die Notwendigkeit von Begriffsdefinitionen für die Entwicklung der theoretischen Fundierung der Geometrie skizziert KRAINER (1989, S.126ff) an zwei Zugängen, zum einen abbildungsgeometrisch in der Tradition der Vertreter FELIX KLEIN und GUSTAVE CHOQUET, zum anderen kongruenzgeometrisch nach EUKLID und DAVID HILBERT. Beide Zugänge werden im Folgenden mit Bezug auf KRAINER zusammengefasst.

KLEIN entwickelt ein Axiomensystem, welches gänzlich ohne die Verwendung des Winkelbegriffes auskommt. Er führt den Winkel als Maß einer Drehbewegung ein, ohne ihn definitorisch festzulegen. CHOQUET begründet die affine Struktur der Ebene ebenfalls ohne auf den Winkelbegriff zurückzugreifen. Winkel werden in seinen theoretischen Betrachtungen als Drehungen interpretiert. Sie gewährleisten die wesentliche Eigenschaft, Teilmengen der Ebene mit Hilfe bestimmter Operationen an anderer Stelle wieder zu fixieren. Dem Winkel und der Drehung liegt hier die gemeinsame Idee der formalen Beziehung zwischen zwei Richtungen zugrunde. Beim kongruenzgeometrischen Zugang nach EUKLID und HILBERT treten Winkel als formale Notwendigkeit auf, Beziehungen (Kongruenz) zwischen geometrischen Objekten innerhalb eines Axiomensystems zu beschreiben.

In beiden Zugängen zur Geometrie werden unterschiedliche Winkelaspekte betont: Winkel als Drehung (nach CHOQUET), Winkel als Maß einer Drehbewegung (nach KLEIN), Winkel als Neigung (nach EUKLID) oder Winkel als Theorieelement zur Beschreibung von Beziehungen (nach HILBERT).

KRAINER arbeitet verschiedene Vorstellungen von Winkeln heraus und greift damit unterschiedliche Aspekte und Definitionen des Winkelbegriffs auf.

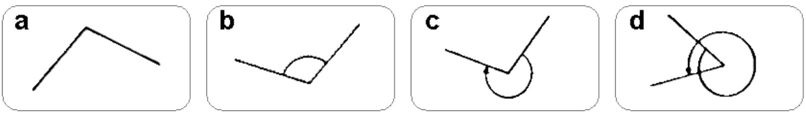


Abb. 1: Winkelvorstellungen (KRAINER, 1989, S.387)

a) Winkel als „abgeknickte“ Gerade (ohne Kreisbogen)
b) Winkel als Ebenenteil, der von zwei geraden Linien mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird (mit Kreisbogen oder Winkelfeld)
c) Winkel als Ebenenteil, dessen Entstehung durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann (mit Kreisbogenpfeil oder orientiertem Winkelfeld)
d) Winkel als Umlaufwinkel (mit Umdrehungspfeil)

Neben den vielfältigen Aspekten und Vorstellungen zu Winkeln treten darüber hinaus unterschiedliche Begriffsarten hervor:

- *Objektbegriff*: Der Winkel als Objektbegriff steht für diejenigen ebenen und räumlichen Objekte, die durch konkrete Darstellungen und

Modelle repräsentiert werden. Betont wird hierbei der figurative (statische) Winkelaspekt.

- *Relationsbegriff*: Beim Vergleich und dem in Beziehung setzen von Winkeln mit geometrischen Objekten.
- *Maßbegriff*: Bei Betrachtungen von Winkelgrößen tritt der Winkel als Maßbegriff hervor.

Es zeichnet sich an dieser Stelle bereits ein Bild eines multidimensionalen Begriffsfeldes ab, das je nach Bedürfnis und geometrischem Kontext vielfältige Zugänge und Definitionen zu Winkeln liefert. Unser Interesse richtet sich im Folgenden auf Darstellungen und Repräsentationen in Schulbüchern der Klassenstufe 6. Es soll herausgearbeitet werden, inwieweit die oben dargestellten Aspekte und Definitionen aufgegriffen werden, um ein genaueres Bild der Begriffsausbildung zu erhalten, die in Schulbüchern vorgenommen wird.

Darstellungen und Repräsentationen zum Winkelbegriff in Schulbüchern zu Beginn der systematischen Begriffsausbildung

Das Thema Winkel ist kein zentrales Thema der Geometrie der Grundschule. In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (KMK, 2004) findet keine direkte Erwähnung statt. In Lehrplänen werden Kompetenzerwartungen nach Klasse 4 im Bereich „Raum und Form“ zum Schwerpunkt „Ebene Figuren“ formuliert: Schüler/innen können den rechten Winkel benennen und zur Beschreibung ebener Figuren verwenden. In Schulbüchern wird ausschließlich der rechte Winkel thematisiert – meist eingeführt über den Faltwinkel. Rechte Winkel sollen mit Hilfe des Faltwinkels in der Umwelt erkannt und mit dem Geodreieck gezeichnet werden. Die systematische Einführung erfolgt je nach Bundesland in Klasse 5/6. Die Schüler/Innen verwenden den Winkel zur Beschreibung ebener und räumlicher Figuren, sowie zum Schätzen und Zeichnen. Sie lernen verschiedene Winkelsätze kennen und nutzen Winkel beim direkten und indirekten Messen.

In den von uns untersuchten Schulbüchern (siehe Tabelle 1) finden sich überwiegend Definitionen und Darstellungen, die den Winkel als sich schneidendes Geraden- bzw. Halbgeradenpaar mit gemeinsamen Anfangspunkt aufgreifen (Abbildung 2).

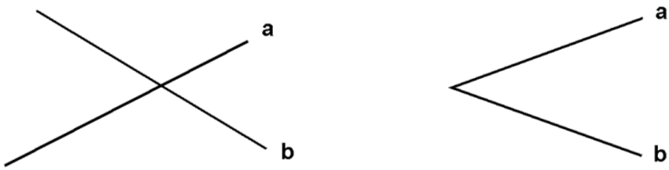


Abb. 2: Winkel als sich schneidendes Geradenpaar (links) bzw. Halbgeradenpaar (rechts).

Auffällig seltener sind Darstellungen und Definitionen mit Betonung des Winkelfeldes auszumachen (Elemente der Mathematik SI, 2012, S.56ff und Schnittpunkt Mathematik 6 NRW, S.8ff).

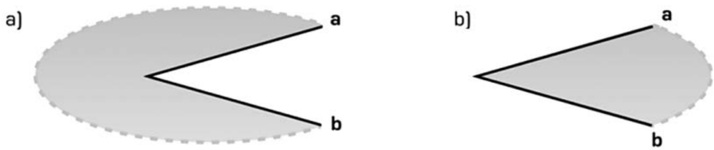


Abb. 3: Winkel als Punktmenge

a) „*geordnet*“: Der Winkel ist die Punktmenge, die überstrichen wird, wenn der Erstschenkel *a* gegen den Uhrzeigersinn in den Zweitschenkel *b* gedreht wird.

b) „*ungeordnet*“: Der Winkel ist die Punktmenge, die überstrichen wird, wenn Gerade *a* auf kürzestem Weg in Gerade *b* gedreht wird.

In den analysierten Schulbüchern wird entweder der statische Winkelaspekt parallel zum dynamischen Aspekt aufgegriffen, oder ausschließlich auf den statischen Aspekt in Darstellungen und Operationen Bezug genommen.

Bei der Einführung zum Messen und Zeichnen von Winkeln zeichnet sich ein ähnliches Bild ab. Das statische Messverfahren mit Hilfe des Geodreiecks („Anlegen und Abmessen“-Methode) wird in jedem von uns analysierten Schulbuch aufgegriffen, während die dynamische Methode („Drehwinkel“-Methode) zum Messen und Zeichnen von Winkeln nur in vereinezelten Büchern aufgeführt wird (siehe Tabelle 1).

Schulbuch	Darstellung	Werkzeug	Operation
Einblicke Mathematik 6 NRW, 2007, S.15ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck - Theodolit	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch)
Pluspunkt Mathematik 6 NRW, 2006, S.56ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch) - Schätzen
Mathe live 6, 2009, S.32ff	- Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch)
Maßstab 6, 2005, S.59ff	- Strahlenpaar	- Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Mathematik Sekundo 6, 2010, S.56ff	- Strahlenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Mathematik Neue Wege SI Klasse 6, 2009, S.8ff	- Strahlenpaar - Halbgeradenpaar - Teil der Ebene - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Mathematik Heute 6, 2013, S.88ff	- Strahlenpaar - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck - DGS	- Messen (statisch & dynamisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Elemente der Mathematik SI, 2012, S.56ff	- Strahlenpaar - Drehung	- Winkelscheibe - Geodreieck - DGS	- Messen (statisch & dynamisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch) - Schätzen
Schnittpunkt Mathematik 6 NRW, 2006, S.8ff	- Winkelfeld	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)
Lambacher Schweizer 6 NRW, 2009, S.84ff	- Strahlenpaar - Halbgeradenpaar	- Winkelscheibe - Geodreieck	- Messen (statisch) - Zeichnen (statisch & dynamisch)

Tabelle 1: Darstellungen und Operationen zu Winkeln in Schulbüchern der Klassenstufe 6

Grundsätzlich gibt es zwei unterschiedliche Methoden, Winkel mit dem Geodreieck zu zeichnen und zu messen.

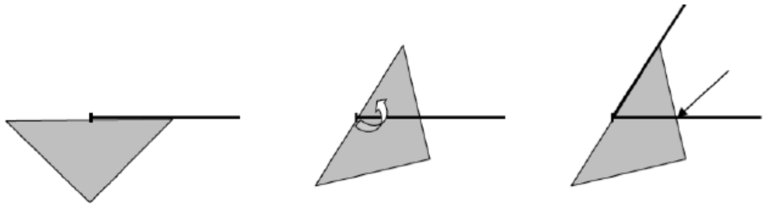


Abb. 4: „Drehwinkelmethode“ (dynamisch)

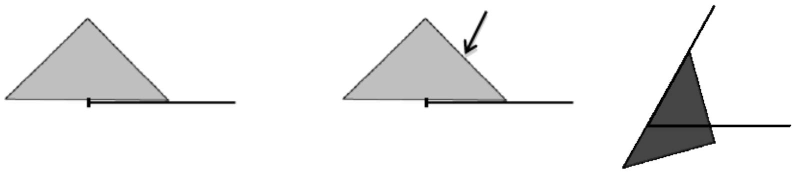


Abb. 5: „Anlegen und Abmessen“-Methode (statisch)

Die „Drehwinkelmethode“ bringt bei jedem Vorgang die beiden Winkelaspekte Drehung und Winkelfeld (begrenzt durch die beiden Schenkel) zum Tragen, während die „Anlegen und Abmessen“-Methode überwiegend den statischen Aspekt (Winkel als Figur) betont.

- *Zur „Drehwinkelmethode“*: Diese erinnert an den Drehvorgang, der dem Entstehen von Winkeln zugrunde liegen kann. Weiterhin wird bei dieser Methode Fehlern durch Verwechseln der beiden gegenläufigen Skalen auf dem Geodreieck entgegengewirkt. Nach ausgiebiger Einführungsphase kann die Drehung des Messgerätes wegfallen, so dass nur noch ein Arbeitsschritt benötigt wird. Nachteilig erweist sich die Methode bei der Verwendung von Halb- und Vollkreiswinkelmessern. Hierbei wird stets ein zusätzlicher Arbeitsschritt zur Markierung des Winkels und zum Zeichnen des Schenkels mit Hilfe eines Lineals benötigt. Schwierigkeiten zeigen sich ebenfalls bei der Durchführung mit dem Geodreieck. Das Festhalten bzw. Fixieren des Scheitelpunktes bei der Drehung ist mit dem herkömmlichen Geodreieck ohne Möglichkeit zum Fixieren des Drehzentrums schwierig zu bewerkstelligen und kann zu Mess- und Zeichenfehlern führen.
- *Zur „Anlegen und Abmessen“-Methode*: Beim Zeichnen muss der vorgegebene Schenkel nicht verlängert werden. Beim Anlegen des Geodreiecks zum Zeichnen des zweiten Schenkels muss nicht da-

rauf geachtet werden, dass die „0“ am Scheitel liegt. Nachteilig erweist sich, dass beim Zeichnen von Winkeln auf jeden Fall zwei Arbeitsschritte benötigt werden. Zudem besteht Verwechslungsgefahr der beiden gegenläufigen Skalen auf dem Geodreieck.

Wir halten fest, dass in den von uns analysierten Schulbüchern unterschiedliche Schwerpunktsetzungen hinsichtlich der systematischen Begriffseinführung mit Bezug zu statischen bzw. dynamischen Aspekten von Winkeln vorgenommen werden, wobei die Betonung der statischen Sichtweise beim Zeichnen und Messen überwiegt. Für die didaktische Diskussion in diesem Zusammenhang liefert die Schulbuchanalyse folgende Motivation für die Fortführung der vorliegenden Arbeit: Es ist zunächst zu klären, welche Winkelbegriffe für den Mathematikunterricht überhaupt benötigt werden und welche Bedeutungen die beiden dargestellten Aspekte für den Begriffsbildungsprozess in dieser Hinsicht besitzen.

Untersuchung zu Schülervorstellungen von Winkeln – erste Ergebnisse

Jeweils drei Schüler/Innen einer 5. und 10. Klassenstufe wurden von uns zu ihrem Winkelverständnis befragt. Die vorgelegten Aufgaben umfassten operative Tätigkeiten (Vergleichen, Zeichnen, Messen, Schätzen), sowie Verständnisfragen zu Winkelarten und -größen. Bei den Schüler/innen der 5. Klasse fand noch keine systematische Ausbildung des Winkelbegriffs im Unterricht statt. Vorerfahrungen und Vorwissen basieren auf den Grundschulinhalten zum rechten Winkel.

Ziel der Untersuchung war zum einen herauszustellen, inwieweit die Schüler/innen unterschiedliche Winkelaspekte und Vorstellungen in ihr Begriffsverständnis integrieren. Zum anderen interessierte uns, ob spezifische Fehlermuster erkennbar sind und ob sich Zusammenhänge zu den identifizierten Vorstellungen herstellen lassen.

1. Zeige mir einen Winkel (in der Luft) und nimm dafür deine Finger/Hände/Arme zur Hilfe!

Bei dieser Aufgabe konnte beobachtet werden, dass alle Schüler/Innen nach eigener Aussage einen rechten Winkel mit Hilfe ihrer Arme andeuten.

2. Erkläre mir: Was ist ein Winkel**?** Was verstehst du darunter?

Abb. 6: Schüler/Innen der 5. Klasse

Abb. 7: Schüler/Innen der 10. Klasse

Als häufigste Erklärung wurde hier sowohl bei Schüler/innen der 5. als auch der 10. Jahrgangsstufe das „*Aufeinanderstoßen zweier Kanten*“ genannt. Besonders der figurative Aspekt des Winkels tritt bei den Antworten hervor. Die Schüler/innen identifizieren das Vorhandensein von Schenkeln und Scheitelpunkt als Winkel. Noch deutlicher wird dies an der folgenden Aufgabe, bei der Bilder mit unterschiedlichen Winkelsituationen vorgelegt wurden und die Schüler/innen darin Winkel identifizieren und beschreiben sollten.

3. Zeige mir, auf welchen Bildern du Winkel erkennst und beschreibe, was du siehst. In welchen Situationen kann der Winkel verändert werden? Was passiert dabei?

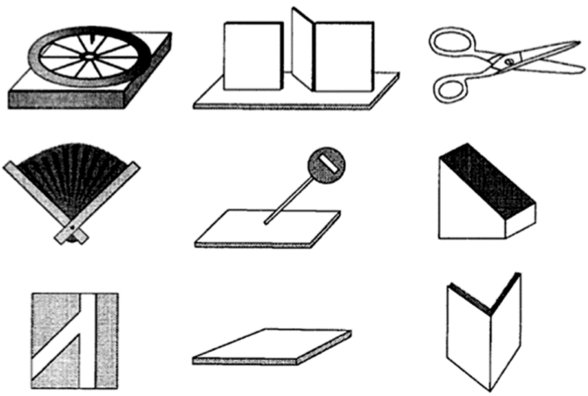


Abb. 8: Winkelsituationen (MITCHELMORE & WHITE, 2000)

Alle Schüler/innen haben zunächst bevorzugt rechte Winkel identifiziert. Auffällig waren Einschätzungen zur Scheren-Situation. Nur eine Schülerin der 5. Jahrgangsstufe war in der Lage, die Klingen der Schere als Winkel zu interpretieren. Jedoch zeigte sie sich unsicher, da die Klingen nach ihrer Aussage keinen rechten Winkel bilden. Dieselbe Schülerin identifizierte in der Fächer-Situation vier rechte Winkel um den Fächerscheitel. Schwierigkeiten hatte sie bei der Beantwortung der Frage, wie sich die von ihr identifizierten Winkel verändern, wenn der Fächer weiter geschlossen bzw. geöffnet wird. Es überwiegt die rein statische Beurteilung der Situation. MITCHELMORE & WHITE (2000, S.210) beobachteten in ihrer Studie, dass weniger als 10% der untersuchten Schüler (4. Jahrgangsstufe) die Rotation bzw. Drehung als Beispiel für Winkelsituationen identifizieren können.

Unsere Untersuchung zu Winkelvorstellungen bei Fünft- und Zehntklässlern bestätigen außerdem die Beobachtungen von KRAINER (1989) hinsichtlich der folgenden Fehlvorstellungen und Winkelinterpretationen:

- Vergleiche von Winkeln erfolgen über Vergleiche der Schenkellängen.
- Winkel werden vorrangig als „rechte Winkel" interpretiert.
- Rotation bzw. Drehung wird nicht als Winkelaspekt wahrgenommen bzw. interpretiert.
- Winkel werden vorrangig als Figur, bestehend aus zwei aneinanderstoßenden Kanten bzw. Strecken gedeutet.

Da diese Muster ebenfalls bei den untersuchten Schüler/inne/n der 10. Jahrgangsstufe gefunden wurden, liegt die Vermutung nahe, dass Fehlkonzepte, wie der Vergleich von Winkeln anhand von Schenkellängen auch über einen größeren Zeitraum (Klasse 5 bis 10) relativ stabil sind. MITCHELMORE & WHITE (2000, S.210) bestätigen diesen Effekt in einer Untersuchung zum Winkelverständnis von Erwachsenen.

Ausblick

KRAINER (1989, S.222-284) untersuchte Ende der 1980-er Jahre typische Schülerfehler beim Operieren und Argumentieren mit Winkeln und entwickelte ein Unterrichtskonzept, um diesen Fehlern zu begegnen. Um die Aspektvielfalt des Winkelbegriffs aufzuzeigen und für Schüler/innen fassbar zu machen, müssen nach KRAINER vielfältige anschauliche Zugänge angeboten werden. Einblicke in Schulbücher haben gezeigt, dass die systematische Begriffseinführung mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen bzgl. statischer und dynamischer Winkelaspekte einhergeht. Darüber hinaus deuten erste Ergebnisse aktueller Forschung zu Schülervorstellungen von Winkeln darauf hin, dass bestimmte Fehlermuster und Vorstellungen relativ stabil sind. Für die weitere didaktische Arbeit ist daher zunächst herauszuarbeiten, welche Bedeutung die beiden dargestellten Winkelaspekte für die Ausbildung des Winkelverständnisses besitzen und welche Winkelbegriffe und Vorstellungen für den Mathematikunterricht notwendig sind, um den beobachteten Fehlermustern zu begegnen.

Literatur

Berry III, R. Q.; Wiggins, J. (2001). Measurement in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *7*(3), 154-156.

Krainer, K. (1989). Lebendige Geometrie: Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffes. Frankfurt a.M: Peter Lang.

Kultusministerkonferenz (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Jahrgangstufe 4 (Primarstufe). Bonn: KMK.

Mitchelmore, M. C.; White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 209-238.

Schulbücher

Einblicke Mathematik 6 NRW. (2007). Schüler-Arbeitsheft. Klett.

Elemente der Mathematik SI NRW. (2012). Schülerband 6. Schroedel.

Lambacher Schweizer. (2009). Ausgabe Nordrhein-Westfalen, Schülerbuch 6. Schuljahr. Klett.

Mathematik 6 (2005). Ausgabe für Realschulen in Nordrhein-Westfalen, Bremen, Hamburg und Schleswig-Holstein. Schroedel.

Mathematik Heute. (2013). Ausgabe Klasse 6. Schroedel.

Mathe live (2009). Schülerbuch 6. Schuljahr. Klett.

Mathematik Neue Wege SI. (2009). Ausgabe Klasse 6. Schroedel.

Mathematik Sekundo 6 (2010). Ausgabe für differenzierende Schulformen. Schroedel.

Pluspunkt Mathematik 6 NRW. (2006). Hauptschule Klasse 6. Cornelsen

Schnittpunkt Mathematik NRW. (2006). Klett.

Begriffsentwicklung bezüglich Koordinaten von der Grundschule bis zur Sekundarstufe I mit Ausblicken auf die darauf folgenden Erweiterungen

Günter Graumann

Zusammenfassung. Ab dem 1. Schuljahr treten immer wieder Figuren im Gitter auf. Die Beschriftung der Gitterpunkte durchläuft dabei verschiedene Entwicklungen. In der Grundschule werden meist nur Zahlen oder Kombinationen aus einer Zahl und einem Buchstaben verwendet, im 5. Schuljahr werden dann Rechts- und Hochachse eingeführt mit geordneten Zahlenpaaren aus zwei natürlichen Zahlen. Hier wird die Grundlage für alles Weitere in Bezug auf Koordinaten gelegt. Es folgen weitere Verallgemeinerungen und Erweiterungen, auf die stichpunktartig eingegangen wird.

Einleitung

Als Vorbereitung auf den Umgang mit Koordinaten gibt es schon im ersten Schuljahr Aufgaben, bei denen die Kinder sich in einem Stadtteil mit rechtwinkligen Straßen orientieren müssen und Wege ablaufen oder finden sollen.

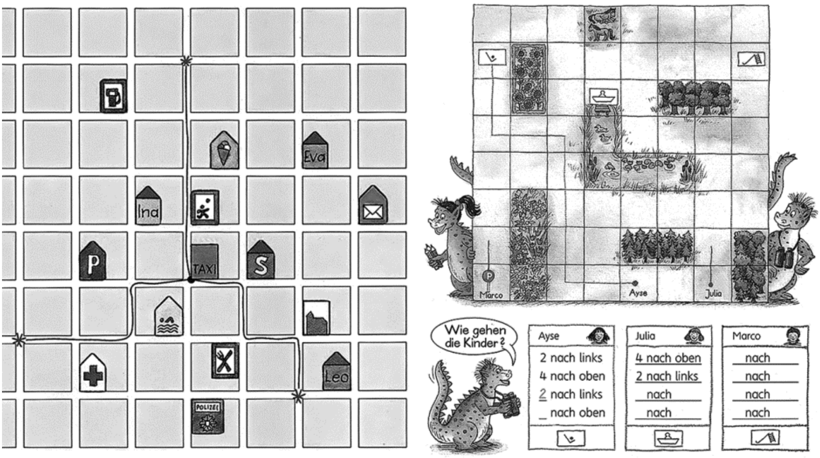


Abb. 1: Wege im Quadratgitter (Aus: Das Zahlenbuch S. 91, Welt der Zahl 1. Schuljahr S. 69)

Ab dem zweiten Schuljahr gibt es dann verschiedene Aufgaben bezüglich „*Figuren im Gitter*" anhand eines Geobrettes oder eines gezeichneten Bildes von Gitterpunkten wie im Geobrett (vgl. etwa Lorenz/Rosin 1994 oder Mengel 2008 oder Haug/Holzapfel 2013). So werden etwa verschieden lange Strecken oder verschieden geformte Dreiecke und Vierecke, Vielecke mit möglichst großem Umfang bzw. Flächeninhalt, die Anzahl von Verbindungsgeraden etc. im Gitter gesucht. Im sechsten Schuljahr werden dann auch Spiegelungen, Drehungen und Verschiebungen von Figuren im Gitter untersucht und Winkel von Dreiecken im Gitter bestimmt. Im neunten Schuljahr kann man den Flächeninhalt eines Kreises durch Anzahlen von Gitterpunkten beschreiben (vgl. etwa den Satz von Pick: Der Flächeninhalt einer Figur gemessen in Einheitsquadraten ist gleich der Anzahl der inneren Gitterpunkte plus die Hälfte der Randpunkte minus 1) oder Untersuchungen zu pythagoreischen Dreiecken im Gitter (vgl. Walser 2000) anstellen.

Das ist nur ein Hinweis auf das breite Feld der Figuren im Gitter. Hier soll aber nicht weiter darauf eingegangen werden, vielmehr sollte damit nur der Rahmen, in den das Thema der Begriffsentwicklung von Koordinaten in der Grundschule und den Sekundarstufen eingebettet ist, aufgezeigt werden.

Beschriftung von Gitterpunkten in der Grundschule

Bei der Beschäftigung mit verschiedenen Aufgaben zu Figuren im Gitter stößt man schon im zweiten oder dritten Schuljahr zwecks besserer Kommunikation auf die Frage der ***Bezeichnung der Gitterpunkte***. Lässt man die Kinder selbst Bezeichnungen wählen, so sind häufige Lösungen eine geordnete oder ungeordnete Notation durch natürliche Zahlen bzw. Buchstaben wie z.B. in der folgenden Abbildung.

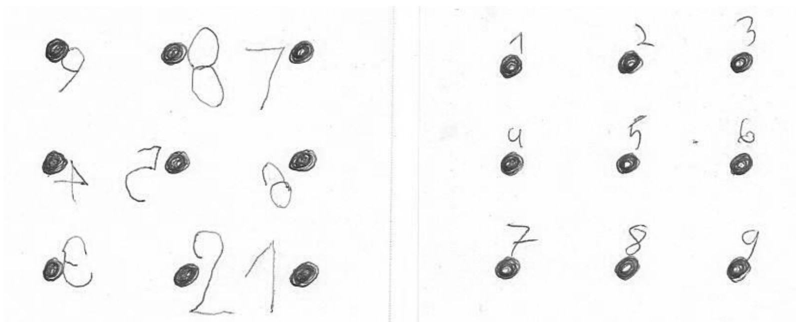


Abb. 2: Bezeichnungen von Gitterpunkten (Lars 6 Jahre bzw. Johannes 8 Jahre)

Diese Beschreibungen sind noch keine Koordinatenbeschreibung im Sinne der analytischen Geometrie. Sie können aber als *Beginn einer Begriffsentwicklung in Bezug auf Koordinaten*, d.h. Vorformen dazu, betrachtet werden, nämlich als umkehrbar eindeutige Bezeichnung von „Punkten“ durch einen arithmetischen bzw. algebraischen Ausdruck.

Derartige Bezeichnungen sollten als Ausgangspunkt einer Begriffsentwicklung nicht übergangen werden. Es ist wichtig, dass Kinder erst einmal ihre eigenen Vorstellungen zur Beschriftung von Gitterpunkten darstellen können, um daran anknüpfend differenziertere Vorstellungen zu entwickeln. Einige Kinder werden vielleicht auch auf die zweidimensionale Verteilung der Punkte eingehen und wie beim Schachbrett oder bei Spielen wie etwa „Schiffe versenken“ eine Bezeichnung durch Kombination von Buchstaben und Zahlen wählen (wie z.B. A1, A2, A3, B1, … C3 oder 1A, 1B, 1C, 2A, … 3C). Eine solche Bezeichnungsweise ist eine erste Weiterentwicklung der im Bild oben genannten hin zu den üblichen Koordinatenbeschreibungen.

In Unterrichtsvorschlägen für die Grundschule findet man meist nur eine solche Bezeichnungsweise und es wird teilweise auch gesagt, dass diese für die Grundschule (insbesondere für schwächere Kinder) ausreichend sei. Wichtig ist aber, dass diese Bezeichnungsweisen nicht einfach von der Lehrkraft eingeführt werden, sie müssen vielmehr (eventuell angeregt durch geeignete Fragestellungen) von den Schülerinnen und Schülern entdeckt werden. Auch sollte man dabei den Vorteil dieser Bezeichnungsweise gegenüber einer ungeordneten Beschriftung hervorheben.

Manchmal werden in der Grundschule auch schon Bezeichnungen mit Zahlenpaaren verwendet. Das sollte aber nur gestattet werden, wenn es von (einzelnen) Kindern selbst kommt; eine Einführung durch die Lehrkraft sollte vermieden werden. Wird von einem Kind die Bezeichnung mit Zahlenpaaren erwähnt, so sollte das natürlich nicht verboten werden, auf die Probleme mit der Reihenfolge der beiden Zahlen muss man aber hinweisen.

Bestimmte Punkte auf der Straße werden z.B. auf Tafeln für Gas- bzw. Wasseranschlüsse durch zwei Längenangaben beschrieben.

Abb. 3: Hinweistafeln an Hauswänden für Gas- und Wasseranschlüsse

Die Behandlung solcher Tafeln kann in der Grundschule die Vorstellung von Koordinaten und deren Funktion vertiefen und zum Übergang von Zahlenpaaren zur Beschreibung eines Punktes in der Ebene dienen.

Koordinaten im 5./6. Schuljahr

Im 5. Schuljahr ist dann durchgängig ein *Koordinatensystem mit „Rechts- und Hochachse*“ und Bezeichnung eines Punktes durch ein geordnetes Paar natürlicher Zahlen üblich. Hierbei handelt es sich um die Einführung in den Umgang mit Koordinaten, so wie es etwa in den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss gefordert wird: „Die Schülerinnen und Schüler … stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar.“ In der Regel wird aber in Schulbüchern das Koordinatensystem nur erklärt und es folgen dann entsprechende Aufgaben.

3. Beschreibung von Punkten durch Zahlenpaare

Jeder Punkt der Ebene läßt sich durch ein **Zahlenpaar** beschreiben, also durch zwei Zahlen in bestimmter Reihenfolge. Zum Punkt P in Bild 59 gehört z. B. das Zahlenpaar (2|5). Die erste Zahl ist die **x-Koordinate**, die zweite die **y-Koordinate** des Punktes. Man schreibt P(2|5).

Man findet das zu P gehörende Zahlenpaar, indem man von P aus die Lote auf die beiden Achsen fällt. Zu den Zahlenpaaren (2|5) und (5|2) gehören also zwei verschiedene Punkte. Zum Ursprung gehört das Zahlenpaar (0|0).

Umgekehrt findet man zu einem Zahlenpaar den zugehörigen Punkt der Ebene, indem man in den entsprechenden Punkten der Koordinatenachsen die Senkrechten errichtet. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist der zu dem Zahlenpaar gehörende Punkt.

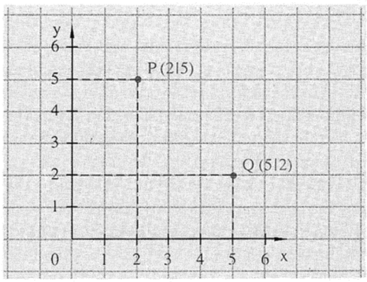


Bild 59

Abb. 4a: Einführung von Koordinaten (Aus: Mathematik 5. Schuljahr Gymnasium S. 186)

Ich meine, dass hier ein Entwicklungssprung stattfindet, den man didaktisch berücksichtigen sollte. Es ist für Kinder dieses Alters nicht selbstverständlich, dass sie die damit verbundenen Abstraktionen und Probleme von selbst bewältigen. Ich möchte hier nur auf fünf verschiedene *Aspekte, die mit dieser neuen Notierung verbunden sind*, hinweisen:

- Es wird mit 0 begonnen (ein noch nicht so tiefliegendes Problem).
- Es wird nicht mehr gezählt, sondern die Koordinaten werden durch Lotfällen oder Parallelenziehen ermittelt.

- Punkte werden als unendlich klein angesehen (ein Problem, das auch die Abstraktion von Linien und Flächen als „unendlich dünn“ betrifft und ein generelles Problem im 5. Schuljahr ist).
- Es wird prinzipiell keine Beschränkung des Punktefeldes vorgenommen, die Rechts- und die Hochachse sind Halbgeraden ohne Ende.
- Es werden geordnete Paare zur Bezeichnung verwendet; dabei besteht die Gefahr, dass die Reihenfolge nicht beachtet wird oder prinzipiell nicht klar ist, was die erste Koordinate bezeichnet und was die zweite.

Leider wird auf diese Probleme viel zu selten eingegangen, obgleich doch hier die wesentliche Grundlage für die Vorstellung von Koordinaten gelegt wird. Schon die Mathematikgeschichte – es brauchte nach Euklid ca. 2000 Jahre bis die Koordinatisierung der Geometrie durch Decartes in Angriff genommen wurde – zeigt, dass man den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit geben muss über die Probleme dabei (gegebenenfalls mittels geeigneter Aufgabenstellungen und Fragen) und die vorhandenen Vorstellungen zu diskutieren.

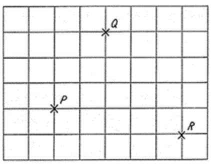


Bild 4.59
Punkte im Quadratgitter

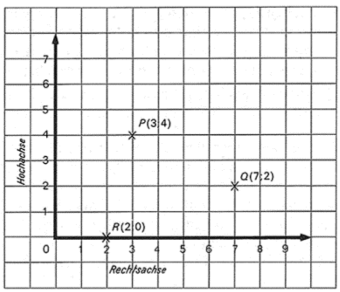


Bild 4.60
Rechts- und Hochachse

In vielen Rechenheften findest du auf jeder Seite ein Gitter gedruckt, das aus lauter kleinen gleich großen Quadraten besteht. Man nennt es ein **Quadratgitter.** Ein Quadratgitter ist zum Zeichnen von Figuren oft sehr nützlich, da man auf ihm genau angeben kann, wo einzelne Punkte liegen sollen.
Man zeichnet dazu auf das Gitter zwei Achsen, die senkrecht aufeinanderstehen – die **Rechtsachse** und die **Hochachse** – und numeriert auf beiden die Parallelen wie in Bild 4.60. Ein Punkt P, der z. B. auf den beiden Parallelen durch 3 auf der Rechtsachse und 4 auf der Hochachse liegt, wird mit P (3;4) bezeichnet. Die erste Zahl in der Klammer gibt den **Rechtswert,** die zweite den **Hochwert** des Punktes an. Der Punkt Q (7;2) liegt also auf der siebten Parallelen zur Hochachse und der zweiten Parallelen zur Rechtsachse. Der Punkt R (2;0) hat als Rechtswert 2 und als Hochwert 0. Er liegt also auf der Rechtsachse bei 2.

Abb. 4b: Einführung von Koordinaten (Aus: Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen 5. Schuljahr, S. 72)

Erweiterung der Skalenbereiche für Koordinaten und flexible Wahl eines Koordinatensystems in der Sekundarstufe I

Im 6. Schuljahr und im 9. Schuljahr wird die Vorstellung der Koordinaten dann durch die Erweiterung der Zahlbereiche (auf Z, Q, R) leicht verändert; die grundsätzlichen Prinzipien eines ebenen kartesischen Koordinatensystem bleiben aber erhalten.

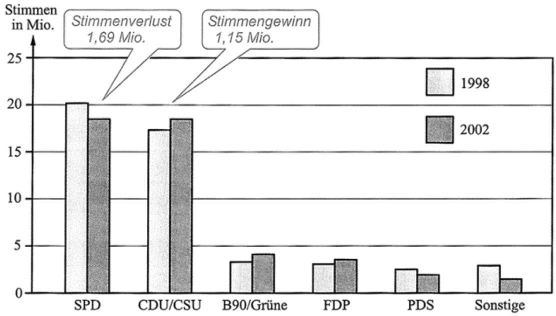
Die Bedeutung der Verwendung von Koordinaten nicht nur als Darstellung von Punkten sondern als Hilfsmittel für geometrische Probleme wird dann im 8./9. Schuljahr deutlich, wenn die Gleichungen von Geraden und Parabeln behandelt werden. Dabei sollten nicht nur die entsprechenden Gleichungen eingeführt werden und dann nur noch algebraisch argumentiert werden (wie oft in der Linearen Algebra), sondern das Wechselspiel von Geometrie und Algebra ist zu diskutieren. Man sollte also auch weiterhin koordinatenfreie Geometrie betreiben, dann aber bei bestimmten Fragen die Koordinatisierung eines bestimmten Problems und dessen Lösung mit algebraischen Hilfsmitteln behandeln. Dabei ist ein wichtiger, oft übergangener Punkt, dass Schülerinnen und Schüler lernen, zu einem gegebenen Problem ein geeignetes Koordinatensystem zu finden (und nicht immer an der Tafel die Achsen horizontal und vertikal ausrichten bzw. auf dem Blatt Papier die Achsen parallel zu den Blattkanten ausrichten). Hierauf weisen etwa auch Tietze u. a. (2000) hin, wenn sie schreiben: „Das Arbeiten mit Koordinatensystemen bzw. Basen und deren geschickte Auswahl ist eine Leitidee der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.“ (S. 7)

Eine weitere Vertiefung der Verwendung von Koordinatendarstellungen findet im 8./9. Schuljahr außerdem statt, wenn Funktionen (auf Papier oder einem Funktionenplotter) als Kurven in der Ebene dargestellt werden.

Eine andere Erweiterung der Vorstellungen von Koordinaten und Koordinatensystem findet in der Sekundarstufe I statt, wenn man von der Ebene zum Raum übergeht und einerseits die Bestimmung von Koordinaten in einem *dreidimensionalen Koordinatensystem* lernt und andererseits das Aufsuchen von Punkten zu vorgegebenen Koordinaten im Raum sowie in der Projektion in die Ebene klären muss. Die räumliche Geometrie mit Koordinaten wird zwar oft beiseite gelassen, sie ist aber bedeutsam bei der Entwicklung der Raumvorstellung und stellt eine wichtige Grundlage für viele Aspekte in der Geometrie und Technik dar (vgl. dazu auch Filler/Wittmann 2004 oder das Schulbuch Fokus 5, Mathematik Klasse 9, Ausgabe Baden-Württemberg). Neben den Bestimmungen im dreidimensionalen Raum (etwa Wege parallel zur x-, y- und z-Achse oder Schnitte mit Ebenen parallel zu zwei Achsen) kommt das Problem der Darstellung in der Zeichenebene dazu.

Bezüglich der Veränderung der Vorstellungen über mögliche Skalenmengen auf den Koordinatenachsen ist im 10. oder 11. Schuljahr auch die Behandlung von *komplexen Zahlen* ein interessantes Gebiet. Man kann etwa auf der x-Achse die reellen Zahlen und auf der y-Achse die rein imaginären Zahlen abbilden und erhält die sogenannte Gaußebene mit der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen, wobei der Wechsel zwischen geometrischen Begriffen und Aussagen sowie algebraischen Beschreibungen (einschließlich trigonometrischer Funktionen) besonders deutlich wird.

Dass außer den genannten Zahlbereichen auch *andere Elemente als Koordinaten* auftreten können, erfahren die Schülerinnen und Schüler u.a. in der Stochastik, wo nicht nur metrische Skalen sondern auch nominale Skalen, ordinale Skalen und Verhältnisskalen auftreten.



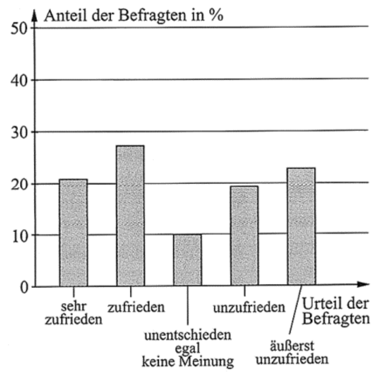


Abb. 5: Koordinatenachsen einer Nominalskala bzw. ordinalen Skala
(Aus: Elemente der Mathematik, Leistungskurs Stochastik S. 7 und 9)

Eine weitere Vertiefung der Beliefs über Koordinaten und Koordinatensysteme geschieht dadurch, dass ganz anders geartete „eindeutige Bezeichnungen der Position von Punkten“ kennengelernt werden wie

- *Polarkoordinaten* in der Ebene (r/φ) und Polarkoordinaten im Raum in Form von *Zylinderkoordinaten* (r/φ/z) oder *Kugelkoordinaten* (r/φ/Φ),
- *Koordinaten auf der Kugeloberfläche* (φ/Φ) als Längen- und Breitengrade.

Diese Formen sind natürlich erst nach Einführung der Trigonometrie (etwa in Klasse 10) möglich.

Die Vertiefung durch andere Vorstellungen und das Herstellen von Bezügen zu Anwendungsbereichen wird auch von Tietze u. a. (2000) betont, wenn sie schreiben: „In der Physik, Technik und Geografie geht es häufig darum, Positionen und Bewegungsabläufe von Körpern in Ebene und Raum darzustellen. Dazu bedient man sich neben dem kartesischen Koordinatensystem anderer Koordinatensysteme, z. B. ebener Polarkoordinaten oder räumlicher Polarkoordinaten, insbesondere auch die geografischen Koordinaten, und Zylinderkoordinaten.“ (S. 44)

Vertiefung der Begrifflichkeit in der Sekundarstufe II

Eine andere Sicht auf die Begrifflichkeit von Koordinaten findet dann in der Sekundarstufe II im Zusammenhang mit der *Linearen Algebra* statt:

- Einmal lösen wir uns davon, dass Koordinatenachsen immer senkrecht zueinander sein müssen, d.h. wir behandeln auch affine (schiefwinklige) Koordinatensysteme und können dann die Koordinaten nicht mehr mittels Senkrechte-Bilden ermitteln, sondern nur noch über Parallelen zu den Achsen bzw. parallelen Ebenen zu zwei Achsen (womit die dadurch gewonnene Zuordnung affin invariant ist).
- Zum Zweiten erkennen wir, dass die Koordinaten eines Punktes nichts anderes sind als die Komponenten des Ortsvektors, wenn man als Basisvektoren die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen wählt.
- Weiterhin kann eine Transformation von einem affinen Koordinatensystem in ein anderes affines Koordinatensystem gesehen werden als Abbildung des Paars bzw. Tripels der Einheitsvektoren auf ein anderes Paar bzw. Tripel von linear unabhängigen Vektoren.

Alle diese Aspekte kommen sicherlich in der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra vor und können in den unterschiedlichsten Werken zur

Analytischen Geometrie und/oder Linearen Algebra nachgelesen werden. Es ist aber wichtig, dass sie nicht nur am Rande auftreten, sondern, dass darüber bewusst im Unterricht diskutiert und reflektiert wird, damit die Schülerinnen und Schüler auch Raum dafür bekommen, ihre Begriffsvorstellungen über Koordinaten zu entwickeln.

Eine andere Vertiefung der Vorstellungen über Koordinaten und Koordinatisierungen bieten die sogenannten *baryzentrischen Koordinaten*, bei denen ein Basisdreieck gegeben ist und die Koordinaten für einen beliebigen Punkt die „Gewichte“ in den Ecken des Dreiecks sind, so dass der vorgegebene Punkt der Schwerpunkt des gewichteten Dreiecks ist (vgl. etwa Embacher 2008).

Erweiterung der Vorstellungen über Koordinaten im Mathematikstudium

In der Universität im Mathematikstudium werden dann nochmals die Vorstellungen über Koordinaten und Koordinatensysteme erweitert durch

- natürliche Koordinaten von Kurven und Flächen,
- den Übergang zu n-dimensionalen affinen Räumen mit affinen Koordinatensystemen und deren Zusammenhang mit der Vektorrechnung,
- die Koordinatisierung von abstrakten synthetischen Geometrien, in denen der Satz von Desargues gilt, mittels beliebiger Körper sowie die Koordinatisierung von nicht-Desargueschen projektiven Ebenen mittels Veblen-Wederburn-Systemen,
- andere Parametrisierungen (vgl. etwa Neutsch 1995).

Ohne dass die genannten Aspekte hier weiter erläutert oder vertieft werden, wird damit aber sicherlich deutlich, dass der Begriff und die Vorstellung von Koordinatisierungen noch weit über die üblichen Vorstellungen hinaus erweitert werden können.

Schlussbemerkung

Jeder der genannten Aspekte kann durch Darstellungen von Einzelheiten und Beispiele sicherlich noch weitere Gesichtspunkte hervorbringen. Hier ging es aber vor allem darum, aufzuzeigen, dass der Begriff der Koordinaten und die damit zusammenhängenden Darstellungen und Überlegungen auf verschiedenem Niveau gesehen werden können und dass eine Entwicklung des Begriffs bei Schülerinnen und Schülern nicht unbedingt von selbst stattfindet, sondern bei der Unterrichtsplanung mitreflektiert werden muss. Hierzu ist an erster Stelle ein geeignetes Bewusstsein darüber bei Lehrerinnen und Lehrern zu erzeugen.

Literatur

Embacher, F. (2008). *Die Schwerpunkte des Dreiecks*. In: Math. Semesterberichte 55, S. 131-148.

Filler, A. Wittman, G. (2004). *Raumgeometrie vom ersten Tag an! Einstiege in die Analytische Geometrie*. In: Der Mathematikunterricht 50, Heft 1-2, S. 90-103.

Haug, R.; Holzapfel, L. (2013). *Vielfalt beim Geobrett*. In: mathematik lehren 176, S. 21-41.

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss - Beschluss vom 4. 12. 2003*, Luchterhand.

Lorenz, K.; Rosin, H. (1994). *Das Geobrett im Unterricht (I) und (II)*. In: Grundschulunterricht 41, S. 13-15 und 30-32.

Mengel, W. (2008). *Geobrett-Kartei*. In: Grundschulunterricht Mathematik 55, 4, S. 42-45.

Neutsch, W. (1995). *Koordinaten - Theorie und Anwendungen*, Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Schulbuch Berger; Fischer; Hoffmann; Jüttemann; Müller; Wittmann (1998). *Das Zahlenbuch - Mathematik im 1. Schuljahr*. Stuttgart: Klett.

Schulbuch Rinkens; Hönisch (2001). *Welt der Zahl - 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Schulbuch Schröder; Uchtmann (1972). *Einführung in die Mathematik - 5. Schuljahr* Diesterweg.

Schulbuch Kuypers; Lauter; Wuttke (1998). *Mathematik 5. Schuljahr* (Ausgabe Baden-Württemberg). Berlin: Cornelsen.

Schulbuch Lütticken; Uhl (2008): *Fokus 5, Mathematik Klasse 9* (Ausgabe Baden-Württemberg), Berlin: Cornelsen.

Schulbuch Griesel; Postel; Suhr; Gundlach; Strick (2007). *Elemente der Mathematik, Leistungskurs Stochastik*, Hannover: Schroedel.

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (unter Mitarbeit von Schroth, P.; Wittmann, G.) (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 2 Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Walser, H. (2000). *Gitter und ganze Zahlen*. In: Mathematikinformation Nr. 32, 15, S. 3-26.

Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung

Marie-Christine von der Bank

Zusammenfassung. Die KMK standardisiert den Mathematikunterricht durch allgemeine Kompetenzen und inhaltliche Leitideen. Eine solche Ausrichtung an für die Mathematik zentral erscheinenden Ideen ist nicht neu. Sie wurde unter „Fundamentale Ideen“ (oder anderen Bezeichnern[1]) schon vielfach in der mathematikdidaktischen Literatur diskutiert. Meist wurden dabei nur Inhaltsideen (z. B. Zahl) und Tätigkeitsideen (z. B. Kommunizieren) berücksichtigt, „Nichtkognitive“ Ziele blieben unbeachtet. Im Beitrag wird die Forschungsdebatte skizziert, ein Modell zur Theorie Fundamentaler Ideen erarbeitet und „Optimierung“ als Beispielreservoir für Anwendungen des Modells ausgelotet.

0. Einleitung

JEROME BRUNER eröffnete mit seinem Buch „Der Prozess der Erziehung“ (Bruner 1970), in dem er die Ausrichtung des schulischen Fachunterrichts an den Fundamentalen Ideen der zugrunde liegenden Wissenschaft fordert, eine breite Diskussion über Auswahlkriterien für Inhalte des (Mathematik-)Unterrichts, die bis heute nicht beendet ist. Dabei sei bemerkt, dass die Thematik über die Jahre unterschiedlich starke Beachtung fand. Im deutschsprachigen Raum wurde sie besonders intensiv nach der deutschen Übersetzung des genannten Buches und dem Aufkommen der Strukturmathematik in den Schulen geführt. Einen weiteren Boom erlebte die Diskussion parallel zur Emanzipation von Informatik als Schulfach.[2] Aktuell wird im Zusammenhang mit der Standardisierung von Lehrplänen und Abschlüssen wieder über zentrale „Leitideen“ als Auswahlkriterien für Inhalte des schulischen Unterrichts nachgedacht. Bedingt durch diese Diskontinuitäten der Forschungsdebatte ist die Literatur zum Thema „Fundamentale Ideen“ kontrovers und umfangreich. Dennoch wird hier ein Versuch unternommen werden, exemplarisch ausgewählte Ansätze vorzustellen und zu vergleichen, um so einen arbeitsfähigen Überblick zu liefern. Als „roter Faden“

---

[1] Dem gesamten Artikel liegt die Unterscheidung zwischen Begriff und Bezeichner (des Begriffs) im Sinne von (Lambert 2003) bzw. (Lambert 2012b) zugrunde.

[2] Vgl. beispielsweise die Arbeiten von ANDREAS SCHWILL, der aufbauend auf dem Ansatz von FRITZ SCHWEIGER, eine Theorie Fundamentaler Idee der Informatik erarbeitet, die auch für die Mathematikdidaktik nutzbar ist (Schwill 1993, Schubert/Schwill 2004).

dient dabei zunehmend expliziter ein Vernetzungsgedanke. Den Ausgangspunkt bildet ein naiver Vernetzungsbegriff, das heißt, Knoten eines ebenen oder auch räumlichen Graphen werden/sind über Kanten verbunden.

Nach einem Zwischenfazit, in dem der bisherige Forschungsstand kritische Würdigung findet, wird ein pragmatischer Weg eingeschlagen. Mithilfe von obigem Vernetzungsbegriff wird ein Vorschlag zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen gemacht. Dazu ist zunächst neben einer Erweiterung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen eine stärkere Strukturierung und Ordnung derselben erforderlich. Die daraus resultierende Theorie wird unterrichtspragmatisch auf folgenden Vernetzungspentagraphen reduziert.

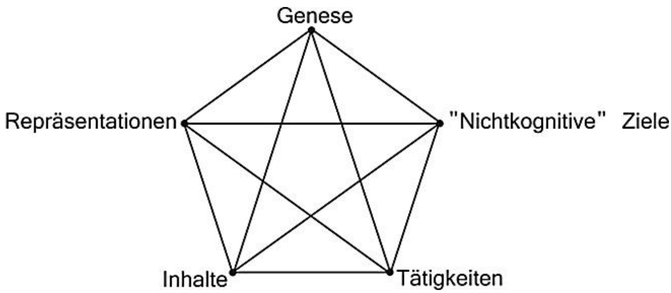


Abb. 1: Vernetzungsmöglichkeiten im Unterricht

Dieses Aspektemodell und seine Tragweite werden im dritten Teil des vorliegenden Beitrags an Optimierungsaufgaben aus verschiedenen Gebieten der Schulmathematik demonstriert.

Für alle Beispiele werden zunächst Vernetzungsmöglichkeiten zwischen verschieden Gebieten der (Schul-) Mathematik betrachtet. Im Speziellen sind dies:

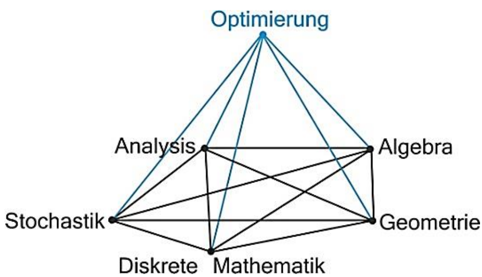


Abb. 2: Vernetzungen zwischen Gebieten der (Schul-)Mathematik durch „Optimierung“

1. Fundamentale Ideen der Mathematik

1.1 Kompetenzen und Leitideen – heute und früher und anderswo

Die Kultusministerkonferenz (KMK) verabschiedete 2003 die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss. Darin wird eine Orientierung des Mathematikunterrichts an

- sechs *allgemeinen Kompetenzen*: mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6), und
- fünf *inhaltlichen Leitideen*: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall

gefordert. Die genannten allgemeinen Kompetenzen, die alle als Tätigkeiten formuliert sind, werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Diese Inhalte sind Konkretisierungen der übergeordneten mathematischen Leitideen. Die sechs allgemeinen Kompetenzen sind durch drei Anforderungsbereiche (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren), die nach ansteigendem „Anspruch" und „kognitiver Komplexität" geordnet sind, weiter differenziert (KMK 2003, S. 13). Mithilfe dieser Ausdifferenzierung kann analysiert werden, „welche Kompetenzen in welchen Anforderungsbereichen zur Bearbeitung [einer Aufgabe] gebraucht werden" (KMK 2003, S. 13). Dadurch ergibt sich eine $6 \times 5 \times 3$ - Kompetenzmatrix, die Mathematikunterricht definieren soll. Ausgehend von dieser Standardisierung soll nun

> bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sachgebietsübergreifendes, vernetzendes Denken und Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erreicht werden […] (KMK 2003, S. 6)

Die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife stellen den Vernetzungsgedanken weiter in den Vordergrund. Hier ist Vernetzung nicht mehr ein Produkt des Lernprozesses, sondern eine Basis.

> Für den Erwerb von Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern. (KMK 2012, S. 11)

Neben den allgemeinen Kompetenzen tragen Leitideen zur Vernetzung von traditionellen klassischen Sachgebieten der Schulmathematik bei.

In Österreich wurden im Zuge einer Standardisierung von Lehrplänen und Abschlussprüfungen ebenfalls kompetenzorientierte Bildungsstandards verfasst. Sie sind, wie ihr deutsches Pendant, als Regelstandards konzipiert, die eine Auswahl der im Unterricht zu erwerbenden Kompetenzen ermöglichen (BIFIE 2012). Der österreichische Lehrplan für die Oberstufe[3] der „Allgemeinbildenden höheren Schulen“ umfasst drei Kompetenzkategorien (BMUKK 2004, S. 1).

- Kompetenzen, die sich auf *Kenntnisse* beziehen. Sie umfassen mathematische Inhalte aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik;
- Kompetenzen, die sich auf *Begriffe* beziehen. Sie äußern sich in der
    - Fähigkeit mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen und
    - Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen zu erkennen;
- Kompetenzen, die sich auf mathematische *Fertigkeiten und Fähigkeiten* beziehen. Sie beziehen sich auf
    1. darstellend-interpretierendes Arbeiten,
    2. formal-operatives Arbeiten,
    3. experimentell-heuristisches Arbeiten sowie
    4. kritisch-argumentatives Arbeiten.

Kompetenzen, die sich auf inhaltliche Kenntnisse beziehen, entsprechen im Wesentlichen den inhaltlichen Leitideen der KMK. Die allgemeinen Kompetenzen der deutschen Bildungsstandards finden sich, wenn auch anders strukturiert, in den österreichischen Kompetenzen, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, wieder.[4]

---

[3] Entspricht den Klassenstufen 9 bis 12 des deutschen achtjährigen Gymnasiums.

[4] Die Kompetenz (K6) wird von den österreichischen Kompetenzen nicht vollständig erfasst. Sie kann nur teilweise dem kritisch-argumentativen Arbeiten zugeordnet werden.

1.	2.	3.	4.
(K3), (K4)	(K5)	(K2)	(K1), (K6)

Tab. 1: Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den Kompetenzen in Österreich, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen

Kompetenzen, die auf Begriffe bezogen sind, finden sich so nicht in den deutschen Bildungsstandards. Diese Art von Kompetenzen beinhaltet vor allem (Meta-)Denkprozesse und trägt somit zur Erweiterung des Verständnisses von Kompetenzen um einen wesentlichen Aspekt von Mathematik bei. Zur Analyse und Beurteilung der vom Schüler erworbenen Kompetenzen werden letztlich nur noch drei Dimensionen von Kompetenzen unterschieden; Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen, spielen dabei keine Rolle mehr (BMUKK 2011, S. 9 f.). Dazu werden

> „verwandte“ Handlungen zu **Handlungsbereichen** (H1, H2 …), „verwandte“ Inhalte zu **Inhaltsbereichen** (I1, I2 …) und „verwandte“ Arten bzw. Grade von Vernetzung zu **Komplexitätsbereichen** (K1, K2 …) zusammengefasst.
>
> (BMUKK 2011, S. 9)

Somit ergibt sich eine $4 \times 4 \times 3$ – Kompetenzmatrix.

Handlungsdimension	**Inhaltsdimension**	**Komplexitätsdimension**
(H1) Darstellen, Modellbilden (H2) Rechnen, Operieren (H3) Interpretieren (H4) Argumentieren, Begründen	(I1) Algebra, Geometrie (I2) Funktionale Abhängigkeit (I3) Differential- und Integralrechnung (I4) Wahrscheinlichkeit und Statistik	(K1) Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K2) Herstellen von Verbindungen (K3) Einsetzen von Reflexionswissen, Reflexion

Tab. 2: Kompetenzdimensionen in den österreichischen Bildungsstandards

Dass eine solche Ausrichtung an für die Mathematik zentral erscheinenden Aspekten eine lange Tradition hat, zeigt ein Blick in die Preußischen Richtlinien zu den Lehrplänen für die höheren Schulen von 1925 (vgl. Lambert 2004, S. 71-74). Damals fanden sich unter „Methodische Bemerkungen“ acht „Allgemeine Grundsätze“, die im Wesentlichen die von der KMK aktuell geforderten allgemeinen Kompetenzen beinhalten. Lediglich die bewusste kulturelle Einbettung von Mathematik (damals der 7. Punkt) findet sich nicht mehr explizit in den aktuellen Kompetenzbeschreibungen in Deutschland. In Österreich findet sich der „Kulturell-historische Aspekt“ im Rahmen der Aspekte der Mathematik (Schöpferisch-kreativer Aspekt, Sprachlicher Aspekt, Erkenntnistheoretischer Aspekt, Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt, Autonomer Aspekt, Kulturell-historischer Aspekt), die im Lehrplan für die AHS Oberstufe direkt nach den mathematischen Kompetenzen beschrieben werden.

Ähnlich wie die allgemeinen Kompetenzen finden sich auch die Leitideen der Bildungsstandards (teilweise) in den Preußischen Richtlinien. Hier wird als „Allgemeines Lehrziel“ gefordert:

> […] Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen […] Schulung in der richtigen Auffassung von Größenwerten […]. Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen […] insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte […] (z. n. Lambert 2004, S. 71. f.)

Angesprochen sind die Leitideen Zahl, Messen, Raum und Form und Funktionaler Zusammenhang. Lediglich die Leitidee Daten und Zufall fehlt, da Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik (teilweise bis ganz) aus den Lehrplänen gestrichen wurden, um Platz für Differential- und Integralrechnung zu schaffen.[5]

Schon dieser kurze historische Abriss zeigt, dass eine Orientierung von Unterricht an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik lange vor dem Erscheinen des Buches „The Process of Education“ von BRUNER gefordert wurde, und auch ganz aktuell (oft ohne Bezug zu BRUNER oder anderen historischen Vorläufern) diskutiert wird. Da allerdings fast alle im Folgenden vorgestellten Autoren BRUNERs Buch als (historische) Basis ihrer Theoriebildung angeben, werden die Überlegungen BRUNERs im nächsten Abschnitt als Startpunkte für eine detailiertere Analyse der Entwicklung der Theorie Fundamentaler Ideen gewählt.

1.2 Fundamentale Ideen nach BRUNER – Ein Bezeichner wird geboren(?)

1960 entfachte BRUNER die Diskussion über Fundamentale Ideen der Mathematik mit seinem Buch „The Process of Education“ neu. Das Buch ist eine zusammenfassende Darstellung von Ergebnissen einer von BRUNER

[5] Vgl. (Lietzmann 1925).

geleiteten Konferenz in Woods Hole im September 1959.[6] Dort berieten Erziehungswissenschaftler, Lehrer, Psychologen und Fachwissenschaftler (u. a.) über die weitere Entwicklung und Verbesserung des (naturwissenschaftlichen) Unterrichts der Grund- und weiterführenden Schulen (Bruner 1970, S. 13).[7] Als Ursache für den vermeintlichen „Bildungsrückstand" nennt BRUNER die unzureichende Entwicklung der Curricula in den letzten fünfzig Jahren. Diese begründet er zum einen dadurch, dass führende Wissenschaftler und

> die an der Spitze ihrer Disziplinen stehenden Gelehrten, die den größten Beitrag zu einer grundlegenden Reorganisation ihres Fachgebietes hätten leisten können, an der Entwicklung von Curricula für Primar- und Sekundarschulen nicht beteiligt [waren]. (Bruner 1970, S. 18)

Als weiteren Grund gibt er an, dass wichtige Bezugswissenschaften, wie Lernpsychologie und Erziehungspsychologie sich nicht mehr ganzheitlich mit dem Curriculumsproblem beschäftigten (Bruner 1970, S. 19). Beide Entwicklungen beschreibt BRUNER als rückläufig und hebt hervor, dass neuerdings wieder viele Wissenschaftler an der Entwicklung und Planung des Schulunterrichts auf ihrem Fachgebiet beteiligt sind (Bruner 1970, S. 18). Im Zuge der Erforschung des sogenannten „nicht-spezifischen" Transfers wurde das Interesse verschiedener psychologischer Disziplinen an

---

6 Zur Analyse dient die deutschsprachige Übersetzung „Der Prozeß der Erziehung" von 1970. An Stellen, bei denen sich durch die Übersetzung semantische Verschiebungen ergeben, wird auf die englische Originalliteratur zurückgegriffen.

7 Sowohl BRUNERS Buch als auch die vorangegangene Konferenz stehen im Zeichen einer bildungspolitischen Umbruchstimmung. Durch den enormen Ausbau der Rüstungsindustrie während des 2. Weltkrieges und des aufkommenden Kalten Krieges stieg das Bruttoinlandsprodukt der USA ständig an. Demokratie und Kapitalismus schienen vielen Amerikanern Garanten für technologischen und wirtschaftlichen Fortschritt. Damit ging ein Überlegenheitsgefühl gegenüber anderen Nationen einher, besonders gegenüber der UdSSR. Dieses Selbstverständnis wurde grundlegend erschüttert, als am 04. Oktober 1957 die Sowjetunion den ersten künstlichen Erdsatelliten startete. Politisch wurde dieses Ereignis (genannt „Sputnik-Schock") in den USA genutzt um die staatlichen Förderungen der amerikanischen Rüstungsindustrie aufzustocken, da nun ein direkter nuklearer Raketenangriff der Sowjetunion auf die USA möglich schien. Gleichzeitig begegnete die Regierung unter Dwight D. Eisenhower dem vermeintlichen Bildungsrückstand gegenüber der Sowjetunion mit einer stärkeren finanziellen Förderung des Bildungssystems. BRUNER selbst spricht von einer Krise der nationalen Sicherheit, „für deren Bewältigung es auf eine gut ausgebildete Bürgerschaft ankommt" (Bruner 1970, S. 16).

> jenen Formen komplexen Lernens neu belebt, wie man sie in der Schule findet: eines Lernens, durch welches ein allgemeines Verständnis für die Struktur eines Unterrichtsgegenstandes erreicht werden soll. (Bruner 1970, S. 20 f.)

Besonders diese Art des Transfers (engl: transfer of principles and attitudes) bildet für BRUNER den Kern des „Erziehungsprozesses". Er unterscheidet sich vom spezifischen Übergangstransfer dadurch,

> daß man anfangs nicht eine Fertigkeit (skill) erlernt, sondern einen allgemeinen Begriff (general idea). Dieser kann dann als Basis dafür genutzt werden, spätere Probleme als Sonderfälle des ursprünglich erlernten Begriffs [(idea)] zu erkennen. (Bruner 1970, S. 30)[8]

Lernen besteht dann aus

> the continual broadening and deepening of knowledge in terms of basic and general ideas. (Bruner 1960, S. 17)

Dazu ist ein Curriculum notwendig,

> [that] should revisit these basic ideas repeatedly, building upon them until the student has grasped the full formal apparatus that goes with them. (Bruner 1960, S. 13)

Der Forderung nach einem spiraligen Aufbau des Curriculums liegt die berühmte Hypothese BRUNERs zugrunde

> that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development. (Bruner 1960, S. 33)

BRUNER umschreibt „basic ideas", die auch häufig mit „fundamental ideas" bezeichnet werden, als

---

[8] An den folgenden Stellen ist ein Rückgriff auf die englische Originalliteratur unverzichtbar, da ab hier engl. „idea" häufig mit dem Bezeichner „Begriff" übersetzt wird. An vorherigen Textstellen findet sich noch die Übersetzung von „basic ideas" (Bruner 1960 S. 12) mit „basalen Ideen" (Bruner 1970, S. 26). Es ist in der deutschen Übersetzung nicht klar nachzuvollziehen, warum verschiedene Bezeichner an den verschiedenen Stellen gewählt wurden. Daher trägt die deutschsprachige Übersetzung hier wenig zur Begriffsklärung bei. LUTZ FÜHRER weist zudem darauf hin, dass die deutschen Begriffe „Idee" und „Begriff" sich nur unzureichend mit dem englischen Begriff „idea" decken, der in diesem Zusammenhang auch fachtypische Fragestellungen, Bezeichnungsweisen, Strukturierungs- und Begründungsformen, Heuristiken, Methoden etc. bedeuten kann (vgl. Führer 1997, Fn. 132). Diese Feststellung wird belegt durch die häufige Gleichsetzung der Bezeichner „fundamental principles", „fundamental ideas" und „fundamental structure" im englischen Originaltext (Bruner 1960, S. 25).

> ideas that lie at the heart of all sciences and mathematic [...] [and] are as simple as they are powerful […] (Bruner 1960, S. 12)

> The more fundamental or basic is the idea […], almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems. Indeed, this is almost a tautology, for what is meant by “fundamental” in this sense is precisely that an idea has wide as well as powerful applicability. (Bruner 1960, S. 18)

Damit also Lernen durch nicht-spezifischen Transfer möglich ist, muss der Lernende wissen, ob eine vorher gelernte „idea“ auf einen neuen Lerngegenstand anwendbar ist. Dazu ist es nach BRUNER unabdingbar, die Struktur des Lerngegenstandes zu beherrschen.

> Die Struktur eines Themas begreifen heißt, es so zu verstehen, daß viele andere Dinge dazu in eine sinnvolle Beziehung gesetzt werden können. Kurz: Die Struktur lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind.
> (Bruner 1970, S. 22)

Obwohl BRUNER an einigen Stellen die Bezeichner „fundamental structure“ und „fundamental idea“ fast synonym verwendet, sprechen obige Zitate gegen eine inhaltliche Gleichsetzung der Begriffe.[9] Fundamentale Ideen sind als allgemeine Konzepte zu verstehen, die gewissermaßen zu Grundlagen von Lernprozessen werden können. Mit Struktur ist eine Beschaffenheit eines Themas gemeint, die ein Erkennen[10] von Zusammenhängen zwischen (vorher) gelernten Fundamentalen Ideen und neuen Lerngegenständen (des Themas) zulässt. Somit stiftet Struktur nach BRUNER Verbindung zwischen verschiedenen Lerngegenständen durch Fundamentale Ideen, die ihnen zugrunde liegen.

Vereinfacht gesprochen fordert BRUNER demnach die Entwicklung eines Curriculums, welches aufbauend auf Fundamentalen Ideen den Erwerb von vernetztem Wissen zulässt. Was sich zunächst auf eine so einfache und anerkannte Formel bringen lässt, erweist sich in der Umsetzung als höchst problematisch. BRUNER selbst weist auf einige Schwierigkeiten hin.

---

[9] Befördert durch eine Vermischung der Begriffe „Struktur der Mathematik“ im Sinne BOURBAKIS und „Fundamentalen Ideen der Mathematik“ im Sinne BRUNERS kam es zur Einführung der Strukturmathematik und der Mengenlehre in den Schulen; mit den bekannten negativen Auswirkungen.

[10] Wiedererkennen meint in diesem Kontext das Erkennen einer allgemeinen Fundamentalen Idee in einer neuen (spezielleren) Lernsituation (Bruner 1970, S. 25). Dieser Aspekt im Umgang mit Fundamentalen Ideen, das Sehen des Allgemeinen im Speziellen, findet sich schon bei ALFRED NORTH WHITEHEAD (Whitehead 1913).

> The first and most obvious problem is how to construct curricula that can be taught by ordinary teachers to ordinary students and that at the same time reflect clearly the basic or underlying principles of various fields of inquiry. The problem is twofold: first, how to have the basic subjects rewritten and their teaching materials revamped in such a way that the pervading and powerful ideas and attitudes relating on them are given a central role; second, how to match the levels of these materials to the capacities of students of different abilities at different grades in school. (Bruner 1960, S. 18)

BRUNER folgend lässt sich die Frage nach den Inhalten und dem Aufbau eines Curriculums, welches die Struktur und die zugrunde liegenden Fundamentalen Ideen eines Lehrgegenstandes betont, nur „mit der Hilfe von Personen von großer Weitsicht und Kompetenz auf diesen Gebieten“ entscheiden (Bruner 1970, S. 32).[11] Er geht dabei davon aus, dass durch Zusammenarbeit der besten Köpfe einer jeden Fachwissenschaft Einigkeit über Inhalte und Ziele von Unterricht erreicht werden kann.[12] Allerdings konnte bis heute nicht im Konsens geklärt werden, was Fundamentale Ideen der Fachwissenschaft Mathematik sind, noch wie sich an ihnen vernetztes Wissen im Unterricht erfolgreich erwerben lässt. Die Uneinigkeit über den Begriffsumfang zeigt sich in der Vielzahl fachdidaktischer Publikationen, in denen trotz ähnlicher Theorieansätze für Fundamentale Ideen häufig völlig unterschiedliche Ideenkataloge erarbeiten werden. Selbst bei dem zu benutzenden Bezeichner für den Begriff „Fundamentale Idee“ herrscht keine Einigkeit (vgl. Abb. 3). Zudem werden einige Bezeichner nicht synonym verwendet. Beispielsweise versteht ALFRED SCHREIBER unter „Zentralen Ideen“ gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter „Universeller Ideen“ (s. u.), während HANS WERNER HEYMANN den gleichen Bezeichner für seine übergeordneten Ideen verwendet (Heymann 1995, S. 173). In (Tietze/Klika/Wolpers 2000) und den wesentlichen Vorüberlegungen dazu von UWE-PETER TIETZE bezeichnen „Leitideen“ einen von drei Aspekten Fundamentaler Ideen, der besonders Produkte der Mathematik umfasst

[11] Diese Aussage beinhaltet in keiner Weise, dass BRUNER die Auswahl von Inhalten allein Wissenschaftlern der einzelnen Fachgebiete überlassen will. Eine solche (Fehl-)Interpretation findet sich häufig als Kritik am BRUNERschen Ansatz in der fachdidaktischen Diskussion (vgl. beispielsweise Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 37).

[12] Dass ein Katalog von Inhalten und Zielen, selbst wenn er im Konsens der führenden Wissenschaftler erstellt wird, immer nur vorübergehend Gültigkeit behalten kann, erläutert BRUNER schon in der Einleitung seines Buches (Bruner 1970, S. 23).

(Tietze 1979, S. 145). Für HANS-JOACHIM VOLLRATH bezeichnen „Leitideen“ eine ganze Reihe prozesshafter Aspekte des Mathematiktreibens wie „Gedanken“, „Einfälle“ und „Fragestellungen“ (Vollrath 1978, S.29).

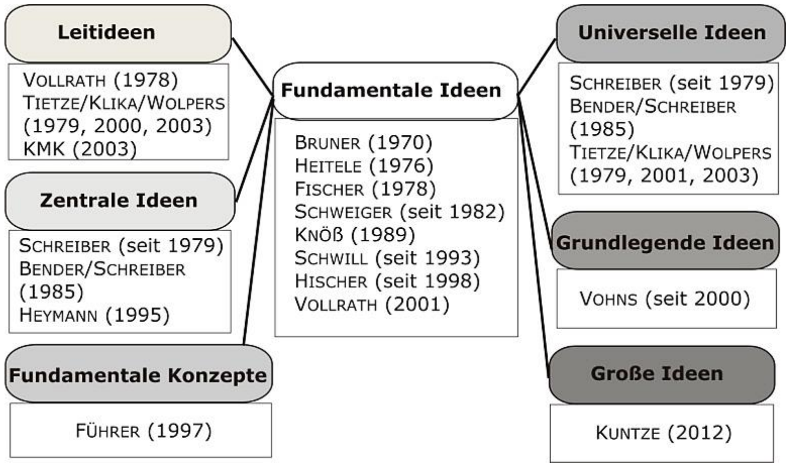


Abb. 3: Synonyme(?) für den Begriff „Fundamentale Idee“ in der deutschsprachigen Literatur

Gemeinsam ist allen Arbeiten jedoch, dass in der Theoriebildung zu Fundamentalen Ideen ein Vernetzungsgedanke, wenn auch oft nur implizit, präsent geblieben ist. Neben Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene, die schon BRUNER forderte, finden sich in der deutschsprachigen Literatur Forderungen nach Vernetzungen zum Alltagsdenken und -sprechen sowie zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematik (z. B. Schweiger 1992 bzw. Vohns 2007).

1.3 Exemplarische Aufarbeitung des Forschungsstandes

Im Folgenden werden exemplarisch die Ansätze von SCHREIBER und dabei auch von BENDER (Schreiber 1979, Schreiber 1983, Bender/Schreiber 1985), FRITZ SCHWEIGER (Schweiger 1992, Schweiger 2010) und ANDREAS VOHNS (2007) vorgestellt.[13] Die drei erstgenannten Autoren wurden ausgewählt, da ihre Arbeiten zu den ersten und zu den gründlichsten und somit zu den überzeugendsten gehören, die sich mit Fundamentalen Ideen beschäf-

[13] Diese Aufzählung enthält nur die Hauptwerke der genannten Autoren. Für die anderen in Abb. 3 aufgelisteten Autoren finden sich Literaturhinweise im Literaturverzeichnis dieser Arbeit.

tigten. Sie wurden daher zur Grundlage vieler späterer Theorieansätze.[14] VOHNS betont darüber hinaus explizit einen Vernetzungsgedanken bei seinem Kriterienkatalog für Fundamentale Ideen und weist gleichzeitig auf deren bildungstheoretische Bedeutsamkeit hin. Diese Akzentuierung stellt eine Weiterentwicklung der Thematik zur unterrichtlichen Nutzung dar.

BRUNER folgend sieht SCHREIBER die Lernenden mit einer Stofffülle konfrontiert, die kaum zu überblicken ist. Durch eine Strukturierung der Unterrichtsinhalte mittels „Universeller Ideen" hofft er, der Stofffülle und –isolation entgegenzuwirken. Der Bezeichner „fundamental" wird bewusst abgelehnt, da dieser zu sehr auf verfälschende Interpretationen wie das psychogenetisch Frühe (nach JEAN PIAGET) oder auf Grundlagen der Mathematik (wie die Mengenlehre) abzielt (Schreiber 1979, S. 166). SCHREIBER versteht unter Universellen Ideen

> allgemeine Schemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess erst in Gang setzen oder weitertreiben. (Schreiber 1979, S. 166)

SCHREIBER weist darufhin, dass eine „allgemeinverbindliche Explikation des Begriffs des unv. Schemas […] vermutlich nicht möglich [ist]", da sich der Begriff „Schema" nur vage umschreiben lässt (Schreiber 1979, S. 167).[15] In einer späteren Zusammenarbeit mit BENDER wurde SCHREIBERS Theorieansatz weiterentwickelt und auf den mathematischen Teilbereich der Geometrie angewendet. Dazu charakterisieren die Autoren Universelle Ideen als

> wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc. […] deren Universalität nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Anwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht. Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen, sie sind vielmehr begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theoriebildung. Sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Entsprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwis-

---

[14] Beispiele hierfür sind die Arbeiten von HORST HISCHER, der SCHWEIGERS Theorie stärker gliedert und der Kriterienkatalog von SCHWILL, welcher eine „Synthese" der Theorien SCHREIBERS und SCHWEIGERS bildet (Schwill 1993, S. 8).

[15] SCHEIBER schließt sich zur Erläuterung seines Verständnisses des Begriffs „Schema" ERICH WITTMANN an, der unter einem Schema ein „flexibl organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex-, Operations-, Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation des Individuums integriert ist und die Aktivitäten des Individuums steurt" versteht (Wittmann 1981, S. 63).

> senschaftlichen (nicht: unwissenschaftlichen) Denken an. Dabei stiften sie Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt; noch wichtiger ist ihre ordnende Funktion beim Eindringen in diese Struktur und beim Erschließen der Umwelt. Universelle Ideen zeichnen sich also aus durch
>
> - Weite („logische“ Allgemeinheit),
> - Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen),
> - Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).
>
> (Bender/Schreiber 1985, S. 199)

Im Kriterienkatalog werden (neben Vernetzungen zwischen mathematischen Inhalten, erster und zweiter Punkt) Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit (dritter Punkt) betont. Damit geht SCHREIBER über die Forderungen von BRUNER hinaus.

SCHREIBER unterscheidet „Schemata“ zunächst in Leitideen und Verfahren, welche erneut untergliedert werden in Findungsverfahren im Sinne PÓLYAS und Begriffsbildungsverfahren (Schreiber 1979, S. 167). Er gibt folgende Universellen Ideen der Mathematik an:

- *Leitideen*: Algorithmus, Exhaustion, Invarianz, Optimalität, Funktion, Charakterisierung,
- *Verfahren*: Rekursion, Abstraktion, Ideation.

Dieser Katalog wurde in (Schreiber 1983) teils reorganisert und teils erweitert. Dort wird eine Gliederung der Ideen in „Prozeduren“, „Eigenschaften“ und „Komponenten von Begriffsbildungsprozessen“ vorgenommen (vgl. Schreiber 1983, S 70):

- *Prozeduren*: Exhaustion, Iteration, Reduktion, Abbildung, Algorithmus,
- *Eigenschaften*: Quantität, Kontinuität, Optimalität, Invarianz, Unendlich,
- *Komponenten von Begriffsbildungsprozessen*: Ideation, Abstraktion, Repräsentation, Raum, Einheit.

Die Ideen „Unendlich“, „Raum“ und „Einheit“ tauchen schon in (Schreiber 1983) auf, zielen allerdings auf die Diskusion „Zentraler Ideen“ der Geometrie, die in (Bender/Schreiber 1985) dargestellt ist, ab. Die Autoren verstehen Zentrale Ideen als gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter Universeller Ideen, die sich durch „Repräsentation und Kombination universeller Ideen“ ergeben (Bender/Schreiber 1985, S. 199). Ebenfalls als

Zentrale Ideen der Geometrie werden „starre Körper“, „Homogenität“, gebietsspezifische Ausprägungen von „Exhaustion“ und „Ideation“ sowie „Passen“ (als (teilweise) Inzidenz von Flächen mit seinen drei Erscheinungsformen „eingeschränkte Beweglichkeit“, „Optimierung“ und „Messen“) betrachtet.[16]

Ebenfalls seit den 1980ern beschäftigt sich SCHWEIGER intensiv mit der Theorie Fundamentaler Ideen (Schweiger 1982, Schweiger 1988)[17]. Er übernimmt den Bezeichner „Fundamentale Idee“ von BRUNER und schreibt:

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, die
>
> 1. in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
> 2. tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
> 3. als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
> 4. den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
> 5. in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.
>
> (Schweiger 1992, S. 207)

Wie bei BRUNER und SCHREIBER dienen Fundamentale Ideen auch bei SCHWEIGER dazu, Inhalte auf verschiedenen Ebenen zu vernetzen (Punkte 2. und 4.). Der letzte Punkt betont Vernetzungen von Mathematik und Wirklichkeit. Damit ähnelt SCHWEIGERs Kriterienkatalog dem SCHREIBERs, rückt aber den Mathematikunterricht stärker in den Fokus. Eine weitere Neuerung stellt die historische Verankerung von Fundamentalen Ideen und damit die Forderung von Vernetzung zwischen Inhalten und Genese der Mathematik dar (Punkt 1.). SCHWEIGER gibt in seinen beiden wichtigsten Arbeiten zum Thema (Schweiger 1992, Schweiger 2010) unterschiedliche Ideenkataloge an, die sich beide stark von den Universellen Ideen SCHREIBERs unterscheiden.

---

[16] Zu den genannten Zentralen Ideen der Geometrie (besonders zur Idee des Passens) finden sich wichtige Vorüberlegungen (u. a. deren mögliche unterrichtliche Umsetzung) in (Bender 1983).

[17] Da sich eine ausführliche Zusammenfassung seiner bisherigen Arbeiten in (Schweiger 1992) befindet, wird hier auf diese Hauptarbeit eingegangen. Zusätzlich wird der Ideenkatalog aus (Schweiger 2010) vorgestellt, da sich dieser, trotz unveränderter Theorie, stark vom ersten unterscheidet.

- SCHWEIGER 1992: Linearisierung, einfache Strukturen, Bifurkation, Ähnlichkeit, Stabilität, Unabhängigkeit von Störungen, Kraft des Formalen, Erweiterndes Umdefinieren, Dualität, Optimalität[18].
- SCHWEIGER 2010: Sprache und Muster, Testen und Bestätigen, Erweiterndes Umdefinieren, Ordnen, Reparieren, Rekursion und Iteration, Funktion, Abbildung, Modelle, Optimieren.

Während der erste Katalog eher durch mathematische Ideen geprägt ist, enthält der zweite eher Ideen, deren Unterrichtsrelevanz sofort ersichtlich ist. Diese Neuakzentuierung (die schon in (Schweiger 2006) anklingt) ist zweifach begründet. Eine Basis ist das „root sytem of mathematics“[19] von LYNN ARTHUR STEEN. SCHWEIGER leitet, aus den dort genannten „mathematical actions“ („represent, control, prove, discover, apply, model, experiment, classify, visualize, compute“) und „mathematical attitudes“ („wonder, meaning, beauty, reality“), einige Fundamentale Ideen ab (Schweiger 2006, S. 67). Zusätzlich wird der Ideenkatalog von Standardisierungen von Lehrplänen und Abschlussprüfungen beeinflusst. Schweiger nennt exemplarisch die „Principles and Standards of School Mathematics“[20] betont aber, dass „any list of such ‘standards’ clearly reflects some ideas of what is seen as ‘fundamental’“ (Schweiger 2006, S. 67).

Eine weitere Weiterentwicklung des Kriterienkatalogs von SCHWEIGER erarbeitete HISCHER (Hischer 1998). Er unterteilte die genannten Kriterien nach ihrem deskriptivem (Punkte 1., 3. und 5.) und normativem (Punkte 2. und 4.) Charakter. Dadurch wurde die vorhandene Theorie stärker gegliedert und genauer reflektiert, welche Erwartungen (für den Mathematikunterricht) an Fundamentale Ideen gestellt werden und welchen beschreibenden Charakter sie für die Mathematik haben.[21]

Als Synthese der Kriterienkataloge von SCHREIBER und SCHWEIGER ist die Theorie Fundamentaler Ideen SCHWILLS zu sehen. Er führt die Definitionen

[18] Optimalität wurde im Dialog mit HANS SCHUPP dem Ideenkatalog hinzugefügt (Schweiger 1992, S. 206).

[19] (Steen 1990, S. 3).

[20] (NCTM 2000).

[21] HISCHERS Charakterisierung der Kriterien wird von SCHWEIGER in (Schweiger 2006) übernommen und bildet einen Ausgangspunkt für die Neustrukturirung des Ideenkatalogs in (Schweiger 2010).

beider Autoren zusammen und beschreibt Fundamentale Ideen als „Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- und Erklärungsschemata“ (Schwill 1993, S. 8). Zudem führt er für die einzelnen Kriterien SCHWEIGERs die Bezeichner „Zeitkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 1.), „Vertikalkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 2.) und „Sinnkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 5.) ein. In Anlehnung an SCHREIBERs Forderung nach „Weite“ einer Fundamentalen Idee, fügt SCHWILL SCHWEIGERs Katalog das „Horizontalkriterium“ hinzu, welches sicherstellen soll, dass eine Fundamentale Idee in verschiedenen Gebieten der Mathematik Anwendungen besitzt (Schwill 1993, S. 7). Im Unterschied zu HISCHER unterscheidet SCHWILL die genannten Kriterien nicht nach normativem bzw. deskriptivem Charakter, sondern nach ihrer Notwendigkeit für die Bezeichner „fundamental“ bzw. „Idee“. Demnach sind Horizontal- und Vertikalkriterium Bedingungen für die Fundamentalität und Zeit- und Sinnkriterium Bedingungen, damit von einer Idee gesprochen werden kann (Schwill 1993, S. 8). Um die philosophischen Überlegungen von IMMANUEL KANT zum Ideenbegriff zu berücksichtigen, fügt SCHWILL in einer späteren Arbeit seinem Katalog das „Zielkriterium“ hinzu (Schubert/Schwill 2004, S. 85). Es beinhaltet, dass eine Idee „zur Annäherung an eine gewisse idealisierte Zielvorstellung dient, die jedoch faktisch möglicherweise unerreichbar ist“ (Schubert/Schwill 2004; S. 85). Eine Orientierung an Fundamentalen Ideen kann demnach dazu dienen, sich dieser „idealisierten Zielvorstellung“ anzunähern.

Eine der neuesten Monografien zum Thema „Fundamentale Ideen“ stammt von VOHNS (Vohns 2007). Seine Intention ist, anhand „Grundlegender Ideen“[22] Unterrichtsinhalte mittels einer didaktisch orientierten Sachanalyse auf ihren stofflichen Kern zu untersuchen. Dabei interpretiert er Grundlegende Ideen als Metakonzepte, denen lokale Subkonzepte zugeordnet sind (Vohns 2007, S. 94 ff.). Metakonzepte fasst VOHNS als „Bündel spezifischer Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen“ auf (Vohns 2007, S. 87). Im Gegensatz zu früheren Arbeiten von SCHREIBER bzw. SCHWEIGER gibt VOHNS einen eher offenen Kriterienkatalog an.

[22] Der Bezeichner „Grundlegend“ wird gewählt, da er „die Vorstellung einer Reichhaltigkeit bzw. Bedeutsamkeit“ einschließt. Diese wird innermathematisch, wissenschaftshistorisch und außermathematisch anwendungsbezogen verstanden (Vohns 2007, S. 87).

> Eine grundlegende Idee ist mathematisch, bildungstheoretisch und pragmatisch bedeutsam, d. h., sie gibt partiell Aufschluss über Strukturen und Zusammenhänge innerhalb der Mathematik, zwischen Mathematik und „dem Rest der Welt“, zwischen Mathematik und ihren möglichen oder gewünschten Bildungswirkungen, zwischen mathematischen Inhalten und ihrer Lernbarkeit.
> (Vohns 2007, S. 3)

Die Bedeutsamkeit einer Idee sieht er zweifach. Zum einen sind Grundlegende Ideen im alltäglichen Denken bedeutsam, da sie auf einer vorwissenschaftlichen Ebene nachweisbar sind. Zum andern sind sie innerhalb der Mathematik nachweisbar und erhalten somit Bedeutung im Bereich des fachwissenschaftlichen Denkens; ob eine Idee bedeutsam ist, hängt davon ab, ob sie „auf der Basis lokaler Subkonzepte“ hilfreich ist, neues Wissen zu erwerben und ob sie Möglichkeiten zur Reflexion über Mathematik bietet (Vohns 2007, S. 88). Für VOHNS dienen Grundlegende Ideen der Vernetzung von mathematischen Inhalten untereinander, aber auch von Mathematik und Wirklichkeit. Besonders betont er Vernetzungen zwischen Inhalten und Bildungszielen des Schulfaches Mathematik. VOHNS sieht

> die Weiterentwicklung grundlegender Ideen als fachdidaktischer Kategorie […] forschungsmethodisch darin, diese – ohne ihren normativen Charakter aufzugeben oder zu missachten – vor allem als Leitkategorien der Analyse der Unterrichtsinhalte aufzufassen und erst in zweiter Linie als Leitkategorien der unterrichtspraktischen Ausgestaltung. (Vohns 2007, S. 68)

Dieser Perspektivenwechsel, der sich aus dem analytischen Zugriff auf Grundlegende Ideen ergibt, ermöglicht eine Untersuchung von Unterrichtsgegenständen auf die ihnen zugrunde liegenden Ideen. Dadurch können Beziehungen zwischen „lokalen Subkonzepten“ und „Metakonzepten“ deutlich werden (Vohns 2007, S. 89). VOHNS Analysen richten sich also auf das, was BRUNER missverständlich mit Struktur eines Lerngegenstandes bezeichnet hat. Der Unterschied in ihren Herangehensweisen liegt darin, dass VOHNS als Basis konkrete Unterrichtsgegenstände wählt und nicht von übergeordneten Ideen ausgeht; also die Richtung invertiert.

Dieses Vorgehen setzt einen (konsensfähigen) Katalog grundlegender Ideen voraus. Als Grundlage nutzt VOHNS Ideenkataloge anderer Autoren (Vohns 2007, S. 89).[23] Er unterscheidet dabei zwei Ebenen Grundlegender Ideen.

[23] Speziell (Heymann 1996), (KMK, 2003), (Schreiber 1979) und (Führer 1997).

Auf einer übergeordneten allgemeineren Ebene wählt er zunächst „Ankerpunkte“, die ihm ein Suchfeld für speziellere Ideen eröffnen (Vohns 2007, S. 90). Diese Ankerpunkte sollen eher mathematische Objekte sein. Auf der zweiten Ebene nennt er dann speziellere Ideen, die nun eher mathematischen Tätigkeiten entsprechen sollen.

- *Ankerpunkte*: Zahl, Messen, Strukturieren in Ebene und Raum, funktionales Denken.
- *Spezielle Ideen*: Optimalität, Symmetrie, Ideation und Abstraktion, Exhaustion und Approximation, Algorithmus, Invarianz, Induktion, Repräsentation. [24]

VOHNS ist die begriffliche Heterogenität seines Katalogs bewusst und er begründet,

> ich [habe] bewusst keine einheitliche Formulierung der Ideen als Begriffe oder Handlungen angestrebt. Eine grundlegende Idee zu sein, beinhaltet für mich stets begriffliche, handlungsmäßige, technisch-methodische und heuristisch-strategische Elemente […] (Vohns 2007, S. 91)

Zudem ist ihm die Interpretation der Ankerpunkte als Schnittstellen und deren Vernetzung wichtig, damit sie nicht zu oberflächlich als Überschriften von Themengebieten erscheinen (Vohns 2007, S. 92).

VOHNS Überlegungen bzgl. Vernetzungen zwischen Fundamentalen Ideen und deren Nutzung im Bereich von Metakonzepten bilden eine Basis für weitere Überlegungen dieser Arbeit. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Weiterentwicklung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen und bei Überlegungen zu deren unterrichtlichen Umsetzung.

1.4 Zwischenfazit

Die „Definitionen“ Fundamentaler Ideen der drei vorgestellten Autoren ähneln sich trotz verschiedener Akzentuierungen. Dennoch sind die angegebenen Ideenkataloge teilweise völlig unterschiedlich. Dies ist symptomatisch für die Debatte um Fundamentale Ideen. Viele Autoren geben bei gleicher (oder ähnlicher) Theoriebasis ganz unterschiedliche Ideenkataloge an.

[24] VOHNS weist darauf hin, dass keine Ideen genannt werden, die spezifisch für das Gebiet Stochastik wären, da stochastische Themen in seinen Analysebeispielen unberücksichtigt bleiben (Vohns 2007, S. 90 f.).

Gemeinsam ist diesen aber stets, dass der Schwerpunkt auf (innermathematischen) Tätigkeiten und mathematischen Inhalten liegt. In den Arbeiten von SCHREIBER[25] werden (zumindest implizit) durch die Unterteilung der genannten Schemata in Leitideen und Verfahren (und deren Unterteilung in Findungs- und Begriffsbildungsverfahren) auch heuristische Strategien (z. B. Abstraktion) als Fundamentale Ideen genannt. Bei SCHWEIGER finden sich Strategien wie „Ordnen". Auch die von der KMK genannten allgemeinen Kompetenzen und Leitideen lassen sich mit den oben dargestellten Überlegungen zu Fundamentalen Ideen theoretisch begründen.

1.5 Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen

ANSELM LAMBERT weist in (Lambert 2012a) darauf hin, dass es neben den oben dargestellten Ideen noch andere gibt, die für die Mathematik ganz wesentlich sind und bisher kaum Berücksichtigung fanden. Um also Mathematik ganzheitlicher durch eine Theorie Fundamentaler Ideen zu fassen, wird eine Erweiterung des Begriffsverständnisses notwendig. Dazu geht LAMBERT von folgenden Ideenkategorien[26] aus.

- *Inhaltsideen*: Zahl, Maß, Raum und Form, Funktion, Zufall;
- *Schnittstellenideen*: Kommunizieren, Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Darstellen, Fragen;
- *Begriffsideen*: Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierung;
- *Prozessideen*: Strategien, Heuristiken, Handlungen;
- *Tätigkeitsideen*: Approximieren (insbesondere Optimieren), Algorithmisieren, Dualisieren, Vernetzen, Orden, Strukturieren, Formalisieren, Exaktifizieren, Passen[27], Verallgemeinern, Deduzieren;[28]
- *Theorieideen*: Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskulturen, Systeme und Sprache.

---

[25] Da VOHNS u. a. den Ideenkatalog SCHREIBERS übernimmt, finden sich bei ihm ebenfalls Heuristiken.

[26] Da die von LAMBERT vorgeschlagenen Kategorien zu einer Gliederung des Oberbegriffs „Fundamentale Ideen" beitragen sollen, wird der Bezeichner „Idee" in dieser Arbeit auch – noch – für die Unterkategorien verwendet.

[27] „Passen" umfasst hier (anders als bei BENDER, s. o.) meta-mathematische Aspekte, z. B. das „(An-)passen" eines Axiomensystems an einen Sachverhalt.

[28] Dies sind eher innermathematische Tätigkeiten, die in der Auflistung von mathematisch nach meta-mathematisch geordnet sind.

Weiterhin betont er, dass besonders der Bereich „Nichtkognitiver“ Ziele des Mathematikunterrichts von aktuellen Theorien Fundamentaler Ideen „nur unzureichend erfasst“ wird (Lambert 2012a, S. 4).[29] Auch bei BRUNER finden sich Überlegungen zu „Nichtkognitiven“ Aspekten von Unterricht. Obwohl er sich durchweg mit der Frage nach inhaltlichen Auswahlkriterien befasst, misst er ihnen eine wichtige Rolle in der Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen zu.

> Mastery of the fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but also the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, towards the possibility of solving problems on one's own […] To instill such attitudes by teaching requires something more than the mere presentation of fundamental ideas […] but it would seem that an important ingredient is a sense of excitement about discovery – discovery of regularities of previously unrecognized relations and similarities between ideas, with a resulting sense of selfconfidence in one's abilities.
>
> (Bruner 1960, S. 20)

Um dem Ausblenden „Nichtkognitiver“ Ziele zu begegnen, wird hier eine weitere Ideenkategorie den anderen beigestellt. Die Kategorie der *„Nichtkognitiven“ Ideen*, die Interesse, Bereitschaft und Freude, Werthaltung, Kreativität und Geschmack sowie Motorik[30] umfassen sollte.

Weiter ist darauf hinzuweisen, dass viele der Prozessideen, Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen auch metakognitiv eine Rolle spielen. Diese Eigenschaft der Ideen ist für die später folgende unterrichtspragmatische Reduktion und für die im dritten Teil vorgestellten Beispiele von Bedeutung. So hat das Bewusstmachen von Heuristiken beim problemorientierten Arbeiten im Unterricht metakognitive Auswirkungen. Auf solche wurde in der didaktischen Literatur schon mehrfach hingewiesen.[31] Und die Ideen „Strukturieren“ und „Ordnen“ dienen nicht nur dem Erfassen und Bearbeiten mathematischer Situationen, sondern auch der (bewussten) Steuerung und Organisation eigener Denkprozesse.

---

[29] „Nichtkognitive“ Ziele des Mathematikunterrichts werden auch häufig in bildungspolitischen Debatten ausgeblendet. Diese Problematik wird in (Führer 2009, besonders S. 26 ff.) kritisch diskutiert.

[30] Motorik gehört zu wesentlichen Zielen besonders des Geometrieunterrichts, der unteren Klassenstufen und weiter in nicht-gymnasialen Schulformen, sperrt sich allerdings etwas einer Erfassung in dieser Liste als „Idee“.

[31] Vgl. (Führer 1997, S. 68 ff.).

Dies wird auch hier genutzt: Zusätzlich zur Erweiterung des Begriffsverständnisses scheint (deren unterrichtliche Nutzung im Blick habend) eine stärkere Strukturierung der Ideenkategorien angebracht. Es fällt auf, dass die oben genannten Ideen im Grad ihrer Konkretisierung differieren. Daher ist ihre Aufteilung in eine abstrakt(er)e Ebene und eine konkret(er)e Ebene sinnvoll. Auf einer abstrakt(er)en Ebene können folgende Ideenkategorien geordnet werden:

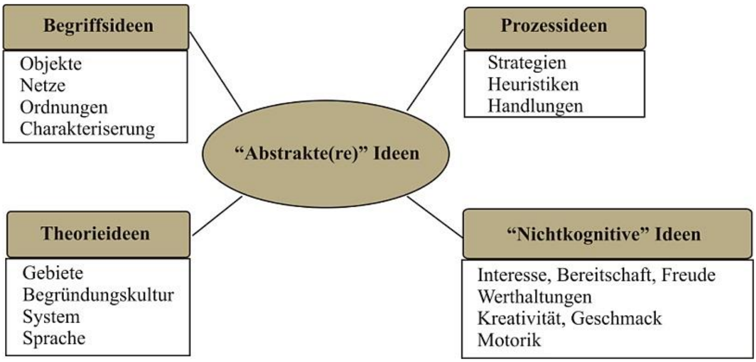


Abb. 4: Abstrakte(re) Ideen

… und auf einer konkret(er)en Ebene diese:

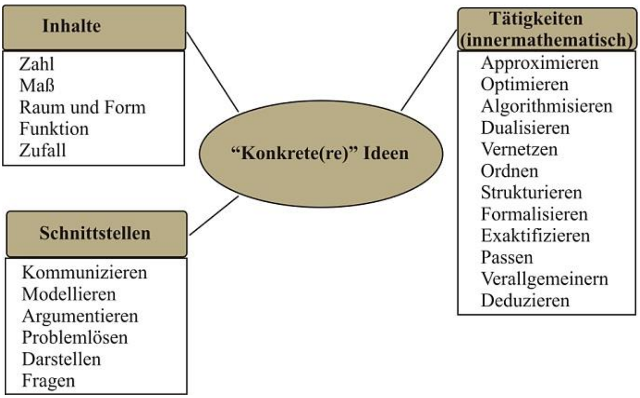


Abb. 5: Konkrete(re) Ideen

Die Auflistung der Ideen zeigt, dass die Ideen der zweiten Ebene nicht immer Konkretisierungen der abstrakten Ideen sind. Auf Entsprechungen bzw. Unterschiede zwischen den Ideen der beiden Ebenen wird bei der später vorgestellten unterrichtspragmatischen Reduktion eingegangen.

Neben den fehlenden Ideenkategorien in einer Theorie Fundamentaler Ideen ist es bis jetzt noch nicht gelungen, das Konzept für die Unterrichtspraxis wirksamer zu machen. Zwar nutzt VOHNS Grundlegende Ideen zur Analyse von Unterrichtsinhalten, gibt aber (bewusst) keine Hinweise, wie mithilfe der Ideen Inhalte für den Unterricht begründet gewonnen und aufbereitet werden können. Der Problematik, eine Brücke zwischen Theorie und Praxis zu bauen, wird im folgenden Kapitel nachgegangen.

2. Vernetzungen im Unterricht durch Fundamentale Ideen

2.1 Brücken-Charakter des Vernetzungsbegriffs

Wie in 1.3 beschrieben, spielen Vernetzungen bei der Theoriebildung für Fundamentale Ideen eine herausragende Rolle. Für die vorgestellten Autoren[32] müssen Fundamentale Ideen verschiedene Aspekte (z. B. verschiedene Inhalte oder historische Entwicklungen der Mathematik) verknüpfen können. Auf der Seite der Praxis nehmen Überlegungen zu unterrichtsrelevanten Vernetzungen eine wichtige Stelle in (fach-)didaktischen und bildungstheoretischen Diskussionen ein, ohne dass dabei explizit über Fundamentale Ideen gesprochen wird. Dabei geht es nicht nur um inhaltliche Vernetzungen sondern auch um Vernetzungen im Bereich von Metakognition und Metatätigkeiten (s. o.). Vernetzungen können somit eine Brücke zwischen einer Theorie Fundamentaler Ideen auf der einen Seite und ihrer Nutzung in der Unterrichtspraxis auf der anderen Seite bilden. Daher wird hier von Fundamentalen Ideen gefordert, dass sie möglichst reichhaltige Vernetzungen im Unterricht zulassen, insbesondere zwischen den Knoten

Inhalt, Repräsentation, Tätigkeit, Genese, „Nichtkognitive“ Ziele.

Diese Eigenschaft Fundamentaler Ideen soll „*Vernetzungskriterium*“ heißen und bildet einen Beitrag der vorliegenden Arbeit zu den mathematikdidaktischen Diskussionen über und durch Fundamentale Ideen.

2.2 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie

Ausgehend vom oben aufgezeigten erweiterten und geschärften Begriffsverständnis soll nun gezeigt werden, wie durch eine unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie Fundamentaler Ideen Einblicke in Vernetzungen im

[32] Diese Autoren bilden dabei keine Ausnahmen sondern die Regel.

Unterricht ermöglicht werden. Als Basis dienen die zwei Ebenen Fundamentaler Ideen.

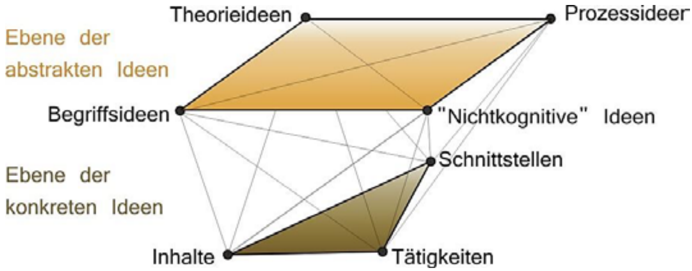


Abb. 6: Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien

Wichtig erscheint hier, dass nicht nur mittels Fundamentaler Ideen vernetzt wird, sondern dass auch die Ideenkategorien untereinander vielfältig vernetzt sind.

Für den Unterricht ist ein solch differenziertes Modell zunächst weniger zweckmäßig. Es bedarf einer Ordnung, Zusammenfassung und teilweise einer Konkretisierung der Ideen. Dies wird durch eine Reduktion der Ideenkategorien auf einen unterrichtspragmatischen Kern erreicht. Dabei ergeben sich neben Konkretisierungen auch Verschiebungen der Ideenkategorien. Die Reduktion ist in der folgenden Abbildung durch Pfeile[33] angedeutet.

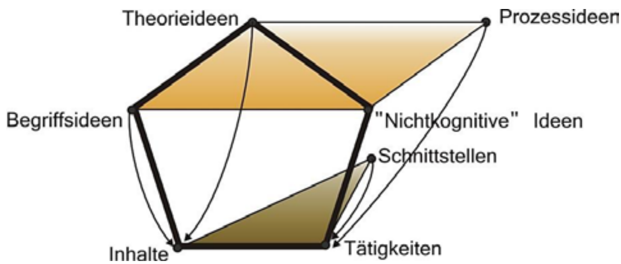


Abb. 7: Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen

(Selbst-)Tätigkeiten der Schüler[34] spielen im Unterricht eine zentrale Rolle. In ihnen konkretisieren sich obige Prozessideen. Heuristiken und Strategien

[33] Zum Beispiel bedeutet der Pfeil von Theorieideen zu Inhalten, dass sich die Theorieideen im Unterricht in den Inhalten widerspiegeln.

[34] Im Rahmen dieses Beitrags wird zur besseren Lesbarkeit im Sinne des generischen maskulinum stets nur ein Geschlecht genannt. Die Autorin weist darauf hin, dass an den jeweiligen Stellen stets an beide Geschlechter gedacht wurde.

manifestieren sich im Unterricht beispielsweise als Tätigkeiten wie Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten oder gezieltes Termumformen. Andere Strategien wie Visualisieren spielen nicht nur als Tätigkeiten eine Rolle im Unterricht, sondern können auch zum Knoten der Repräsentationen gezählt werden. Weiterhin sind, ausgehend vom eingenommenen pragmatischen Standpunkt, Schnittstellenideen und die im Modell eher innermathematischen Tätigkeitsideen zusammenzufassen.

Unter dem Oberbegriff „*Inhalte*“ können im Unterricht die mathematischen Gebiete der Theorieideen sowie Objekte und Ordnungen der Begriffsideen gefasst werden. Sie konkretisieren sich in den klassischen Bereichen der Schulmathematik (Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie und Stochastik) und bei deren inhaltlicher Bearbeitung. Ordnungen werden zwar selten im Unterricht explizit behandelt, sie tauchen dennoch als Metatätigkeiten (s. o.) und als Ordnungsrelationen auf.[35] Begründungskulturen und Sprachen der Theorieideen sind wieder zweifach bedeutsam. Zum einen gehören Beweise zu den Inhalten der Schulmathematik. Zum anderen sind sie durch unterschiedliche Darstellungsformen für die Repräsentationen im Unterricht wichtig.

Neben, den oben angesprochen Ideen, die sich in den Knoten „*Repräsentationen*“ einordnen lassen, sind hier auch unterschiedliche Darstellungsformen von Objekten und Begriffen enthalten. Neben unterschiedlichen Darstellungen (mit denen hier auch verschiedene Lösungswege gemeint sind) sind ebenfalls verschiedene Aspekte von Begriffsbildung enthalten.[36]

Den historischen Entwicklungen von Theorie- und Begriffsideen, zumindest soweit sie bekannt sind,[37] wird mit dem Knoten „*Genese*“ Rechnung getragen. Zu ihm gehören u. a. Betrachtungen historisch bedingter unterschiedlicher Begründungskulturen und Darstellungen von Objekten.[38] Bleiben his-

[35] Als „Anordnungssymbole“ schon in Klasse 5 (MKBW 2003, S. 3).

[36] Zum Beispiel die Unterscheidung zwischen Vorstellung und Darstellungen, zwischen den verschiedenen kognitiven Präferenzen oder den Darstellungsebenen (Stichwort E-I-S). Auf diese Aspekte kann hier nicht näher eingegangen werden, vgl. dazu (Lambert 2003) und (Lambert 2012b).

[37] Die mangelnde Darlegung des methodischen Vorgehens beim Forschen veranlasste schon ADOLF DIESTERWEG 1833 zu der Forderung, dass Mathematiker (wie auch von Schülern verlangt wurde) die „Wege, die sie wandeln, genau bezeichnen.“ (z. n. von Sallwück 1899; S. 300 f.).

[38] Vgl. dazu auch Abschnitt 3.1 des vorliegenden Beitrags.

torische Entwicklungen im Unterricht unberücksichtigt, kann ein statisches Bild von Mathematik als fertigem Produkt entstehen (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 147 ff.). Entwicklungsprozesse, das Ringen um Beweise und historische Irrwege bleiben Schülern verborgen. Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren Genese eingegangen werden.

Als letzter Knoten werden „Nichtkognitive" Ideen als *„Nichtkognitive" Ziele* des Unterrichts beibehalten. Sie werden hier als gleichwertiger Vernetzungsaspekt betont, da sie (besonders) im Mathematikunterricht häufig vernachlässigt werden.

So begründet sich folgender Vernetzungspentagraph:

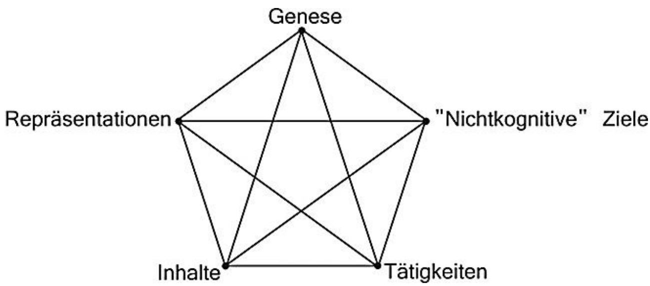


Abb. 8: Vernetzungspentagraph

3. Optimierung in der Geometrie und darüber hinaus

„Optimieren ist fundamental" lautet die Überschrift des Leitartikels von SCHUPP, in dem von ihm herausgegebenen „mathematik lehren"-Themenheft „Optimieren".[39] Hierin belegt er, dass „Optimieren" den von SCHWEIGER (s. o.) genannten Kriterien für Fundamentale Ideen genügt.[40] Dass „Optimierung" auch obiges Vernetzungskriterium erfüllt, wird nun an verschie-

[39] (Schupp 1997, S. 4-10).

[40] Ausführlichere Überlegungen zur Fundamentalität von „Optimierung", die u. a. auch einen Vorschlag zur Ausgestaltung einer Leitlinie „Optimieren" enthalten, finden sich in (Schupp 1992). Auch hier wird der Kriterienkatalog von SCHWEIGER genutzt, denn „Schupp selbst hat sich nicht eigentlich um die Konzeption fundamentaler Ideen bemüht, als vielmehr Überlegungen zum Optimieren vorgelegt, die eine der wenigen Ausarbeitungen einer einzelnen ausgewählten fundamentalen Idee darstellt" (Vohns 2000, S. 17).

denen Optimierungsaufgaben illustriert. Alle Aufgaben sind mit Methoden der Schulmathematik zu lösen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf eine ausführliche Lösung verzichtet und auf entsprechende Literatur verwiesen. Die vier Aufgaben sind aus verschiedenen Bereichen der Mathematik gewählt, um die Reichhaltigkeit von Optimierungskontexten anzudeuten.

3.1 Isoperimetrische Probleme in der Ebene

Isoperimetrische Probleme gehören zu den berühmtesten Problemen der Mathematik, ihr Ursprung geht wahrscheinlich mehrere Tausend Jahre zurück. Das Potenzial dieser Aufgaben liegt vor allem in ihren vielfältigen Lösungsmöglichkeiten. So ist das isoperimetrische Problem für Rechtecke „Welches unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat maximalen Flächeninhalt?“ schon über einen direkten Vergleich verschiedener Konkurrenten Schülern der 5. Klasse zugänglich.[41] Die Aufgabe kann aber auch geometrisch (durch einen Flächenvergleich) oder algebraisch-funktional (mithilfe einer Mittelwertungleichung oder durch Interpretation des Funktionsgraphen oder durch Infinitesimalrechnung) gelöst werden.[42]

Vernetzungsmöglichkeiten auf inhaltlicher Ebene

Obige (knappe) Aufzählung verschiedener Lösungsmöglichkeiten zeigt, dass die klassischen Gebiete der Schulmathematik Arithmetik und Algebra, Geometrie und Analysis (ohne und mit Infinitesimalrechnung) durch die Aufgabe vernetzt werden. Lediglich stochastische Inhalte bleiben hier unberücksichtigt. Sowohl bei den geometrischen als auch bei den algebraisch-funktionalen Lösungen ist der Einsatz eines DGS hilfreich, wodurch die Thematisierung diskreter mathematischer Inhalte ermöglicht wird. Dies scheint besonders wichtig, da trotz ihrer enormen Bedeutung für aktuelle mathematische Forschung, Diskrete Mathematik bisher noch keinen Einzug in die Schulmathematik gefunden hat. Das isoperimetrische Problem für Rechtecke eignet sich auch gut, um zu erläutern, wie diskrete Fragestellungen und im Speziellen Inhalte aus dem Bereich der Numerik in natürlicher Weise bei seiner Bearbeitung auftreten können. Eine Möglichkeit dazu ergibt sich aus folgender Konstruktion:

---

[41] Vgl. (Lambacher Schweizer 2004, S. 195, Nr. 4); Aufgabenteil b) untersucht sogar die duale Aussage.

[42] (Schupp 1992, S. 1-5).

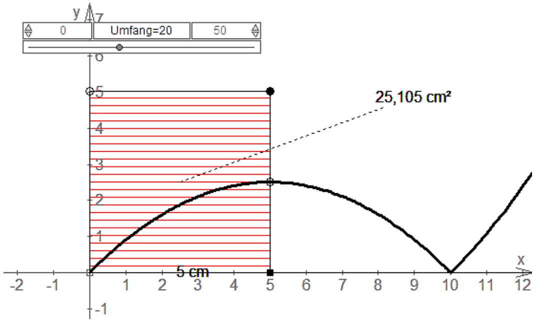


Abb. 9: Konstruktion zum isoperimetrischen Problem für Rechtecke (erstellt mit Dynageo)

Für die Grafik sollte unter allen Rechtecken mit Umfang 20 cm jenes mit maximalem Flächeninhalt gefunden werden. Das gesuchte Objekt ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm. Allerdings liefert obige Konstruktion im Maximalpunkt einen Flächeninhalt von 25,105cm^2. Hier sollte mit den Schülern der Grund für diese scheinbare Ungenauigkeit des Programms diskutiert werden.[43]

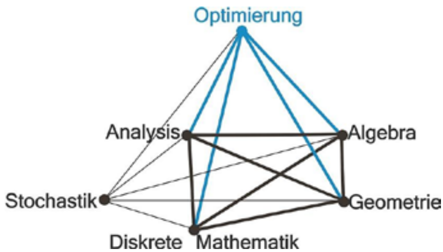


Abb. 10: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene durch das isoperimetrische Problem für Rechtecke

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Das Vernetzungspotenzial dieser Aufgabe geht über Inhaltsvernetzungen hinaus. Die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten fordern unterschiedliche Darstellungen. Die Reichhaltigkeit isoperimetrischer Probleme kann sich im

[43] Entscheidend für den „Fehler“ ist, dass die gezeichnete Ortslinie kein kontinuierliches, sondern ein diskretes Objekt ist. Die Darstellung der Ortslinie als Kurve suggeriert, dass unendlich viele Rechtecke verglichen werden, obwohl dies nur für endlich viele Kandidaten geschieht. Streng genommen ist diese Lösungsmethode nur eine ausführlichere Variante des direkten Flächenvergleichs, wie er sich im oben zitierten Schulbuch befindet.

Unterricht daher durch die Bearbeitung verschiedener Repräsentationen des Problems und seiner Lösung zeigen. Auf der anderen Seite ermöglichen verschiedene Repräsentationen des Inhalts vielfältige (Selbst-)Tätigkeiten der Schüler. Beispielsweise verlangt die Aufgabe von den Schülern, gerade weil sie unterschiedliche Repräsentationen zulässt, eine sachgerechte Modellierung, die Kommunikation und Argumentation erfordert.[44] Nachdem ein geeignetes Modell gewählt wurde, müssen die Schüler innermathematisch arbeiten. Tätigkeitsideen wie Approximieren (einerseits als Optimieren, andererseits als numerisches Nähern), Formalisieren und Dualisieren (vgl. Fn. 41) spielen hier eine Rolle. Die Reichhaltigkeit der Tätigkeiten kann hier nur angedeutet werden, da die auszuführenden Tätigkeiten maßgeblich vom Einsatz der Aufgabe im Unterricht abhängen.[45] Durch unterschiedliche Darstellungen (oder durch die Tätigkeit des Darstellens) erfolgt eine Vernetzung von Inhalten nicht nur explizit, sondern auch auf einer Metaebene.

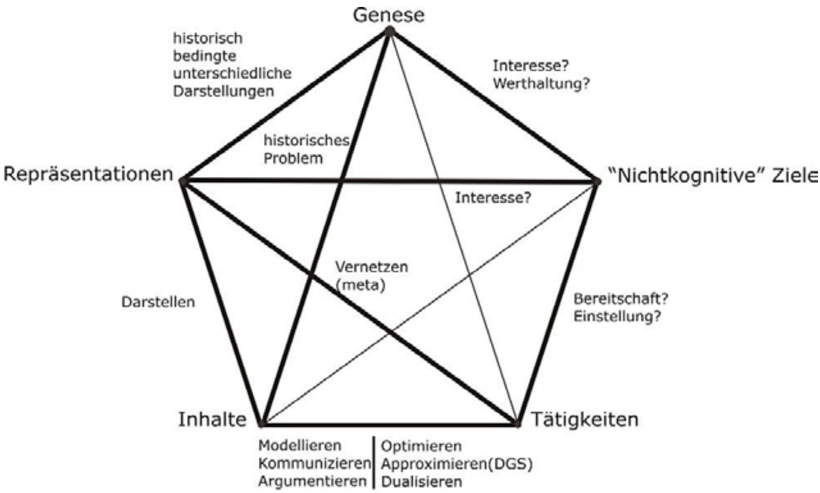


Abb. 11: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung des isoperimetrischen Problems für Rechtecke

[44] Das Modell sollte von den Schülern, mit den ihnen zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln, ausgehandelt werden.

[45] Denkbar wäre auch eine Öffnung der Aufgabe durch eine Verallgemeinerung, die zu der Frage führt, welches unter allen Umfangsgleichen n-Ecken maximalen Flächeninhalt hat.

Vernetzungen zur Genese der Mathematik sind zweifach möglich. Einmal über die Thematisierung von historisch bedingt unterschiedlichen Darstellungen und zum anderen über die historische Einbettung des Probleminhalts. Das Einbeziehen der Genese in den Unterricht ist an dieser Stelle besonders sinnvoll, da das klassische isoperimetrische Problem schon in der Antike bekannt war, aber bis ins 19. Jahrhundert kein Existenzbeweis für den Kreis als dessen Lösung existierte.[46] Neben möglichen motivationalen Aspekten durch einen hohen Selbsttätigkeitsanteil beim Bearbeiten der Aufgabe stellt der Bezug zur Genese eine Chance dar, Interesse der Schüler an Mathematik zu fördern und damit „Nichtkognitive“ Ziele von Unterricht zu erreichen. Ihre Erreichbarkeit hängt vom individuellen Umgang des Lehrers und seiner Schüler mit dieser Aufgabe im Unterricht ab.

3.2 Isoperimetrische Probleme im Raum

Optimierung zeichnet sich u. a. dadurch aus, dass sie unkompliziert in bestehende Unterrichtsinhalte eingebettet werden kann. Dies soll an einer Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards demonstriert werden, die zunächst keinen Optimierungskontext hat. Es handelt sich um die Riesenfass-Aufgabe, bei der den Schülern ein Bild gegeben wird, auf dem einige Männer zu sehen sind, die ein übergroßes Fass rollen. Gefragt ist nach dem Volumen des Fasses.[47]

Abb. 12: Foto zur Riesenfass-Aufgabe aus (KMK 2004, S. 16)

[46] Erst durch die Interpretation des Problems als Variationsproblem und der damit verbundenen Einsicht, dass Variationsprobleme im Allgemeinen keine Lösung haben müssen, konnte WEIERSTRAß einen vollständigen Beweis angeben. Für einen historischen Abriss des klassischen isoperimetrischen Problems und einem Beweis der Optimalität des Kreises siehe (Näher 2006, S. 5 ff. und S. 16 ff.).

[47] Eine kritische Diskussion der Aufgabe und ihrer Musterlösung findet sich in (Führer 2005).

Durch Aufgabenvariation im Sinne von SCHUPP[48] (hier Anwendung des Extremalprinzips) entsteht ein räumliches isoperimetrisches Problem. Die Fragestellung lautet nun: Welches unter allen oberflächengleichen Fässern hat maximales Volumen? Dazu muss zunächst „Fass" mathematisch modelliert werden. Der neue Optimierungskontext der Aufgabe kann durch kulturhistorische Einbettung zur Keplerschen Fassregel leiten. So wird aus der KMK-Aufgabe, die zur Vernetzung von Inhalten und Tätigkeiten gedacht war, ein Problem, das ebenso reichhaltig vernetzt, wie das isoperimetrische Problem für Rechtecke.[49]

3.3 Kürzeste-Wege-Probleme

Nachdem zwei Optimierungsprobleme dargestellt wurden, die klassischen Inhalten der Schulmathematik entstammen, wird nun eine Aufgabe der Kombinatorischen Optimierung vorgestellt.[50] Speziell handelt es sich dabei um ein (zunächst einfach klingendes) Problem der Graphentheorie: Welcher ist der kürzeste Weg von einem Ort A zu einem anderen Ort B? In (Lutz-Westphal 2006) ist diese Aufgabe anhand eines Berliner U-Bahn-Plans mit Schülern verschiedener Klassenstufen im Rahmen einer Unterrichtsreihe zur Kombinatorischen Optimierung behandelt worden. Neben der Frage, wie man einen solchen Weg findet, wurde dabei sehr ausführlich diskutiert, was denn überhaupt ein kürzester Weg sein soll. Es kommen mehrere Modelle in Betracht: der zeitlich schnellste Weg, der Weg, der am wenigsten U-Bahnstationen durchläuft, der Weg auf dem die Züge erfahrungsgemäß (was bedeutet das überhaupt?) die geringste Verspätung haben usw.

Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Auch dieser Problemtyp bietet durch seine reichhaltigen Lösungsmöglichkeiten eine Vielzahl von inhaltlichen Vernetzungsmöglichkeiten. Ist ein Modell für den kürzesten (den optimalen) Weg erarbeitet (s. o.), ist eine Lösungsmethode das Abzählen aller möglichen Wege und ihr Vergleich. Al-

---

[48] Vgl. (Schupp 2003).

[49] Die Vernetzungspentagraphen sind daher auch im Wesentlichen identisch.

[50] Wie oben schon erwähnt, haben Inhalte der Diskreten Mathematik (zu der auch die Kombinatorische Optimierung gehört) noch keinen festen Platz in Lehrplänen. Eine Ausnahme bildet das Bundesland Berlin. Hier gehören ausgewählte Inhalte der Graphentheorie zum Wahlbereich (SBJS 2006, S. 58-59). In Hamburg wurden Inhalte der Graphentheorie nach einer kurzweiligen Aufnahme als Wahlpflichtbereich 2004 schon wieder aus den Rahmenlehrplänen entfernt (BBS 2007, S. 13).

lerdings ist ein solches Vorgehen für einen komplexen U-Bahn-Plan sehr mühsam oder (ohne Computer) gar unmöglich. Dieses zunächst arithmetisch-algebraische Verfahren birgt aber bereits eine Hauptschwierigkeit der Aufgabe in sich. In einem komplexen U-Bahn-Netz dauert das Abzählen aller möglichen Wege selbst mit Computerunterstützung sehr lange (Stichwort: kombinatorische Explosion). Um an dieser Stelle effizientere Methoden zu finden, sollte im Unterricht ein Exkurs über Graphen eingebaut werden, in dem die Schüler einige grundlegende Eigenschaften von Graphen kennenlernen.[51] Mit diesem Wissen lässt sich der U-Bahn-Plan zu einem Graphen abstrahieren und kann auf diese Weise als diskretes geometrisches Objekt interpretiert werden. Auf seinen mathematischen Kern reduziert, wird der Graph weiter untersucht, bis eine formale Vorschrift zum Finden eines kürzesten Weges gefunden ist. Formal bedeutet hier nicht die Angabe eines ausformulierten Quellcodes in einer Programmiersprache, sondern kann auch eine (noch alltagssprachliche) Schritt-für-Schritt-Anleitung sein. Wichtig ist, dass sie allgemeingültig formuliert ist und jeden Schritt berücksichtigt. Dies stellt für viele Schüler eine schwierige Aufgabe dar, ermöglich aber (fast schon nebenbei) Einblicke in die Arbeits- und Funktionsweise von Computern. Interessieren bei der Streckenplanung nicht nur die einzelnen U-Bahn-Stationen, sondern vielleicht auch häufige Verspätungszeiten oder persönliche Präferenzen (manche planen einen längeren Fußweg[52] an der frischen Luft zu einzelnen Stationen, anderen geht die Bequemlichkeit vor und sie fahren soviel Bahn wie möglich), so ergeben sich im Unterricht inhaltliche Bezugspunkte zur Stochastik. In diesen Fällen müssen Daten gesammelt und ausgewertet werden und auch der Zufall sollte Berücksichtigung finden.

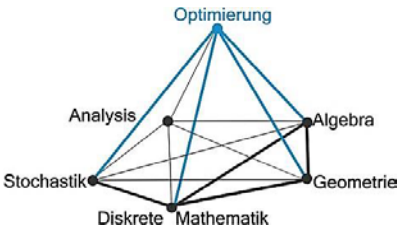


Abb. 13: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

[51] Viele wichtige Fachbegriffe der Graphentheorie sind Schülern aus der Alltagssprache bekannt und mittlerweile gibt es didaktisch aufbereitete Materialien für einen Exkurs in die Graphentheorie (z. B. Lutz-Westphal 2005).

[52] Dazu kann zusätzlich zum U-Bahn-Plan ein Stadtplan analysiert werden.

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Kürzeste-Wege-Probleme lassen ebenfalls Vernetzungen über die Inhalte hinaus zu. Ähnlich wie bei den oben vorgestellten isoperimetrischen Problemen, sind auch hier verschiedene Repräsentationen denkbar (U-Bahn-Plan, Graph, Schritt-für-Schritt-Anleitung, Quellcode). Der offene experimentelle Zugang, der sich bei dieser Aufgabe anbietet, verlangt den Schülern ein hohes Maß an (Selbst-)Tätigkeit ab. Sie müssen eine komplexe reale Situation modellieren[53] und zu deren Lösung kreativ forschend vorgehen. Bei der Arbeit innerhalb des Modells stehen mathematische Tätigkeiten wie Algorithmisieren und Formalisieren im Vordergrund. Beim Umgang mit verschiedenen Repräsentationsformen des Problems und seiner Lösung können diese, wie bei den isoperimetrischen Problemen, vom Schüler auf einer Metaebene vernetzt werden. Weiter fordern sie die Schüler zur zweifachen Strukturierung auf. Zum einen wird, z. B. durch die Darstellung des Netzplans als Graph, die reale Situation strukturiert. Zum anderen dienen sie wiederum, damit die Schüler sie sinnvoll einsetzen können, einer Meta-Strukturierung. Das bedeutet, im Idealfall tragen die Kenntnis verschiedener Darstellungsformen und deren Nutzen zur Strukturierung des eigenen Denkens bei. Bezüge zur Genese der Mathematik ergeben sich hier vor allem über die relative Neuzeitlichkeit und Aktualität des Problems.[54] Häufig überraschen die vielen offenen Forschungsfragen der Graphentheorie die Schüler. So ist beispielsweise obiges Kürzeste-Wege-Problem durch den Dijkstra-Algorithmus effizient lösbar[55]. Doch schon das Finden einer kürzesten Rundreise (Problem des Handelsreisenden) innerhalb des Netzplans ist meist selbst mit Computereinsatz nicht effizient möglich. Eine solche Erweiterung des ursprünglichen Problems führt zur berühmten P-NP-Problematik. Vereinfach gesprochen geht es dabei darum, ob für die heute noch nicht effizient lösbaren Probleme eine effiziente Lösung existiert, die

[53] Es sei nochmals daran erinnert, dass damit nicht nur die Auswahl eines Modells für den U-Bahn-Plan gemeint ist, sondern schon vorher ein Modell für den kürzesten Weg ausgehandelt werden muss.

[54] Zwar bildet LEONARD EULERS Beweis der Nichtexistenz eines Rundwegs über alle Brücken in Königsberg von 1736 den Anfang graphentheoretischer Überlegungen. Dennoch konnte sich die moderne Graphentheorie erst parallel zur Entwicklung leistungsfähigerer Computer ab der Mitte des 20. Jahrhunderts durchsetzen.

[55] „Effizient lösbar“ bedeutet in diesem Kontext, dass ein Lösungsalgorithmus in polynomieller Zeit abläuft.

nur noch nicht entdeckt wurde oder ob tatsächlich keine existiert. Die Beantwortung dieser Frage ist von so großer Bedeutung für die moderne Mathematik (und Informatik), dass das Clay Mathematics Insituts of Cambrigde Massachusetts (CMI) es zu seinen sieben Millennium-Problemen zählt und dessen Lösung mit einer Million Dollar dotiert (CMI 2006).[56] Diese Überlegungen bieten einen Ansatzpunkt zum Erreichen „Nichtkognitiver“ Ziele von Unterricht. Neben der Einbeziehung der Lebenswelt der Schüler bei der Behandlung von Kürzeste-Wege-Problemen (z. B. indem ein Netzplan gewählt wird, auf dem die Schüler ihre tägliche Route von ihrem Wohnort zur Schule planen können), kann mithilfe von Exkursen zur Historie oder verwandten Inhalten das Interesse der Schüler am Stoff geweckt werden. Eventuell entsteht dadurch Bereitschaft, sich weiterhin mit der Thematik zu beschäftigen und eine positive Einstellung zum Fach kann gefördert werden.

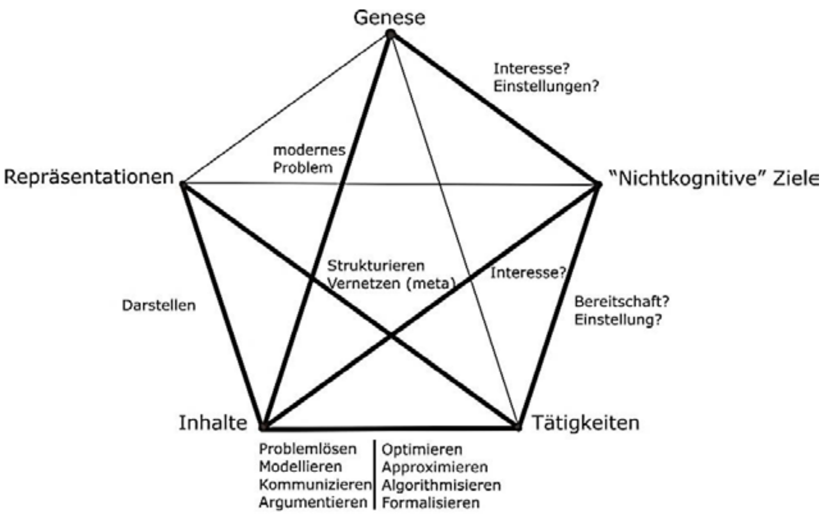


Abb. 14: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung von Kürzeste-Wege-Problemen

[56] Auch hier ist eine historische Einbettung möglich. Die Millennium-Probleme sind an einen Vortrag von DAVID HILBERT am 8. August 1900 angelehnt, in dem er 23 bis dahin ungelöste mathematische Probleme vorstellte. Die meisten damaligen Probleme gelten heute als (zumindest teilweise) gelöst. Die Riemannsche Vermutung gehört aber zum Beispiel nach wie vor zu den offenen Problemen und befindet sich ebenfalls auf der Liste des CMI.

3.4 Das Crap-Spiel

Das letzte Beispiel, das sogenannte Crap-Spiel, entstammt der Stochastik. Es handelt sich um ein Würfelglücksspiel, welches besonders in den USA in Kasinos weit verbreitet ist. Die Spielregeln lauten:

Zwei Würfel werden geworfen und deren Augensumme S' gebildet. Ist diese Summe

a) 7 oder 11, so hat man sofort gewonnen,
b) 2 oder 3 oder 12, so hat man sofort verloren.

In allen anderen Fällen wird erneut gewürfelt und wieder die Augensumme der beiden Würfel gebildet. Diese soll nun S heißen. Ist die Summe S

a) 7, so hat man verloren,
b) gleich der Augenzahl des 1.Wurfes, also S=S', so hat man gewonnen.

In allen anderen Fällen wird wieder weiter gespielt.

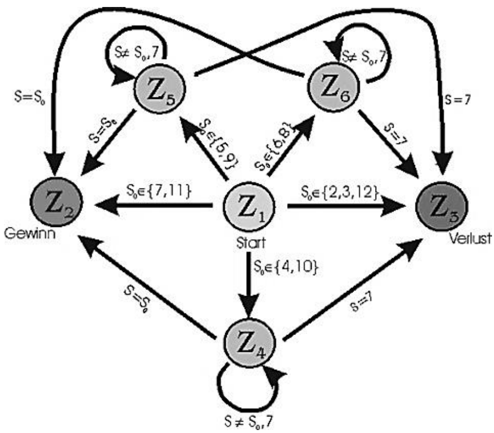


Abb. 15: Spielregeln (Lehmann 2005) bzw. Spielgraph[57] (Hischer/Lambert 2007) von Crap

Beim üblichen Einsatz der Aufgabe im Unterricht sollen die Schüler entscheiden, ob das Spiel fair ist (Initialaufgabe). Die Antwort vorweg: Das Spiel ist nicht fair. Die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Spieler liegt bei ca 49,2929 % und die des Kasinos damit bei 50,7171 %. Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit liegen überraschend nah zusammen. Diese Feststellung bietet einen Ansatzpunkt für die Einbettung in einen Optimierungskontext. Durch die Untersuchung weiterer Kasinoglücksspiele (beispielsweise Roulette mit einfacher Chance) erfahren die Schüler, dass ihre Feststellung kein Zufall ist. Die meisten Glücksspiele des Kasinobereichs sind so ausgelegt, dass sich Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit des Spielers nur minimal zum Vorteil der Kasinos unterscheiden. Dass damit dem Spieler Chancengleichheit suggeriert werden soll, liegt auf der Hand. Anders als bei klassischen Optimierungsaufgaben gilt es hier nicht Chancengleichheit zu

[57] Das Aufstellen des Spielgraphen erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden modellierend die Spielregeln graphisch dargestellt, die dann anschließend durch Wahrscheinlichkeiten mathematisiert werden.

erreichen (als Optimalpunkt), sondern Ziel ist die Konstruktion eines Spiels, dessen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit nur minimal von 50 % abweichen. So wird ein optimaler Ausgleich zwischen Animation des Spielers und Gewinn des Kasinos gefunden. Als mögliche Erweiterung der Initialaufgabe könnten die Schüler aufgefordert werden diese neue Typ Optimierungsaufgaben zu bearbeiten, indem sie ein Spiel entwickeln, bei dem Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit möglichst nah bei 50 % liegen.

Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Auf die inhaltlichen Vernetzungen beim Lösen dieser Aufgabe wird in (Lehmann 2005) sehr ausführlich eingegangen.[58] Es werden Vernetzungen zwischen stochastischen Inhalten, Linearer Algebra (Lösung durch Potenzieren von Übergangsmatrizen) und Analysis (Lösung durch unendliche Reihen) vorgestellt. Darüberhinaus soll hier auf Vernetzungen durch diskrete und geometrische Aspekte der Aufgabe hingewiesen werden. Beispielsweise lässt sich schon der oben dargestellte Spielplan als Graph (Knoten sind die verschiedenen Zustände des Spiels und Kanten stellen die Übergänge zwischen den Zuständen dar) auffassen. Somit kann er als diskretes geometrisches Objekt verstanden werden. Die Untersuchung des Crap-Spiels ermöglicht daher die Integration aller oben vorgeschlagenen mathematischen Gebiete.

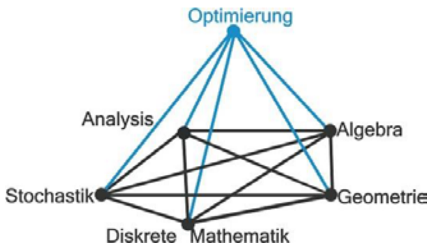


Abb. 16: Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene

Weitere Vernetzungsmöglichkeiten

Neben inhaltlichen Vernetzungen sind auch solche zu verschiedenen Repräsentationsformen und (Selbst-)Tätigkeiten der Schüler beim Bearbeiten der Initialaufgabe in (Lehmann 2005) dargestellt. Sie finden sich im Vernetzungspentagraphen (s. u.). Die Arbeit an der Optimierungsaufgabe verlangt

[58] Dort finden sich auch verschiedene Modelle für Simulationen des Spiels.

von den Schülern, dass über das Ergebnis der Initialaufgabe hinaus Nachforschungen (Fragen, Kommunizieren) angestellt werden. Das Konstruieren eines eigenen Glücksspiels erfordert ein hohes Maß an Kreativität, im Zusammenspiel der Inhalte, Repräsentationen und Tätigkeiten also eine sehr anspruchsvolle Weiterentwicklung der Initialaufgabe. Dafür bietet diese Thematik weitere Vernetzungen zur Genese der Mathematik und zu „Nicht-kognitiven" Zielen des Unterrichts. Die Tradition von Glücksspielen zu Unterhaltungszwecken reicht bis in die Antike, ihre mathematische Analyse einige Hundert Jahre zurück. Durch massenmediale Vermarktung (zum Beispiel TV Total Pokernacht[59] oder pokerstars.de[60]) und häufige Berichterstattung über Glücksspielsucht ist das Thema zudem hochaktuell. Über diese Bezüge kann Interesse und damit Bereitschaft der Schüler geweckt werden, sich intensiver mit der Glücksspielthematik auseinanderzusetzen. Der sich anbietetende experimentelle Zugang im Unterricht kann ebenso Interesse und Einstellungen der Schüler positiv beeinflussen. Glücksspiele selbst zu spielen hilft nicht nur den Erfahrungsschatz im Bezug auf wahrscheinlichkeitstheoretische Phänomene zu erweitern,[61] sondern ermöglicht auch einen Einblick in die Gefahren der Glücksspielsucht. Faszination und Nervenkitzel beim Spielen, aber auch wie schwer es sein kann, sich vom Spiel wieder zu lösen, können hier verantwortungsvoll im geschützten Rahmen erfahren werden. Dadurch ergeben sich fächerübergreifende Bezüge zur Psychologie (Warum sind Glücksspiele überhaupt so spannend für den Menschen und wie nutzen Kasinos diesen Sachverhalt?) und zur Sozialkunde (Frage nach der Verantwortung der Gesellschaft; Verbot von Glücksspielen; Jugendschutz bei Online-Glücksspielen[62]). Zum abschließenden Überblick dient erneut der Vernetzungspentagraph.

---

[59] http://www.pokerstars.de/tvtotal/ Abruf am 05.12.12.

[60] http://www.pokerstars.de Abruf am 05.12.12.

[61] Im Sinne von (Wolny 2008): Erfahrungen sammeln, darstellen, austauschen, systematisieren und erklären.

[62] Auf die Gefahren für Jugendliche beim Online Poker weist die Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung besonders hin (vgl. BZgA 2012). Problematisch ist dabei die Einhaltung des Jugendschutzes zu sehen, da bei der Anmeldung bei vielen Online Poker Portalen (so auch beim oben genannten pokerstars.de) die vom Nutzer angegebenen Daten (z. B. ob der Nutzer volljährig ist) nicht vom Betreiber des Portals geprüft werden. Es genügen meist ein Internetzugang und eine gültige Email-Adresse, um dort online zu spielen.

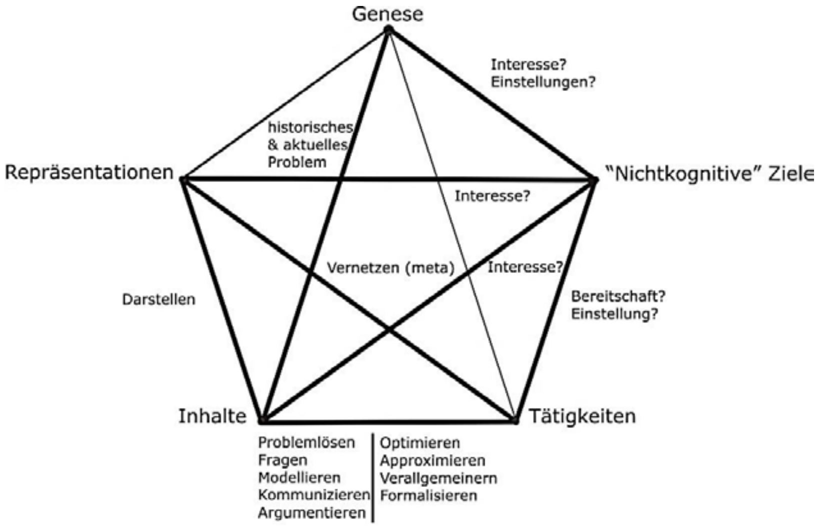


Abb. 17: Vernetzungen im Unterricht durch die Behandlung des Crap-Spiels und seiner Erweiterung zum Optimierungsproblem

4. Zusammenfassung und Fazit

Ausgehend von einer kritischen Darstellung exemplarischer Forschungspositionen zur Theorie Fundamentaler Ideen, wurde zunächst auf bestehende Auslassungen im Begriffsverständnis hingewiesen, die durch die ursprünglich rein an der Mathematik orientierten aber ohne umfassenderen Unterrichtsbezug gedachten Ideenkataloge zu erklären sind. Diese Lücken bestehen vor allem im Ausblenden von „Nichtkognitiven“ Ideen. Durch eine stärkere Strukturierung Fundamentaler Ideen auf zwei Ebenen wurde der Begriff zunächst weiter gefasst, um neben den bisher als fundamental angesehenen Inhalts- und Tätigkeitsideen auch Theorie-, Begriffs-, Prozess- und „Nichtkognitive“ Ideen zu fassen.

Die so entstandene Theorie ist allerdings für den unterrichtlichen Einsatz zu komplex. Daher wurde sie mittels unterrichtspragmatischer Reduktion auf obigen Vernetzungspentagraphen überführt. Dessen Nutzung konnte beispielhaft an vier Optimierungsaufgaben demonstriert werden. Alle vier Beispiele belegen, wie Optimierungskontexte in bestehende Unterrichtsinhalte integriert werden können und diese über inhaltliche Aspekte hinaus bereichern, insbesondere Gebiete der Mathematik vernetzen helfen.

Abschließend bleibt zu betonen, dass der vorgestellte Vernetzungspentagraph keine Aussage über einen möglichen Unterrichtsgang macht. Er soll auch nicht als Checkliste dienen, in der alle möglichen Vernetzungen bei der Behandlung einer Aufgabe abgehakt werden können. Die dargestellten Vernetzungen sollen als Anregung verstanden sein, individuell über Potenziale von Aufgaben nachzudenken. Dabei kann der Vernetzungspentagraph helfen, Unterrichtsinhalte zu analysieren und so einen Beitrag leisten, im Unterricht Aspekte, die für Mathematik ganz wesentlich sind, nicht auszublenden.

Danksagung

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Lutz Führer und Anselm Lambert für ihre kritischen und konstruktiven Anregungen und Kommentare bei der Entstehung dieser Arbeit.

Literatur

Bender, P., Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie. Wien.

Bruner, J. (1960). The Process of Education. Cambridge Massachusetts.

Bruner, J. (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin.

Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. BIFIE (2012). Kompetenzen und Modelle. https://www.bifie.at/node/49 Abruf vom 07.01.13.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2004). Lehrplan Mathematik für die AHS Oberstufe. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf Abruf v. 07.01.12.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2011). Die kompetenzorientierte Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22076/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf Abruf vom 07.01.13.

Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. BzgA (2012). Online Poker. Wie hoch ist die Gefahr einer Sucht? http://www.spielen-mit-verantwortung.de/gluecksspiele/uebersicht/online-poker/index.php?overview=46 Abruf vom 05.12.12.

Clay Mathematics Institute, Cambridge, Massachusetts (Hg.) (2006). The Millennium Prize Problems. http://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf Abruf vom 20.10.12.

Fischer, R. (1976). Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8, S. 185-192.

Fischer, R., Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim.

Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport. BBS (Hg.) (2007). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan achtstufiges Gymnasium Sekundarstufe I. http://www.hamburg.de/contentblob/2536224/data/mathematik-gy8-sek-i.pdf Abruf vom 20.10.2012.

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts. Göttingen.

Führer, L. (2005). Kleine Revue sozialer Aspekte der Schulgeometrie. In: Der Mathematikunterricht 2/3, S. 70-85.

Führer, L. (2009). Was könnte zeitgemäßer Mathematikunterricht zur naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung beitragen? In: Ludwig, M., Oldenburg, R., Roth, J. (Hg.). Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. Hildesheim, S. 11-52.

Heymann, H.-W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. In: Educational Studies in Mathematics 6, S. 187-205.

Heitele, D. (1976). Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. Dortmund.

Hischer, H. (1998). Fundamentale Ideen und Historische Verankerung dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: mathematica didactica 21, S. 3-21.

Hischer, H. (1994). Neue Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen – Erörterung zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 23. bis 26. September in Wolfenbüttel. Hildesheim, S. 92-97.

Hischer, H. (2012). Grundbegriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Wiesbaden.

Hischer, H., Lambert, A. (Hg.) (2007). Virtuelles Praktikum Taschencomputer. http://hischer.de/uds/lehr/vum/TC/Voyage/Arbeiten/Einsatz/Crap/Crap1.html Abruf vom 20.10.12.

Knöß, P. (1989). Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Kultusministerkonferenz. KMK (2003). Beschluss über die Bildungsstandards für den Mittleren Bildungsabschluss vom 4.12.2003. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2004). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2012). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf Abruf vom 26.10.12.

Kuntze, S., Kurz-Milcke, E. (2011). Professionelles Wissen von Lehrkräften zu mathematikbezogenen „großen Ideen“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 507- 510.

Lambacher Schweizer (2004): Klasse 5, Klett-Verlag, 2. Auflage. Stuttgart.

Lambert, A. (2003). Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 27. bis 29. September in Soest. Hildesheim, S. 91-104.

Lambert, A. (2004). Bildung und Standards im Mathematikunterricht – oder: Was schon beim alten Lietzmann steht. In: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Neue Medien und Bildungsstandards. Bericht über die 22. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 17. bis 19. September in Soest. Hildesheim, S. 70-80.

Lambert, A. (2012a). Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-) Unterricht. Eingangsstatements zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes. http://www.uni-saar-and.de/fileadmin/user_upload/Einrichtungen/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_f%C3%BCr_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf Abruf vom 06.11.12.

Lambert, A. (2012b). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Vernetzung und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Bericht über die 28. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie“ vom 9.-11. September in Marktbreit. Hildesheim, S. 5-32.

Lehmann, E. (2005). Das Crap-Spiel. Lineare Algebra – Stochastik – Analysis. Kurzvortrag auf dem Bundeskongress MNU in Kiel. http://home.snafu.de/mirza/MNU-Kiel-2005-Vortrag-kurz.pdf Abruf v. 20.10.12.

Lietzmann, W. (1925). Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in Preußen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 56, S. 193-207.

Lutz-Westphal, B. (2005). Wie komme ich optimal zum Ziel? Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen. In: mathematik lehren 129, S. 56-61.

Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation. http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf Abruf vom 26.10.12.

Ministerium für Bildung und Kultur. MBK (2012). Lehrplan Mathematik. Gymnasium Klassenstufe 5. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ma_Gym_5_Juni_2012.pdf Abruf vom 20.01.13

Ministerium für Kultur, Bildung und Wissenschaft Saarland. MKBW (Hg.) (2003). Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 5. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/MA_5_2011.pdf Abruf vom 26.10.12.

Näher, H. (2006). Existenz isoperimetrischer Gebiete in einer Klasse von unbeschränkten Mengen unter besonderer Berücksichtigung des Paraboloids. Dissertation http://scidok.sulb.uni-saarland.de/volltexte/2011/3522/pdf/Naeher_Holger.pdf Abruf vom 07.01.13.

Schmidt, S. (1976). Lernziele des affektiven Bereichs im Mathematikunterricht. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 11, S. 548-568.

Schreiber, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 2(3), 165-171.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 6, S. 65-76.

Schupp, H. (1992). Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Mannheim (u. a.).

Schupp, H. (1997). Optimieren ist fundamental. In: mathematik lehren 81, S. 4-10.

Schupp, H. (2003). Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim.

Schweiger, F. (1982). Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 103-111.

Schweiger, F. (1988). Mathematik als Wissenschaft „interessanter Objekte". In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 295-298.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13(2/3), S. 199-214.

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In: Maasz, J., Schoeglmann, W. (Hg.). New Mathematical Research and Practice, S. 63-73.

Schweiger, F. (2010). Fundamentale Ideen. Aachen.

Schubert, S., Schwill, A. (2004). Didaktik der Informatik. München.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. http://www.wipsce.org/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf Abruf: 01.01.13.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin. SBJS (Hg.) (2006). Rahmenlehrpläne für die Sekundarstufe I. Mathematik. http://www.berlin.de/imperia/md/content/sen-bidung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf? start&ts=1150101857&file=sek1_mathematik.pdf Abruf vom 20.10.2012.

Steen, L. A. (1990). Patterm. In: Steen, L. A. (Hg.). On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy, S. 1-10.

Titze, U.-P. (1979). Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie – Aspekte der Curriculumsentwicklung im Mathematikunterricht der SII. In: mathematica didactica 2, S. 137-164.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.-H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1, Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig.

Vohns, A. (2000). Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I, vorgelegt dem Staatlichen Prüfungsamt Dortmund. Siegen (unveröffentlicht).

Vohns, A. (2007). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Norderstedt.

von Sallwück, E. (1899). Adolf Diesterweg. Dastellung seines Lebens und seiner Lehre und Auswahl aus seinen Schriften. 1. Bd. Langensalza.

Vollrath, H. J. (1978). Rettet die Ideen! In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 31, S. 449-455.

Vollrath, H. J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg.

Whitehead, A. N. (1913). Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts. Deutsche Übersetzung von Alexander Wittenberg. In : Neue Sammlung (2) 1962, S. 257-266.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der GDM 61. http://www-math.uni-paderborn.de/~martine/Veranstaltungen/WS0607/muundallgemeinbildung.pdf Abruf vom 05.11.12.

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematiunterrichts. 6., neu bearb. Auflage. Braunschweig (u. a.).

Wolny, D. (2008). Glück oder Strategie? Die Entwicklung von Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Spiels „Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!“. In: mathematik lehren 43, S. 44-46.

Problemlösen als ein Weg zur geometrischen Begriffsbildung – am Beispiel von Flächeninhalt und Umfang

Ana Kuzle

Zusammenfassung. Problemlösen ist nicht nur eine gute Methode, um bei Schülern und Schülerinnen Kreativität zu fördern und die Verbindung mathematischer Ideen mit der Entwicklung flexiblen Denkens zu unterstützen, sondern auch eine effektive Methode der Erkenntnisbildung. Wenn Schülerinnen und Schüler neue mathematische Kenntnisse für sich selbst konstruieren, lernen sie neue Begriffe und Fähigkeiten zu erwerben und anzuwenden. Durch spezifische Beispiele werden neue Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht dargestellt.

Lehren durch Problemlösen

Unterricht durch Problemlösen ist ein Lehransatz, bei dem Lehrer das Problemlosen als primäres Mittel zur Begriffsbildung verwenden und Schülern und Schülerinnen helfen, ihre mathematischen Kenntnisse zu vertiefen und zu verknüpfen. Im Laufe der Geschichte haben sich verschiedene Rollen des Problemlösens im Mathematikunterricht herauskristallisiert. Zum Beispiel fassten Stanic und Kilpatrick (1988) die traditionellen Ansichten zum Problemlösen durch die Beschreibung dreier Perspektiven zusammen:

a) Problemlösen als Kontext,
b) Problemlösen als Fähigkeit,
c) Problemlösen als Kunst.

Problemlösen als Kontext bezieht sich auf eine Perspektive, in der Problemlösen ein Mittel zum Zweck ist. Das Ende – oder Ziel – des Problemlösens unterscheidet sich je nach Lernziel: Rechtfertigung, Motivation, Erholung, Werkzeug (um neue mathematische Inhalte zu lehren) und Praxis. Die Auffassung von Problemlösen als Fähigkeit beinhaltet Problemlösen „as a valuable curriculum end deserving special attention, rather than as simply a means to achieve other ends or an inevitable outcome of the study of mathematics“ (Stanic/Kilpatrick, 1988, S. 15). Problemlösen als Kunst sehen diese Autoren am stärksten im Einklang mit Pólyas Begriff des Problemlösens. In dieser Ansicht beinhaltet Problemlösen Kreativität, logisches Denken und die Entwicklung mathematischer Einsichten.

Schroeder und Lester (1989) machen ähnliche Unterscheidungen zu denen von Stanic und Kilpatrick, aber die möglichen Rollen des Problemlösens werden von ihnen etwas anders beschrieben. Sie heben drei Wege zum Problemlösen im Mathematikunterricht hervor:

a) Lehre über Problemlösen (teaching about problem solving),
b) Lehre für Problemlösen (teaching for problem solving),
c) Lehre durch Problemlösen (teaching via problem solving).

Schroeder und Lester argumentieren, dass obwohl die drei Ansätze sich nicht gegenseitig ausschließen, ein Schwerpunkt auf Lehre durch Problemlösen am stärksten im Einklang mit dem Ziel der Förderung konzeptionellen Verständnisses in der Mathematik steht. Beim Lehren über Problemlösen und Lehren für Problemlösen riskiert der Lehrer, dass das Problemlösen zum zentralen Lernziel des Unterrichts wird, anstatt mathematisches Verständnis zu fördern. Eine weitere Gefahr des Unterrichts durch ausschließliches Problemlösen besteht darin, dass die Schüler und Schülerinnen Problemlösen gegebenenfalls als isolierte Fertigkeit sehen.

Es ist davon auszugehen, dass Problemlösen und mathematisches Verständnis im Kern verbunden sind. Bei der Erforschung neuer Problemstellungen haben Schüler und Schülerinnen die Möglichkeit „Neuland zu betreten“ und neue Begriffe selbst zu entdecken und zu konstruieren, Eigenschaften und Beziehungen zu sehen und mit Begriffen arbeiten zu können. Ähnlich schrieb Vollrath (1987), dass Schüler aus dem Bilden, Erforschen und Benutzen von Begriffen parallel ein Verständnis für Mathematik und das Erlernen mathematischer Begriffe entwickeln. Hier sehe ich auch die Möglichkeit Begriffsbildungsprozesse in Problemlöseprozesse einzubinden und Aufgaben für die geometrische Begriffsbildung zu nutzen. Wie kann man also Aufgaben so stellen und Lernsituationen so gestalten, dass Begriffsbildung initiiert und unterstützt wird? Wie geeignet ist dieser Lehransatz für den Mathematikunterricht?

Durch Problemlösen lehren, Geometrie in der Grundschule und Sekundarstufe I lernen: Beispiele

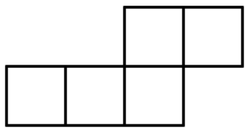
Die Forschung zur Bedeutung Problem-basierender Curricula weist darauf hin, dass ein Schwerpunkt auf das Problemlösen den Lernerfolg verbessert. Problem-basierende Curricula heben gewöhnlich Gruppenarbeit, verschiedene Lösungswege, durch Schüler und Schülerinnen geführte Begründungen, vielseitige mathematische Darstellungen, komplexe Probleme und Anwendungen hervor. In vielen Fällen sind diese Curricula dahingehend speziell Problem-basierend, so dass mathematische Begriffe anhand von Problemen präsentiert werden. Ein solches Curriculum, das „*Connected Mathematics Project*“ (Lappan; Fey; Fitzgerald; Friel; Phillips, 1991-1997, 2002, 2006), ist explizit „Problem-zentriert“, indem jede Lektion aus drei Teilen besteht: *„launching the problem“*, *„exploring the problem“* und *„summarizing the problem“* (Riordan/Noyce, 2001, S. 374).

Im Folgenden zeige ich zwei Beispiele aus dem *„Middle School Mathematics Project“* (MSMP) (Shroyer/Fitzgerald, 1986) als auch drei Beispiele aus dem eigenen Unterricht auf, in dem selbständige Begriffsbildungen der Schüler als schöpferische Leistung vielversprechend erscheinen.

Das folgende Beispiel (Abb. 1) bietet den Schülern und Schülerinnen sinnvolle Möglichkeiten, um die Begriffe des Umfangs und des Flächeninhalts selbst zu konstruieren.

Beispiel 1. Das Sitzplan-Problem

Den Schülern und Schülerinnen werden 24 quadratische Fliesen gegeben (jeweils ein Zoll groß). Die Schülerinnen und Schüler werden mit folgendem Problem herausgefordert:



Bestimme die Anzahl kleiner Tische, die benötigt werden, um Banketttische unterschiedlicher Größe und Personenanzahl zu konfigurieren.

Abb. 1: Begriffsbildung am Beispiel des Umfangs und Flächeninhalts von MSMP

Die Lösung des gestellten Problems erfordert es zunächst, eine Darstellung der Situation zu erstellen. Diese Darstellung repräsentiert eine allgemeine Bankettisch-Konfiguration. In der Aufgabenstellung wird zunächst nicht explizit dazu aufgefordert, den Flächeninhalt und den Umfang irgendeiner Darstellung zu berechnen. Es wird lediglich gesagt, dass die Anzahl kleiner Tische bestimmt werden soll, so dass Banketttische unterschiedlicher Größe und Personenanzahl konfiguriert werden können. Dieses „unterschiedlicher Größe“ legt den Fokus automatisch auf das Innere der Konfiguration und schafft somit die Verbindung „Flächeninhalt bezieht sich auf das Innere der Figur“ (konzeptioneller Aspekt). Ähnlich dazu richtet eine „unterschiedliche Personenanzahl“ den Fokus automatisch auf das Äußere der Bankett-tisch-Konfiguration und schafft somit die Verbindung „Umfang bezieht sich auf das Äußere der Figur“.

Darüber hinaus lernen die Schülerinnen und Schüler die Beziehung zwischen dem Umfang und dem Flächeninhalt. An dem Beispiel können sie erkennen, dass mit der gleichen Anzahl Quadrate Tische unterschiedlichen Umfangs gebildet werden können, d.h. dass zwei Figuren mit demselben Flächeninhalt unterschiedliche Umfänge haben können. Beim Bearbeiten der Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Umfang die Anzahl der Einheiten oder die „Entfernung um eine Figur herum“ ist und der Flächeninhalt die Anzahl der Einheiten, aus denen eine Figur besteht. Anders gesagt wurde die Entwicklung des konzeptuellen Verständnisses des Begriffs gefördert, bevor die Ermittlung des prozeduralen Aspekts des Begriffs durch Formeln erfolgt. Dieser Aspekt ist insofern wichtig, als dass Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren von Schülern leicht verwechselt werden.

Zusammengefasst bildet die Situation „Aufbau eines Bankettisches mitsamt der Sitzgelegenheiten um den Tisch herum“ einen Rahmen, in dem Schüler und Schülerinnen die Begriffe Flächeninhalt und Umfang sowie die Beziehungen zwischen ihnen erforschen und entwickeln können. Darüber hinaus werden zunächst keine Formeln verwendet oder entwickelt; diese werden durch nachfolgende mathematische Tätigkeiten behandelt:

1. Verwende Deine Fliesen, um unterschiedliche Sitzanordnungen zu erstellen, z.B. so dass 20 Personen einen Platz haben.
2. Füge Fliesen (Quadrate) an die folgenden Konfigurationen an, so dass der Umfang 18 beträgt. Wie groß ist die neue Fläche?

Das heißt, durch eine Problemsituation konstruieren die Schülerinnen und Schüler selbst die beiden Begriffe, bevor sie formell vom Lehrer eingeführt werden. Auf diese Weise wird die konzeptionelle Ebene des Begriffs entwickelt, bevor eine verfahrensmäßige Ebene entdeckt wird. Da das Lernen von Begriffen viel mehr ist als eine Wahrnehmung davon, kann anhand von Problemsituationen ein tieferes Verständnis der diskutierten Begriffe entwickelt und gefördert werden. Das folgende Beispiel (Abb. 2) von Shroyer/Fitzgerald (1986) zeigt, wie die beiden Maßbegriffe Flächeninhalt und Umfang weiter entwickelt werden können.

Beispiel 2. Vertiefung des Verständnisses zweier Maßbegriffe

Umreiße auf Millimeterpapier alle möglichen Formen, die eine Fläche von 14 cm² und einen Umfang von 24 cm aufweisen. Die Formen müssen in einer Weise gezeichnet werden, dass mindestens eine Seite jedes Quadrats eine Kante mit einem anderen Quadrat teilt.

Abb. 2: Vertiefung des Umfang- und Flächeninhaltbegriffs aus MSMP

Es wird bei dieser Aufgabe davon ausgegangen, dass die Schülerinnen und Schüler bereits ein grundlegendes Verständnis der Begriffe Flächeninhalt und Umfang für rechteckige Formen haben. Der Lösungsprozess erfordert, dass sie Entscheidungen treffen. Dazu zählt, wie man in einer systematischen Weise Formen behält, die schon erstellt wurden, so dass am Ende alle Möglichkeiten gefunden und keine Formen dupliziert werden. Derartige Entscheidungen und Fähigkeiten sind wichtig, um effizientes Problemlösen zu lernen. Darüber hinaus werden die Schülerinnen und Schüler durch Modifikation der Formen auf die Beziehung zwischen Umfang und Fläche aufmerksam gemacht. In beiden Beispielen (Abb. 1 und Abb. 2) konstruieren sie selbst Mathematik, wobei ihre Sachstruktur und die kognitive Struktur berücksichtig sind. Damit wird nicht nur die Absicht verfolgt, den Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit zu geben, ihr Wissen über diese beiden Begriffe anzuwenden und neue Problemlösefähigkeiten zu erwerben, sondern auch ihr Verständnis der Beziehung zwischen den beiden Maßbegriffen zu verbessern.

Beispiel 3. Aufteilung eines Landes

Angenommen ein Mann hat ein dreieckig geformtes Stück Land in einer weit entfernten Gegend gekauft. Er will dieses Land zwischen seinen drei Töchtern aufteilen, so dass jede Tochter gleich viel abbekommt. Er erinnert sich jedoch nicht mehr an die genauen Abmessungen des Landes und so sucht er nun eine Methode zur Teilung des Landes, die auf alle dreieckigen Bereiche angewandt werden kann.

Abb.3: Problem „Aufteilung eines Landes“

Das Problem verbindet verschiedene Themen des Geometrieunterrichts (z.B. Flächeninhalt eines Dreiecks, Seitenhalbierende, Kongruenz) mit einer bestimmten Strategie, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglichen kann, ein besseres Verständnis geometrischer Sachverhalte und einen Sinn für den Nutzen der Geometrie zu entwickeln. Diese Aufgabe kann mit unterschiedlichen Methoden gelöst werden. Im Folgenden sind drei mögliche Problemlösungswege dargestellt.

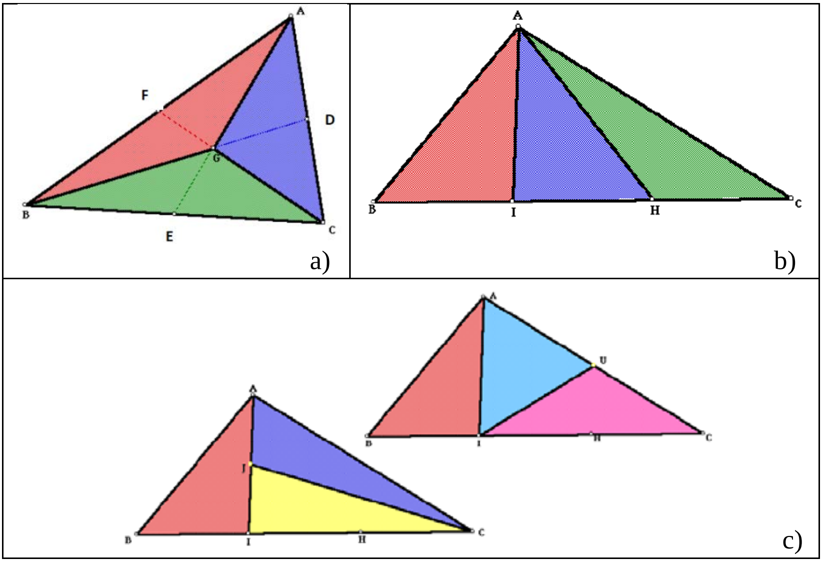


Abb.4: Mögliche Lösungswege der Aufgabe „Aufteilung eines Landes“

Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe können die Schülerinnen und Schüler sowohl ein besseres Verständnis für den Umfang und den Flächeninhalt allgemeiner Dreiecke entwickeln als auch den Begriff der Seitenhalbierenden lernen. Die Lösung des gestellten Problems der Landdrittelung erfordert es zunächst, eine Planfigur zu erstellen. Diese Planfigur repräsentiert ein allgemeines Dreieck. In der Aufgabenstellung wird zunächst nicht explizit dazu aufgefordert, den Flächeninhalt irgendeines (Teil-)Dreiecks zu berechnen, sondern lediglich gesagt, dass ein Stück Land, d.h. ein Flächenstück, „gerecht aufgeteilt werden soll“. Dies legt den Fokus automatisch auf das Innere der Planfigur, d.h. des Dreiecks und schafft somit die Verbindung „Flächeninhalt bezieht sich auf das Innere des Dreiecks“ (konzeptioneller Aspekt). Dieser Aspekt ist insofern wichtig, als dass Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren von Schülern leicht verwechselt werden, da Rechtecke, Dreiecke, zumeist nur als Linienfiguren, wie auch hier bei der Planfigur, nicht aber als Flächenfiguren (etwa durch Schraffierung der Fläche) dargestellt werden. Des Weiteren erfordert die Lösung des Problems die Zerlegung des Ausgangsdreiecks in Teildreiecke, bei denen immer auch ein stumpfwinkliges Dreieck entsteht. Um begründen zu können, dass die einzelnen Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt haben, muss erkannt bzw. begründet werden, dass in stumpfwinkligen Dreiecken die Höhe außerhalb des Dreiecks liegt. Das Problem umfasst also auch diesen „schwierigen Spezialfall“ bei der Flächeninhaltsberechnung allgemeiner Dreiecke. Darüber hinaus beruht die Lösung des Problems darauf, dass Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe, egal ob spitz- oder stumpfwinklig, immer den gleichen Flächeninhalt haben, wodurch die Flächeninhaltsformel „1/2 x Grundseite x Höhe“ gefestigt und vertieft wird. Das formale Hantieren mit Formeln und benannten Zahlen tritt hier vor dem inhaltlichen Aufbau der Größen von Flächen zurück. Anderseits ist für die zweite Variante der Begriff einer Seitenhalbierenden nicht unbedingt wichtig, um das Problem lösen zu können. Aber es ist notwendig, die Fläche eines Dreiecks und Grundgedanken der Kongruenz zu beherrschen. Das Problem kann darüber hinaus dazu verwendet werden, die Seitenhalbierenden im Dreieck entdecken zu lassen.

Abschließend sei ein weiteres Beispiel (siehe Abb. 5) aufgezeigt, an dem der Begriff des Flächeninhalts in einem langfristigen Lernprozess angemessen erworben werden kann. Der Satz von Pick stellt eine Beziehung zwischen der Fläche eines Gittervielecks und den Anzahlen der Gitterpunkte innerhalb des Polygons und auf dem Rand her.

Beispiel 4. Satz von Pick

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Polygons.

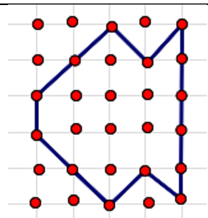


Abb. 5: Satz von Pick

Die Schülerinnen und Schüler werden hierbei mit einer Situation konfrontiert, in welcher der Gültigkeitsbereich bekannter Verfahren ausgeweitet werden muss, um Aufgaben lösen zu können; hier ist also Synthese von entscheidender Bedeutung. Dadurch erlernen die Schülerinnen und Schüler die fundamentalen Eigenschaften von einfachen Gitterpolygonen. Darüber hinaus bietet diese Problemlösesituation Möglichkeiten, um ein besseres Verständnis für den Umfang und den Flächeninhalt ebener Figuren zu entwickeln und Geometrie mit Algebra zu verknüpfen.

Beispiel 5. Tangram

Abb.6: Mit Tangram geometrische Begriffe erkunden und vertiefen

Tangram ist ein altes, chinesisches Legespiel, das aus je zwei großen und kleinen Dreiecken, einem Parallelogramm, einem Quadrat sowie einem mittlerem Dreieck besteht. Mit diesen Teilen kann eine reichhaltige geometrische Formenvielfalt gelegt werden. Mit dem Tangram konnten verschiedene Problemsituationen erstellt werden, wie z.B. „Kombiniere die sieben Teile, so dass ein Quadrat entsteht", „Versuche mit dem Tangram die Ziffern 1-9 nachzulegen. Mit dem Tangram lassen sich die oben dargestellten Ziffern legen. Gibt es mehrere Möglichkeiten?" Durch diese Problemsituationen erkennen Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge geometrischer Figuren und Eigenschaften (Quadrat, Rechteck, Dreieck, Parallelogramm, Symmetrie) und können Grundvorstellungen zum Flächenbegriff aufbauen.

Schlussbemerkungen

Einige Studien haben Vorteile des Problem-basierenden Lehransatzes aufgezeigt. Hierzu gehören ein hoher Lernerfolg, besseres Abschneiden in standardisierten Leistungstests, aber auch eine bei Lernenden erzeugte positive Sicht auf die Mathematik, das Verständnis ihrer Nützlichkeit und das Erlernen mathematischer Begriffe (siehe z.B. Riordan/Noyce 2001; Schoenfeld 2002; Thompson/Senk, 2001).

Mathematische Begriffe sollten im Rahmen des Problemlösens erlernt werden (NCTM, 1989, 2000), wobei die Begriffe dann verschiedene Rollen in den verschiedenen Phasen eines Problemlöseprozesses spielen können:

(1) Problemklärung durch Begriffe,
(2) Aktivierung des Wissens über Begriffe,
(3) Knüpfen von Beziehungen mit Hilfe von Begriffen,
(4) Umstrukturieren mit Hilfe von Begriffen,
(5) Begriffe als Träger von Lösungsideen, usw. (Vollrath, 1986).

Dabei ist es sehr wichtig sinnstiftende Situationen zu schaffen, wobei eine Situation:

- für die Schülerinnen und Schüler relevant sein muss,
- die Erzeugung der jeweiligen mathematischen Begriffe möglich machen muss,
- den Lernenden Möglichkeiten bieten muss, inhaltliche Vorstellungen aufzubauen,
- reichhaltig und nicht künstlich reduziert sein muss,
- nicht notwendigerweise realitätsorientiert sein muss (Hußmann 2009, S. 67).

Lehrer, Schulbücher und Lehrplanentwickler sollten das Verständnis zum Schwerpunkt und Ziel des Mathematikunterrichts machen. Darüber hinaus ist es entscheidend eine Verschiebung zu erreichen von der engen Sichtweise auf die Mathematik als Werkzeug zur Lösung von Problemen hin zu einer breiteren Vorstellung, dass Mathematik eine Art zu denken und eine Art zum Organisieren der eigenen Erfahrungen ist (Schroeder/Lester 1989). Schoen (2003) beschrieb diesen Lehransatz wie folgt:

> *As students attempt to solve rich problem tasks, they come to understand the mathematical concepts and methods involved, become more adept at mathematical problem solving, and develop mathematical habits of mind that are useful ways to think about any mathematical situation.* (S. xi)

In dieser Beschreibung werden sowohl mathematisches Verständnis als auch eine erhöhte Problemlösungsfähigkeit als Ergebnisse gewünscht. Die Schüler und Schülerinnen erwerben durch die selbst-konstruierten mathematischen Kenntnisse neue Begriffe und Fähigkeiten und wenden diese an. Die Fähigkeit Probleme zu lösen ist nicht einfach nur eine Fertigkeit, wie z.B. den kgV oder ggT zu berechnen, sondern enthält kreatives Handeln, Intuition und andere Gewohnheiten des Geistes (Cuoco/Goldenberg/Mark, 1996), bei denen die gewonnenen Einsichten über Begriffsbildung umgesetzt und durch Erfahrung vertieft werden können (Vollrath, 1987).

Literatur

Cuoco, A.; Goldenberg, E. P.; Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for a mathematics curriculum. In: Journal of Mathematical Behavior 15 (4), Berlin: Elsevier, S. 375-402.

Hußmann, S. (2009). Mathematik selbst erfinden. In: Hefendehl-Hebeker, Leuders; Weigand (Hrsg.). Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen.

Lappan, G.; Fey, J. T.; Fitzgerald, W. M.; Freil, S. N.; Phillips, E. D. (1991–1997). Connected mathematics. White Plains, NY: Seymour.

Lappan, G.; Fey, J. T.; Fitzgerald, W.; Friel, S. N.; Phillips, E. D. (2002). Connected Mathematics. Glenview, IL: Prentice Hall.

Lappan, G.; Fey, J. T.; Fitzgerald, W.; Friel, S. N.; Phillips, E. D. (2006). Connected Mathematics 2. Boston, MA: Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Riordan, J. E.; Noyce, P. E. (2001). The impact of two standards-based mathematics curricula on student achievement in Massachusetts. In: Journal for Research in Mathematics Education 32, Reston, VA: NCTM, S. 368-398.

Schoen, H. L. (Hrsg.). (2003). Teaching mathematics through problem solving: Grades 6–12. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. In: Educational Researcher 31, Thousand Oaks, CA: Sage, S. 3-25.

Schroeder, T. L.; Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In: Trafton; Shulte (Hrsg.). New directions for elementary school mathematics. Reston, VA.

Schroyer, J.; Fitzgerald, W. (1986). Mouse and Elephant: Measuring Growth. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Stanic, G. M.; Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: R. I. Charles & E. A. Silver (Hrsg.). The teaching and assessing of mathematical problem solving. Reston, VA.

Thompson, D. R.; Senk, S. L. (2001). The effects of curriculum on achievement in second year algebra: The example of the University of Chicago School Mathematics Project. In: Journal for Research in Mathematics Education 32, Reston, VA: NCTM, S. 58-84.

Vollrath, H.-J. (1986). Zur Beziehung zwischen Begriff und Problem in der Mathematik. In: Journal für Mathematik-Didaktik 7, Berlin: Springer, S. 243-268.

Vollrath, H.-J. (1987). Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 19(3), Berlin: Springer, S. 123-127.

Begriffsbildung, Stationenlernen oder die Zone der nächsten Stationen

Ysette Weiss-Pidstrygach

Zusammenfassung. Welche bildliche Vorstellung ruft das Wort Begriffsbildung bei Ihnen hervor? Entsteht jetzt ein baumartiges Gebilde, eine Pyramide oder ein Stadtplan mit vielen Verbindungsstraßen oder ein langer Weg mit vielen Hinweisschildern ... oder reift gerade vor Ihrem inneren Auge eine saftige Frucht mit nussartigem hartem Kern? Anhand einiger Beispiele wird gezeigt, wie Metapher, Anordnung und Positionierung die Entwicklung mathematischer Begriffe bei Lehramtsstudenten unterstützen können.

Einleitung

Die Vergrößerung der Anzahl fachdidaktischer Veranstaltungen im universitären gymnasialen Mathematiklehramtsstudium hat auch den Anteil an Methodik in diesen fachdidaktischen Veranstaltungen stark vergrößert.

Schulpraxisnahe Zeitschriften und Handbücher zur Mathematikmethodik geben viele Beispiele zur Umsetzung allgemeinpädagogischer Verfahrensweisen im Mathematikunterricht. Einige der Methoden finden auch in mathematikdidaktischen Veranstaltungen ihre Anwendung. Da sich die meisten Techniken am Schulalltag orientieren, erfolgen Anwendungen und Übertragungen in universitäre Routinen vor allem in Veranstaltungen mit Klassengröße, wie Seminaren oder Übungen. Beispiele solcher nun auch hochschuldidaktischer pädagogischer Methoden sind Gruppenarbeit, Lerntagebücher und Stationenlernen (auch als Stationenzirkel, Lernzirkel, Lernwerkstatt, Lerntheke bezeichnet). Auffallend dabei ist, dass die Übertragung vorwiegend durch einen bedingten Rollentausch und das darauf folgende Spielen mehrerer Rollen erfolgt:

- Der ein Seminar leitende Studierende[1] organisiert in der Rolle des Lehrers eine Stationenarbeit für die anderen sich in der Rolle von Schülern befindenden Studenten. Gleichzeitig möchte er die Methode Stationenlernen am Beispiel vermitteln und wird bei der Gestaltung des Inhalts vom Dozenten angeleitet.

---

[1] In diesem Text wird der Einfachheit halber nur die männliche Form verwendet. Die weibliche Form ist selbstverständlich immer mit eingeschlossen.

- Der in der Rolle des Lehrers agierende Dozent nutzt Lerntagebücher oder Portfolios zur Diagnostik und zum reflektierten Umgang mit Motivation, Heuristiken und kognitiven Konflikten. Gleichzeitig möchte er das Führen von Lerntagebüchern lehren.

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Anwendung der Methode Stationenlernen in fachdidaktischen Veranstaltungen. Die Vorgehensweise kann gleichwohl auf andere Methoden übertragen werden. Im ersten Teil diskutieren wir die Verwendung der Stationenarbeit als Lehrmethode in einem mathematischen Fachdidaktikseminar zu ausgewählten Inhalten der Sekundarstufe II. Wir nehmen an, dass dieses Seminar wie oft üblich von einem oder mehreren Studierenden geleitet und durch Dozenten begleitet wird. Im zweiten Teil nutzen wir den Zusammenhang: Sammeln → Ordnen → Strukturieren → Positionieren → Stationenlernen für die Gestaltung von fachdidaktischen Vorlesungen und Übungen zum Thema Begriffsbildung im Geometrieunterricht.

Begriffsbildung und Stationenlernen im Fachdidaktikseminar

Ausgangssituation

Bei der Anwendung von pädagogischen Methoden des Lehrens und Lernens in fachdidaktischen Veranstaltungen sind gleichzeitig (mindestens) vier sich bedingende und beeinflussende Sichtweisen und daraus resultierende Zielstellungen beteiligt:

- der lehrenden und lernenden Fachdidaktiker,
- der lernenden und zukünftig lehrenden Studierenden,
- der lehrenden und lernenden Lehrer (indirekt durch Schulerfahrung),
- der lernenden Schüler (indirekt durch Schulerfahrung).

Wahrnehmung, Interpretation und Verwendung der pädagogischen Methode Stationenlernen unterscheiden sich aus den vier Perspektiven. Dies ist auch in den unterschiedlichen Sichtweisen auf die Inhalte der Seminare und deren konzeptuelles Verständnis begründet.

Für die Diskussion der Verwendung der Methode Stationenlernen bei einem konkreten Inhalt lohnt es sich, diese Sichtweisen einzubeziehen. Die Unterschiede werden auf verschiedenen Entwicklungsebenen von Tätigkeiten, die

Bezug zur Methode Stationenarbeit haben, sichtbar: in Motiven, Zielstellungen von Handlungen und in Operationalisierungen (Leontyev, 1979). Zur Illustration stellen wir Beispiele von Sicht- und Herangehensweisen vor, die unterschiedlichen Ebenen zugeordnet werden können. Ausgehend von diesen Beispielen entwickeln wir im Anschluss Zielstellungen zur Verwendung der Methode Stationenlernen in einem speziellen Seminar. Bei der konkreten Vorbereitung eines Seminars könnten die hier hypothetisch angenommenen Sichtweisen durch eine qualitative Analyse spezifiziert werden.

Wir beginnen mit einigen Sichtweisen, Interpretationen und einem üblichen Umgang bzgl. des Stationenlernens, die Einfluss auf die Motivation und Einstellung haben könnten.

Ansichten von Fachdidaktikern

In der Diskussion im AK Geometrie schien es, dass für nicht wenige Fachdidaktiker Stationenlernen eher negativ belegt war. Die Methode Stationenlernen wurde vorrangig im Grundschulbereich angesiedelt und als Aufteilung von Arbeitsaufträgen aus pragmatischen Gründen interpretiert. Leider gelang es mir aus Zeitgründen nicht, die Ursachen dafür zu klären.

Die Definition des Stationenlernens ist sehr weit gefasst. Hinweise auf reformpädagogische Ursprünge, eine Einführung in die allgemeinpädagogische Methode, sowie vielfältige weiterführende Literaturverweise findet man in Kersten Reichs Methodenpool (Reich, 2012). Zu Interpretation und Verwendung dieser Methode im Mathematikunterricht existieren zahlreiche Empfehlungen und ausgearbeitete Beispiele. In der Mathematikmethodik von Barzel, Büchter und Leuders (Barzel et al., 2007) heißt es: Bei einem Stationenzirkel bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler an mehreren Stationen Materialien, die eine vielfältige Auseinandersetzung mit einem bestimmten Thema anregen. Stationenzirkel eignen sich sowohl für Einstiege und Erarbeitung, als auch zur Übung und Festigung. Im pädagogischen Verständnis der Methode ist Interpretation der Stationen als Variationen eines Themas nicht vorausgesetzt.

Ansichten von Studierenden

Unsere Studierenden (Universität Mainz) sind in Fachdidaktikseminaren der Methode Stationenlernen gegenüber aufgeschlossen. Neben der Gruppenarbeit ist die Stationenarbeit die von studentischen Seminarleitern in Seminaren am häufigsten gewählte Lehrtechnik. Dies kann auf positive Erfahrungen aus der Schulzeit oder auch aus Veranstaltungen der Erziehungswissenschaften zurückzuführen sein. Stationenarbeit wird oft als handlungsorientiert, aktiv und zur Selbstständigkeit erziehend erinnert.

Ansichten von Lehrern

Die meisten ausgearbeiteten Lernstationen stammen aus der Unterrichtspraxis. Die Autoren dieser Lernstationen sind oft besonders engagierte, an Fortbildung, Interaktion und Entwicklung interessierte Lehrer, die sich durch die notwendige Vorbereitung der Stationen und den großen Arbeits-, Zeit- und oft auch Materialaufwand nicht abschrecken lassen. Sind die Stationen mit größeren Exponaten ausgestattet, kann dies zu Aufbewahrungsproblemen führen, aber auch Anlass zu Teamteaching und Zusammenarbeit sein. Bei der Planung von Stationen spielen oft organisatorische oder auf die Realisierung zielende Fragestellungen eine größere Rolle als konzeptuelle (z.B. wie viele Arbeitsmittel sind vorhanden, wie viel Zeit wird für die Stationen benötigt). Viele Lehrer sind wegen des hohen Zeitaufwands bei der Verwendung der Methode zurückhaltend.

Ansichten von Schülern

Schüler der Grundschule haben vorwiegend unabhängig von den Inhalten eine positive Einstellung zur Stationenarbeit – Spielen, Bewegung, Unterhaltung sind Schlüsselworte für die Lernmethode. Mit zunehmendem Alter scheint der Enthusiasmus gleichwohl abzunehmen. Kommentare wie „Man weiß nicht, was man lernt“ oder „Ringel – Ringel – Reihe“ weisen darauf hin, dass altersgemäßes Umsetzen, sowie Strukturiertheit und Ergebnissicherung auf die Bewertung zunehmenden Einfluss haben.

Die genannten möglichen Ansichten illustrieren Einflussfaktoren auf die Motivation und die Art der Verwendung der Methode Stationenlernen. Für uns sind auch die darin zum Ausdruck kommenden Einstellungen und Herangehensweisen wichtig. Letztere können durch Erfahrungen mit der Methode in neuen Handlungskontexten beeinflusst und entwickelt werden, wie z.B. durch die Anwendung im Seminar. Entwicklung verstehen wir hier als eine Entwicklung von Tätigkeiten im Verständnis von (Leontyev, 1979).

Für die Entwicklung konkreter Zielstellungen für die Anwendung und Entwicklung der Methode in einem Seminar gehen wir auf die Handlungsebene und betrachten Erfahrungen aus Seminaren für Studenten des gymnasialen

Lehramts Mathematik. Wir wählen ein Seminar zu ausgewählten Problemen des Mathematikunterrichts der Sek II, mit dem Schwerpunkt Analyse, Variation und Entwicklung von Einstiegsaufgaben zu grundlegenden Begriffen wie Reelle Zahlen, Funktion, Folge, Ableitung, Integral, Komplexe Zahlen, Skalarprodukt, Vektor, Vektorraum, Affiner Raum, Mittelwerte, Verteilungen, Wahrscheinlichkeit u.a.

Wir nehmen an, dass die einzelnen Veranstaltungen des Seminars von Studierenden geleitet werden, dass die Seminare ohne PowerPoint- oder andere Frontalpräsentationen handlungsorientiert gehalten werden sollen und der oder die Leiter eines Seminars als Methode Stationenarbeit verwenden möchten. Wir betrachten die Entwicklung der Seminarveranstaltung zum ersten Thema Reelle Zahlen. Die Gedankengänge sind auf die anderen Themen übertragbar. Die Vorbereitung beginnt mit der Themenwahl und dem selbstständigen Sammeln und Ordnen von Material durch einen oder eine Gruppe von Studenten, welche die Seminarveranstaltung leiten werden.

Handlungsorientierungen aus studentischer und Seminarleiterperspektive

Bei der Diskussion von Schulmathematik anhand von selbstentwickelten oder bereits existierenden Lehrbuchaufgaben tritt im Seminar häufig die Situation auf, dass die studentischen Teilnehmer einerseits die zur Diskussion stehenden Aufgaben aus der Schülerperspektive beurteilen sollen und andererseits aus der Position des Lehrers oder Schulbuchautors. Aus Zeitmangel oder weil die für die Lösung der Aufgaben notwendigen Fertigkeiten vorausgesetzt sind, werden die Aufgaben gleichwohl selten gründlich (schriftlich) gelöst. Damit entfallen auch Strukturierungen und Sicherungen der Ergebnisse, die auf konkreten Lösungswegen aufbauen. Die Schülerperspektive wird durch ein Gedankenexperiment ersetzt, welches sich aber oft mit einer gefühlten Machbarkeit oder einem gefühlten Interessantsein der Aufgaben beschäftigt.

Diese Herangehensweise spiegelt sich in den Stationen (oder auch bei geplanten Gruppenarbeiten) im Seminar wieder. Oft stellen die Stationen weder eine für Schüler geeignet strukturierte kleinschrittige Erarbeitung eines Begriffs der Schulmathematik, noch die Vorstellung und Begründung des Konzepts eines Aufgabenautors dar. Gründe dafür können u.a. der erfahrene Umgang mit Stationen in anderen Seminaren sein oder auch der Versuch mit den Stationen das Lehrbuch-Design zu imitieren (verschiedene Einstiegsaufgaben als Stationen).

An dieser Stelle ist es sinnvoll, Schüler-, Lehrer- und Autorenperspektive bei den Seminarleitern bewusst zu trennen. Eine Strukturierungshilfe dafür kann der folgende Arbeitsauftrag an die Seminarleiter sein: Schematisieren Sie die Struktur der Lehrbuchkapitel, aus denen Sie Einstiegsaufgaben für Ihre Stationen gewählt haben. Die Aufgabe kann durch die Vorgabe von Lehrbuchbeispielen vereinfacht werden.

Eine Diskussion der von den Seminarleitern für die Stationen ausgewählten Einstiegsaufgaben mit dem Dozenten und die gemeinsame Entwicklung möglicher Schemata ist eine andere Möglichkeit, die Seminarleiter bewusst die Perspektive der Lehrbuchautoren einnehmen zu lassen. Da die Aufgaben meistens einem Lehrbuch entnommen sind, ist ein reflektiertes Verständnis der Intensionen der Lehrbuchautoren ein erster wichtiger Schritt. Die folgenden Stationenvorlagen können sowohl eine Diagnosehilfestellung für das vorliegende Lehrbuchkonzept sein, als auch eine Strukturierungshilfe für die Erstellung eigener Stationen.

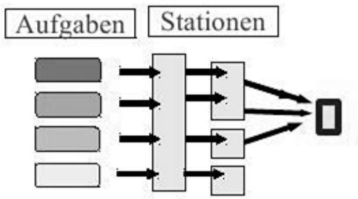


Abb. 1: Systematisierung der Aufgaben des vorherigen Kapitels

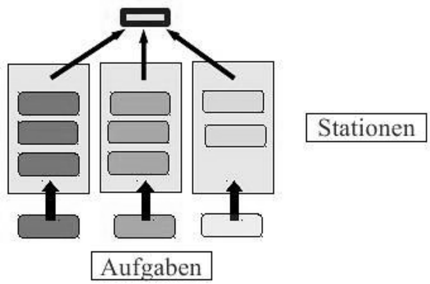


Abb. 2: Beispiel, analoge Beispiele, Systematisierung und Exaktifizierung einer Grundidee

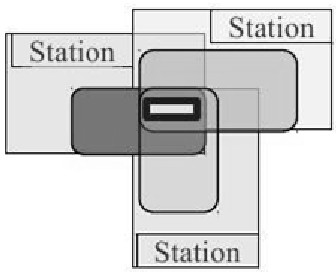


Abb. 3: Verschiedene Kontexte als Motivation des Grundbegriffes des laufenden Kapitels

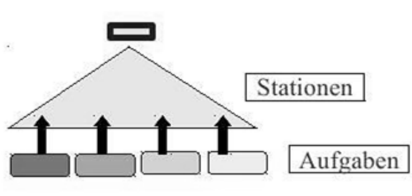


Abb. 4: Deduktive Herleitung der Idee, Anwendungsbeispiele zur Illustration und zum Üben

Handlungsorientierungen aus Dozentenperspektive

Mit der Wahl und der Anordnung der Themen des Seminars werden durch den Dozenten eine Struktur und mögliche Metakonzepte vorgegeben. Eine weitere weniger reflektierte Strukturierung könnte durch Erwartungshaltungen des betreuenden Dozenten entstehen, wenn er von einer im Rahmen des Mathematikstudiums erfolgten Begriffsbildung im Sinne der Elementarmathematik vom höheren Standpunkt ausgeht.

Problemorientierte und konzeptuelle Entwicklungen des Begriffs Reelle Zahlen erfolgten möglicherweise in:

- Analysis (Vollständigkeit, verschiedene Modelle, Stetigkeit),
- Zahlentheorie (Körper, Kettenbrüche),
- Didaktik der Algebra (Axiome, Zahlenbereichserweiterung, Mächtigkeit),
- Didaktik der Geometrie (Kommensurabilität),
- Geschichte der Mathematik (griechische Mathematik, Mathematik des 19.Jahrhunderts).

Die sehr unterschiedlichen mathematischen Erfahrungen von Dozent und Student führen sicher zu unterschiedlichen Sichtweisen und Umgang mit Mathematik. Da ein konzeptuelles Verständnis der Inhalte der Sekundarstufe II in der Regel eine langjährige intensive Beschäftigung mit Mathematik voraussetzt, ist es wesentlich, Erwartungshaltungen von Seiten des Dozenten explizit zu machen und Hilfestellungen bei der Erarbeitung konzeptuellen Hintergrundwissens zu vorgeschlagenen Einstiegen zu geben.

Fehlende mathematische Erfahrung und konzeptuelles Verständnis können sich auch in der Planung und Organisation der Stationen ausdrücken, wie z.B.:

- Stationen sind nur Komponenten eines umfangreichen Arbeitsauftrags, m.a.W.: ein Thema wird in Teilbereiche aufgeteilt, zusätzliche Strukturierungen/ Differenzierungen, die Zusammenhänge zum Thema herstellen können, werden kaum in Betracht gezogen,
- durch Lehrbücher vorgegebene Strukturen wie verschiedene handlungsorientierte Einstiegs- oder Übungsaufgaben zu einem Thema, werden unreflektiert als Stationen übernommen,
- Exaktifizierung und Formalisierung des in verschiedenen Stationen eingeführten Themas fehlen,

- die geplante Ergebnissicherung bezieht die Rückführung auf das in den Stationen differenziert und vielfältig dargestellte Thema nicht ein, Zusammenhänge zwischen Variation und Thema bleiben unreflektiert,
- vorausgesetzte Fertigkeiten und Fähigkeiten und deren Entwicklung durch die Stationenarbeit sind wenig konkret,
- begleitende Anleitung während des Seminars wird nicht ersichtlich.

Für eine Entwicklung der Stationen ist es sinnvoll, strukturelle Probleme der geplanten Stationen auszuwählen, die auch den Seminarleitern als Entwickler der Station sichtbar und verständlich sind. Dieser gemeinsame Ausgangspunkt kann genutzt werden, um die zugrunde liegenden Probleme im Begriffsverständnis anzugehen.

Begriffsentwicklung - Stationen im Verständnis mathematischer Begriffe

Unser Ziel ist es, positive Einstellungen der Studierenden zum Thema und zu Stationenlernen für die Entwicklung des konzeptuellen Verständnisses der thematisierten Grundbegriffe der Sekundarstufe II zu nutzen.

Am Beispiel der Diagnosewerkzeuge zur Analyse von Lehrbuchkonzepten und Autorenintensionen haben wir schon den Nutzen von Schematisierungen für Verständnis des Lehrbuchaufbaus und bei der Planung von Unterricht, im Speziellen von Stationen demonstriert. Im Folgenden geben wir weitere Beispiele, wie positive Einstellungen, Vorstellungen und Erfahrungen bzgl. des Stationenlernens genutzt werden können, um Begriffsentwicklungen durch die mit den Stationen einhergehenden Erfahrungen und Routinen beim Positionieren, Gruppieren, Variieren in Anordnung, Reihenfolge und Thema zu nutzen.

Stationen im Verständnis mathematischer Begriffe am Beispiel: Fachdidaktikseminar zum Thema Reelle Zahlen

Um die Dynamik der Handlungsebene abzubilden, beschreiben wir die Vorbereitung einer Seminarstunde zum Thema Reelle Zahlen. Die beiden Seminarleiter haben sich für einen Einstieg in das Thema entschieden und vor der ersten Konsultation mehrere Lehrbücher nach geeigneten Einstiegsaufgaben durchsucht. In der Konsultation werden die Aufgaben und die von den Seminarleitern entwickelten Lernziele und Fragen zur Reflektion für die zu haltende Seminarstunde vorgestellt.

Ein Ziel des Seminars ist es, dass sowohl die Seminarleiter als auch die Seminarteilnehmer Aufgaben aus der Perspektive von Autoren und Entwicklern analysieren. Die erste Seminarplanung ist oft eine Vorstellung und Beschreibung von Einstiegsaufgaben, die einem einzigen Lehrbuch entnommen sind. Dies birgt die Gefahr, die Seminarteilnehmer in die schon beschriebene mit dem Vokabular des Lehrers gespielte Schülerperspektive zu leiten, in welcher über Bewältigung, Zeitaufwand, nötige Vorkenntnisse von Aufgaben nachgedacht wird, ohne diese gelöst zu haben.

Ein erster Schritt, Schüler- und Lehrerperspektive zu separieren ist die Beurteilung der drei gewählten Einstiegsaufgaben aus der Schülerperspektive. Da dafür das Lösen der Aufgaben notwendig ist, werden die Aufgaben im Vorfeld an die Teilnehmer mit einer Aufforderung zum schriftlichen Lösen verschickt. Die Diskussion der Aufgaben wird für den Anfang der Seminarstunde geplant und soll von Seiten der Seminarteilnehmer bewusst aus der Schülerperspektive erfolgen. Die Seminarleiter können ihr bei der Entwicklung der Schemata gewonnenes Verständnis über Design und Aufbau der Lehrbücher zur Strukturierung und Moderation der Diskussion nutzen. Dabei befinden sie sich in der Lehrerperspektive. Eine einfache Möglichkeit, die Seminarleiter an die Entwicklung von Aufgaben heranzuführen, ist der Arbeitsauftrag, zu den von ihnen gewählten Einstiegsaufgaben drei weitere passende Aufgaben zu finden.

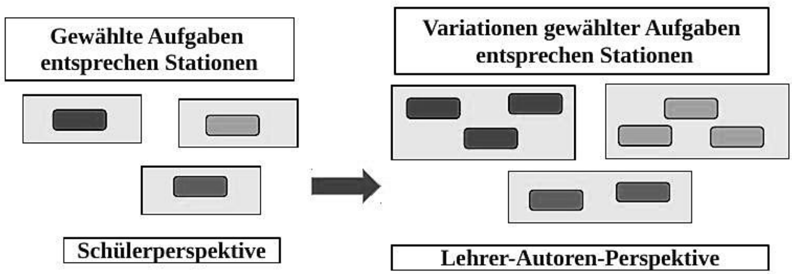


Abb. 5: Schema zur Erweiterung von Stationen als Strukturierungshilfe der Aufgabenanalyse der Seminarleiter

In der Konsultation hat der Dozent die Möglichkeit durch ein Hinterfragen des *Passens* konzeptuelles Verständnis zu entwickeln.

Wir nehmen an, dass die Seminarleiter zum Thema Reelle Zahlen die folgenden Einstiege zur Einführung irrationaler Zahlen aus verschiedenen Lehrbüchern gewählt haben:

Aufgabe 1:

a) Heron-Verfahren für Rechteck mit Seitenlängen 1 und 9 (Berechnung von 4 Schritten).

b) Heron-Verfahren für Rechteck mit Seitenlängen 2 und 6 (Berechnung von 4 Schritten).

Aufgabe 2: Comicdialog zum indirekten Beweis, dass Wurzel aus 2 kein Bruch sein kann.

Aufgabe 3: Berechnung der ersten Schritte einer Intervallschachtelung.

In der ersten Konsultation werden verschiedene konzeptuelle Hintergründe der gewählten Aufgaben diskutiert. Dies kann durch das Sammeln und Ordnen weiterer Beispiele sowie die Einbeziehung und Entwicklung von Beispielen und Themen verschiedener von den Seminarleitern bereits besuchter Vorlesungen erfolgen. Wir nehmen an, dass die Seminarleiter eine Einbettung der Aufgaben in geometrische, analytische und algebraische Kontexte vornehmen. Für die Entwicklung weiterer geometrischer, analytischer und algebraischer Einführungen ist wahrscheinlich Anleitung durch den Dozenten notwendig. Ein Portfolio zu Grundbegriffen der Schulmathematik, in welchem Inhalte der Mathematikvorlesungen elementarisiert wurden, ist an dieser Stelle von großem Nutzen.

In Vorbereitung der Seminarstunde werden zu jeder Station zwei weitere Aufgaben ausgearbeitet:

Thema 1: Darstellung irrationaler Zahlen durch Längen geometrischer Objekte (geometrische Näherung, abgrenzende Beispiele bzgl. Gleichsetzung geometrischer und arithmetischer Grenzwerte),

Thema 2: Definition irrationaler Zahlen als Grenzwerte von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen,

Thema 3: algebraische Begriffsbildung (indirekte Beweise, Kettenbrüche, Körpererweiterung).

Beim Entwickeln konzeptueller Hintergründe für die ausgewählten Einstiegsaufgaben und dem Finden dazu passender anderer Einstiegsaufgaben sind die Seminarleiter in der Autoren- und Entwicklerperspektive.

Im Seminar wird den Seminarteilnehmern die Aufgabe gestellt, zu den drei Stationen je eine weitere passende Aufgabe hinzuzufügen. Diese können von den Teilnehmern z.B. durch Variation selbstständig entwickelt werden oder aus Lehrbüchern oder einem gegebenen Aufgabenpool herausgesucht werden.

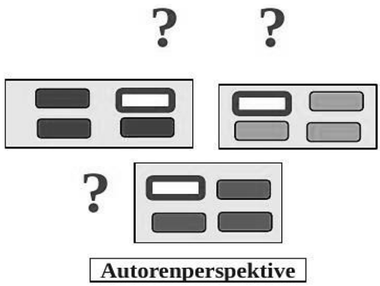


Abb. 6: Schema zur Erweiterung von Stationen als Strukturierungshilfe der Aufgabenanalyse der Seminarteilnehmer

Finden Sie in jeder Station zu den gegebenen Aufgaben eine weitere passende. Begründen Sie Ihre Wahl.

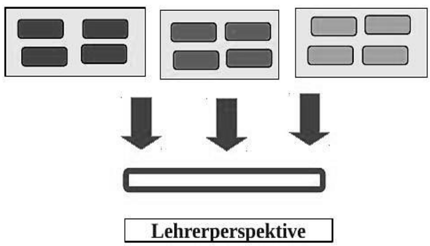


Abb. 7: Schema zur Erarbeitung eines Einstiegs durch die Seminarteilnehmer

Wählen Sie drei Aufgaben aus einer oder verschiedenen Stationen für die Einführung reeller Zahlen. Formulieren Sie dazu passendes Basiswissen.

Der letzte Arbeitsauftrag bringt die Seminarteilnehmer durch Fragestellungen zu Unterrichtseinstiegen und Unterrichtsplanung in die Lehrerrolle.

Naheliegende Gebiete, wo der Wechsel: Stationen ↔ Schemata auch als Strukturierungshilfe Anwendung finden kann, sind:

- Visualisieren der Systematik und Struktur bei Übungsaufgaben,
- Visualisieren der Begriffsentwicklung bei Anwendungen und Ausblicken,
- vergleichende Analyse bzgl. Ausgewogenheit vertikaler und horizontaler Entwicklungen von Begriffen.

Der theoretisch interessierte Leser erkennt u.a. in unserem Ansatz:

- tätigkeitstheoretische Entwicklungsmodelle bei der Einbeziehung von Motiven und Zielen (Leontyev, 1979),
- Prinzipien des Modells *Community of practice* bei der Entwicklung und Realisierung der gemeinsamen Zielstellungen von Dozent und Seminarleitern (Wenger et al., 2002),
- Scaffolding beim Wechsel zwischen gestaffelter Anleitung zur Erarbeitung konzeptuellen Hintergrundwissens und selbständiger Übertragung, Umsetzung und Interpretieren durch eigene Beispiele, Umsetzungen der Zone der nächsten Entwicklung (Chaiklin, 2003),
- John Masons levels of awareness (Mason, 1998),
- Anwendungen von Richard Leshs *Models and Modeling Perspectives* auf Organisation und Analyse von Gruppenarbeit (Zawojewski et al., 1998).

Im Rahmen einer Aktionsforschung zur Entwicklung von Fachdidaktikveranstaltungen können diese Hintergrundtheorien für entsprechende Fragestellungen stärker ausgearbeitet werden. Dies würde ebenfalls die Ausarbeitung von Fallstudien motivieren.

Begriffsbildung und Stationenlernen in Vorlesung und Übung

Im Fachdidaktikseminar kam das Stationenlernen vorwiegend als Metapher zum Einsatz. In den folgenden Beispielen wird die Methode sowohl zum Lehren als auch als Strukturierungshilfe genutzt. Bei der Anwendung als Lehrmethode in einer Übung setzten wir voraus, dass diese durch eine entsprechende Vorlesung vorbereitet wurde. Für die Nutzung der Methode in einer Fachdidaktikübung zur Begriffsbildung spricht:

- die Vermittlung ist stark geführt und instruktiv, die Vorbereitung der Übung von Seiten des Dozenten im Vorfeld ermöglicht ihm in der Übung eine beobachtende, anleitende und begleitende Rolle,
- Klassifikationen und Merkmalslisten können gestalterisch vielfältiger, anschaulicher und handlungsorientierter dargestellt werden,
- Variation, Fortführung, Umstrukturierung einer gegebenen Positionierung von Angeboten werden offensichtlich und nachvollziehbar,
- Modelle der Begriffsbildung sind ein Resultat der systematisierenden, zusammenfassenden Diskussion und können so von Studieren-

den als Ergebnissicherung des Lösungsweges eines konkreten Problems wahrgenommen werden.

Beispiel 1: Fachdidaktik Geometrie: Begriffsentwicklung und Beweisen am Beispiel ‚Lokales Ordnen um den Basiswinkelsatz'

Struktur: parallele Stationen zu gleichen Themen in der Form von Lernstraßen: eine Straße im Stil euklidischer Geometrie und die andere Straße mit abbildungsgeometrischen Zugängen.

Inhalte der Stationen	Realisierung
Einführung von Strecken, Vergleichen von Längen, Messen von Längen, Dreiecksungleichung in verschiedenen Lehrbüchern	
Kongruenzsätze von Dreiecken	
Einführung von Winkeln, Vergleichen von Winkeln mit Zirkel und Lineal, Messen von Winkeln	
enaktiver Einstieg: Falten von rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecken	
Konstruktionen gleichschenkliger Dreiecke mit dynamischer Geometrie	
Beweise: gleichschenklig → gleiche Basiswinkel	
Beweise: gleiche Basiswinkel → gleichschenklig	

In jeder Station kann durch Unterstationen z.B. nach Merkmalen prototypisch-logisch oder visuell-konzeptuell-formal oder enaktiv-ikonisch-symbolisch oder prädikativ-funktional weiter differenziert werden. In der Vorlesung können Beispiele für die Inhalte einiger Stationen behandelt werden. Beweise sollten von den Studierenden besser schon in Vorbereitung auf die Übung erarbeitet worden sein.

Die beiden beschriebenen Lernstraßen können in der Übung entwickelt werden oder es kann mit der Analyse zweier vorgegebener Lernstraßen zum Basiswinkelsatz begonnen werden. Weitere sich anschließende Arbeitsschritte sind die Variation, Umstrukturierung, Fortsetzung der Lernstraßen durch

- Gestaltung weiterer Stationen anhand vergleichender Lehrbuchanalysen,
- Variation der Stationen zu den Themen lokales Ordnen um den Satz von der Winkelsumme im Dreieck,
- Fortsetzung der Stationen zum Satz des Thales,
- Strukturierung von Unterstationen (Häusern) nach verschiedenen Modellen,
- Umstrukturierung durch Bedingtheit von Modellen, z.B. der Merkmale enaktiv, ikonisch, symbolisch bei Verwendung dynamischer Geometrie.

Zeitlich und räumlich *durchlaufbare* Entwicklung ist vielsinnig und eindrücklich und deshalb oft auch nachhaltig. Die Vorteile reflektierter Nutzung von Zusammenhängen zwischen verinnerlichter Begriffsbildung und ihrer Externalisierung in Form von handlungsorientierten Schemata liegen auch in der anfänglichen nicht verbalen, abstrakten Form und späteren vielseitigen Interpretation und Umsetzung. Die Nutzung schematischer Darstellungen wie in den Eingangsbeispielen des Fachdidaktikseminars oder in Beispiel 1 durch parallele Lernstraßen und Häuser können als Strukturierungshilfen nützlich sein und auch zum Sammeln, Ordnen und Positionieren von Problemen motivieren.

Nachdem wir bei der Herleitung und dem Beweis eines Satzes der Elementargeometrie die Methode Stationenlernen und deren Entwürfe zur Darstellung der Begriffsentwicklung und des lokalen Ordnens genutzt haben, geben wir noch einige weitere Gründe und Beispiele für die Anwendung der Methode in fachdidaktischen Veranstaltungen.

Beispiel 2: Visualisierung von Aspekten der Begriffsentwicklung

Die Bedeutung eines Begriffs wird durch den Umgang mit dem Begriff erlernt. Stationen können diesen Umgang sichtbar machen. Positionierung und Festlegung der Reihenfolge der Problemstellungen gibt außerdem die Möglichkeit, Entwicklungen zu visualisieren. Beispiele dafür sind:

- Horizontal: Übertragbarkeit kann beim Stationenlernen durch die Strukturierung der Stationen als Variation auf eine (in der Systematisierung sichtbar werdende) universelle Idee, Form, Voraussetzung, ... visualisiert und unterstützt werden.
- Lokales Ordnen: Vorstellungen über den deduktiven Aufbau der Mathematik können durch in Stationen eingebaute Zyklen und Invertierungen in Frage und zur Diskussion gestellt werden.
- Vertikal: Nach dem Spiralprinzip strukturierte Stationen zu einer grundlegenden Idee können zur Konzeptualisierung des Begriffs und zur Visualisierung von Verallgemeinerung, Analogie, Formalisierung beitragen.

Entwürfe für entsprechende Stationen überlassen wir hier unserem Leser.

Beispiel 3: Stationen zur Entwicklung und Systematisierung von Problemlösemethoden

Stationen können in verschiedenen Kontextualisierungen oder Variationen einer Problemlösemethode anhand entsprechender Aufgaben erarbeitet werden und so die Formalisierung und Übertragbarkeit der Methode fördern. Passende Themen sind u.a.:

- Symmetrie als Problemlösemethode,
- Dreisatz – Proportionalität – Linearität,
- verschiedene Problemlösemethoden für Extremwertaufgaben,
- Fallunterscheidungen,
- Invariantensuche.

Beispiel 4: das Spiralprinzip

In den Veranstaltungen zur Fachdidaktik Geometrie stehen bei der Begriffsentwicklung oft lokales Ordnen, Problemlösemethoden, Konstruktionen, Beweise im Vordergrund. Die konzeptuellen Inhalte der Algebra machen langfristige formalisierende Begriffsentwicklungen zu Inhalten der Fachdidaktik der Algebra. Auch hier können Stationen zu Darstellungen algebraischer Strukturen in verschieden Klassenstufen Strukturierungshilfen sein (Zahlenbereiche, Operationen, Algorithmen, ...).

Beispiel 5 - dialektische Dualitäten

Die Gegenüberstellung und Kontrastierung verschiedener Lösungsansätze, Definitionen und Beweisverfahren im Sinne von (Weiss-Pidstrygach, 2012) führt zu dualen Stationen.

Die Dualität zwischen Werkzeugcharakter und Untersuchungsobjekt mathematischer Begriffe im Ansatz von Douady und Artigue (Artigue et al., 2001) kann durch folgende Stationen realisiert werden:

- Stationen zu einem mathematisches Konzept als Teil der mathematischen Sprache und Theorie,
- duale Stationen zu diesem mathematischen Konzept als Problemlösemethode.

Dem Entwicklungskonzept der Nutzung von Stationenlernen in fachdidaktischen Übungen zur Begriffsbildung liegen vor allem stoffdidaktische Überlegungen zugrunde. Die Interpretation der Handlungsorientierung der Methode als Problemorientierung wurde bewusst vorgenommen, die meisten beschriebenen Differenzierungen haben inhaltliche Grundlagen.

Ausblick

Meine Motivation für die Anwendung der Lehrmethode ist mein Bedürfnis nach Lehr- und Lernumgebungen, in welcher Lehrende gleichzeitig und selbstverständlich akzeptiert Fragende, Lernende sein können. Dies ist in einer Vorlesung nur sehr bedingt möglich.

John Mason (Mason, 1998) beschreibt den mathematischen Experten als jemanden, der Problemlösen und Beweisen einfach aussehen lassen und mit mathematischen Methoden, Techniken und der Terminologie reflektiert umgehen kann und der in der Lage ist, Probleme und Techniken in einem größeren konzeptuellen Zusammenhang zu sehen. Er beschreibt den fachkundigen Mathematiklehrer, als jemanden, der in der Lage ist, Schülern Aufgaben und Probleme einfach zu stellen und mathematische Zusammenhänge einfach zu erklären. Der sachkundige Mathematiklehrer hat nicht nur fachliches Wissen, sondern ist sich auch dessen Existenz und Art bewusst und kann sich in eine Lage versetzten, in welcher er auf dieses Fachwissen keinen Zugriff hat. Der sachkundige Mathematikdidaktiker wird als jemand charakterisiert, der fachliche Kompetenz als Mathematiklehrer auf der Grundlage mathematischer Sachkenntnis besitzt und sich der Art seiner Erfahrung und Kompetenz bewusst ist, der sich aber auch in die Lage versetzen kann, diese Erfahrung nicht zu haben.

Bei der Arbeit mit Lernstationen fließen Erfahrung und Kompetenz in die Entwicklung der Lernumgebung ein. Die Rolle des Begleiters und Beobachters schafft im Sinne von Mason beschriebene Möglichkeiten, sich in die Rolle des unerfahrenen Anfängers zu begeben.

Ich sehe im beschriebenen Stationenlernen Möglichkeiten zur vielfältigeren Gestaltung von Didaktiklehrveranstaltungen und zur Einbeziehung individueller Interessen der Studierenden. Es reichen ein oder zwei wirklich in Stationenarbeit durchgeführte Übungen um auch in den restlichen Veranstaltungen die Entwürfe als Planungs- und Strukturierungshilfen zur Verfügung zu haben.

Meine bisherigen Ansätze sind eher in Veranstaltungen mit Seminargröße realisierbar. Über Ideen und Variationen, welche eine Übertragung auf größere Veranstaltungen erlauben, würde ich mich freuen.

Literatur

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., Lenfant A. (2001). Teaching and learning algebra, approaching complexity through complementary perspectives. The Future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, Melbourne, pp. 21-32.

Barzel, B., Büchter, A., Leuders, T. (2007). Mathematik-Methodik: Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Scriptor.

Chaiklin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky’s analysis of learning and instruction. In: A. Kozulin (Ed) Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context. Cambridge.

Leontjew, A. N. (1979). Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit. Berlin Volk und Wissen,, S.110 ff.

Mason, J. (1998). Enabeling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. In: Journal of mathematics teacher education 1 (3), pp. 243-267.

Reich, K. (2012). Konstruktivistische Didaktik: Das Lehr-und Studienbuch mit Online-Methodenpool. Beltz.

Weiss-Pidstrygach, Y. (2012). Instruktion, Konstruktion und die Zone der nächsten Entwicklung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht (2), S. 925-928.

Wenger, E., McDermott, R.A., Snyder, W.M. (2002). Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge. Harvard Business Press, pp.65-92.

Zawojewski, Judith S., Lesh, Richard A., English, Lyn D. (1998). A Models and Modeling Perspective on the Role of Small Group Learning Activities. In: Lesh, Ricjard A., Doerr, Helen M. (Eds.) Beyond Constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, N.J., pp. 337-358. , J. (2002). Deutschland im internationalen Bildungsvergleich. In: N. Killius, J. Kluge & L. Reisch (Hrsg.). Die Zukunft der Bildung. Frankfurt a.M.

Vergessene Vierecke

Hans Walser

Zusammenfassung. Es werden drei Vierecke vorgestellt, die im üblichen Begriffskanon wie etwa dem *Haus der Vierecke* fehlen. Sie haben nicht einmal einen Namen. Eines der drei Vierecke hat Beziehungen zu Pythagoras (Quadratsummen), Briefumschlägen, Faltgeometrie und Wegoptimierung im Viereck. Eingebettet in die exemplarischen Darstellungen werden allgemeine Gedanken zur Begriffsbildung diskutiert.

Drei Fragen und eine Lehrerfrage

Ein erfreuliches und ein weniger erfreuliches Erlebnis haben mich zu dieser Arbeit veranlasst. Das erfreuliche zuerst: Mir sind in den letzten Monaten drei völlig unterschiedliche Probleme zugekommen, welche überraschenderweise alle dasselbe Viereck als Lösung haben. Unerfreulich: Das Viereck fehlt im Kanon des Hauses der Vierecke [1].

Die drei Fragen:

Briefumschläge

Welche Vierecke können zu einem Briefumschlag gefaltet werden?

Sicher geht es mit einem Rhombus (Abb. 1). Geht es auch mit anderen Vierecken?

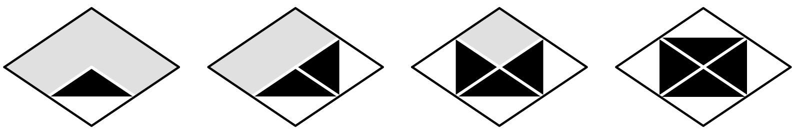


Abb. 1: Briefumschlag

Schwarz gleich Weiß?

Wir setzen den Seiten eines Viereckes Quadrate an (Abb. 2a). Bei welchen Vierecken ist die alternierende Summe der Quadratflächen null?

Das Rechteck ist ein Gegenbeispiel (Abb. 2b).

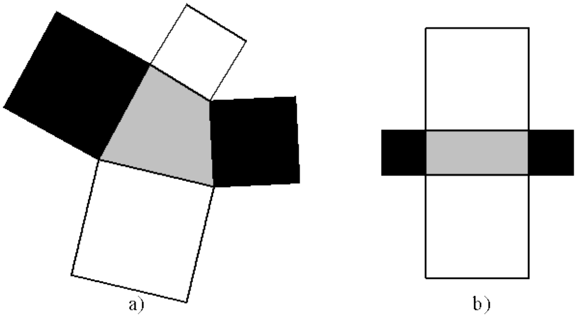


Abb. 2: Schwarz = Weiß?

Optimale Wegenetze

Die Abbildung 3 zeigt Wegenetze in zwei verschiedenen Topologien. Die Wegenetze sind lokal optimal, das heißt im Vergleich mit anderen Wegenetzen derselben Topologie ist die Gesamtlänge der Wege minimal.

Welche der beiden Topologien führt global zur besten Lösung? Bei welchen Vierecken führen die beiden Topologien zu gleich guten Lösungen?

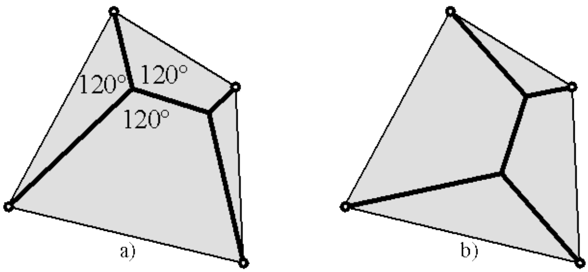


Abb. 3: Optimale Wegenetze

Wir gehen bei dieser Wegoptimierung von der naiven Annahme aus, dass der Ausbaustandard unabhängig vom Verkehrsaufkommen ist. In der Realität muss allerdings das Verbindungsstück zwischen den beiden Verzweigungspunkten mehr Verkehr verkraften. Es braucht daher einen besseren, also teureren Ausbaustandard. Daher wird es sinnvoll sein, dieses Verbindungsstück zu verkürzen auf Kosten der Zubringer zu den vier Eckpunkten.

Die Aufgabe soll auf Gauß zurückgehen. Gauß war ein Eisenbahnfan. In der Frühzeit des Eisenbahnwesens war aber das Verkehrsaufkommen so gering, dass ein Geleis genügte. Umgekehrt musste ein Geleis gebaut werden, damit die Züge rollen konnten. Zu dieser Zeit war also die Optimierung des Bahnnetzes unabhängig vom Ausbaustandard sinnvoll.

Die Fragestellung berücksichtigt nur die Baukosten, nicht aber die Betriebskosten. Wie müsste ein heutiges Straßennetz gebaut werden, damit der Energieverbrauch im Betrieb minimal wird?

Eine Lehrerfrage

Bei einer Lehrerfrage weiß der Lehrer die Antwort und stellt eine passende Frage dazu. In unserem Beispiel: Bei welchen Vierecken sind die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Kantenmitten gleich lang (Abb. 4)? Auch hier ist das Rechteck ein Gegenbeispiel.

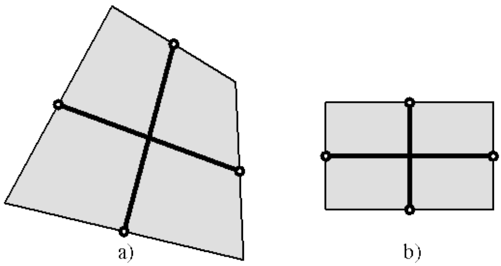


Abb. 4: Gleich lange Mittenlinien?

Begriffssysteme

Das Haus der Vierecke

Die oben gestellten Fragen führen alle zum gleichen Viereck, das allerdings im *Haus der Vierecke*, etwa in [1] (Abb. 5), fehlt.

Das Haus der Vierecke ist ein an Schulen verwendetes Begriffssystem. Dabei wird in der Terminologie wenig Rücksicht auf die den Schülerinnen und Schülern vertraute Umgangssprache genommen.

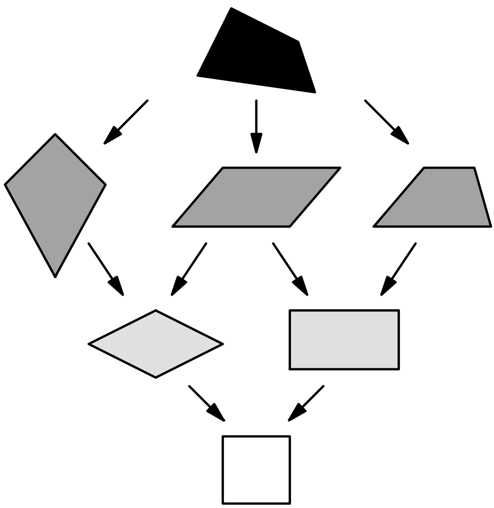


Abb. 5: Haus der Vierecke

Für die meisten Leute wird der Begriff *Viereck* mit einem Quadrat assoziiert. Bei Rechtecken habe ich dann schon die Sprachschöpfung *Langeck* gehört. Da mehr als 99% aller im Alltag existierenden Vierecke Rechtecke sind, erübrigt sich im Unterricht eine weiterführende Terminologie. Niemand wird zur Kennzeichnung der Baustelle der Abb. 6 von einem *allgemeinen Viereck* reden.

Abb. 6: Baustelle

Vor allem bei räumlichen Begriffen weicht die Umgangssprache häufig von der Fachsprache ab. Das liegt vielleicht daran, dass wir hauptsächlich doch in einer zweidimensionalen Welt leben. Die Schule verstärkt allerdings diese Sicht: Was sich nicht am linken Rand lochen und in den Ringhefter einfügen lässt, fehlt auch in den Lehrplänen. Inuktitut, die Sprache der Inuits im hohen Norden Kanadas, kennt praktisch keine räumlichen Begriffe (Poirier 2007). Dort gibt es auch keine Bäume. Die Verpackung der Schokolade in der Abbildung 7 wird in der Umgangssprache als *dreieckige Schachtel* bezeichnet, während die Nomenklatura von 6 Ecken, 9 Kanten und 5 Flächen spricht.

Abb. 7: Dreieckige Schachtel

Aus Dreikantprismen lassen sich schöne Plastiken herstellen (Abb. 8). Der Hohlraum im Kern dieser Figur ist ein Rhombendodekaeder.

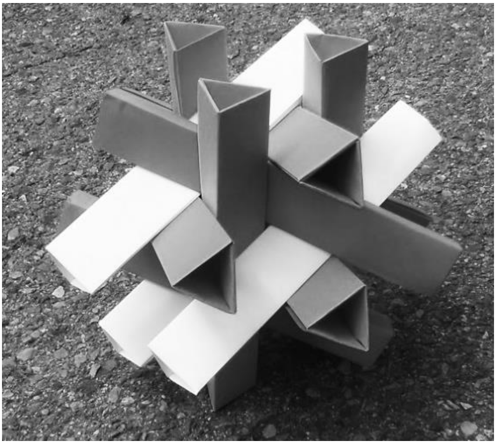


Abb. 8: Plastik

Wie ist es nun mit Begriffssystemen in anderen Fächern?

Carl von Linné: Systema naturae

Noch heute bin ich traumatisiert von Pflanzenbestimmungsübungen im Biologie-Unterricht. Da hatte man eine ganze Kaskade von dichotomischen Fragen zu beantworten, und wenn man bei einer Frage falsch aufgleiste, landete man bei der Kokosnuss statt bei der Kartoffel. Seither kann ich es wenigstens nachfühlen, wenn Studierende von ihrem Mathe-Trauma erzählen. Auch beim Begriffssystem aus der Botanik gibt es Widersprüche zischen Umgangssprache und fachwissenschaftlicher Sprache. Das bekannteste Märchen des deutschen Kulturgutes, das Dornröschen, müsste eigentlich *Stachelröschen* heißen, dafür müssten die Stachelbeeren im Garten als *Dornbeeren* bezeichnet werden.

Mendelejew: Periodensystem

Die Tafel des Periodensystems, das in jedem Chemie-Schulzimmer hängt, zeigt ein Begriffssystem, das bei seiner Entstehung noch weiße Löcher aufwies. Das war dann Herausforderung für die Chemiker, diese Löcher zu füllen.

IUC Notation: Bandornamente

Die Abbildung 9 zeigt eine schematische Darstellung der sieben Symmetrieklassen der Bandornamente mit der Notation der internationalen kristallografischen Union (IUC).

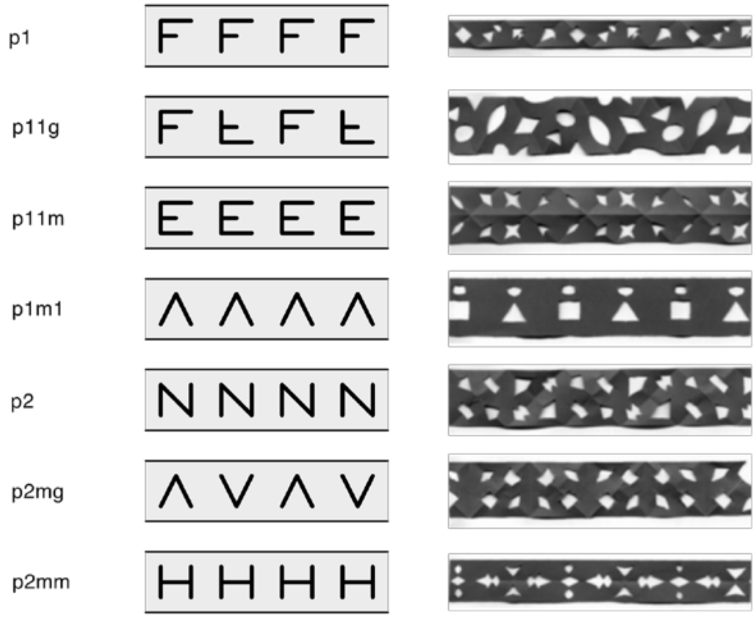


Abb. 9: Bandornamente

Erfahrungen im Unterricht: Bei Gruppenarbeiten über das Thema der Klassifizierung der Bandornamente zeigten sich zwei diametral verschiedene Herangehensweisen. Die einen Gruppen entschlossen sich zum Sammeln und Sichten. Diese Gruppen liefen Gefahr, sich zu überzählen, indem sie zu viele Klassen erhielten. Die anderen Gruppen studierten zunächst die elementaren Symmetrien bei einem Band und kombinierten dann diese Symmetrien. Gelegentlich ging eine Kombination verloren.

Nach vorliegender Systematik stellte eine Studentin die Frage, wie man diese Bänder als Scherenschnitt realisieren kann. Es stellte sich heraus, dass das einfachste Band, nämlich p1 mit ausschließlich Translationssymmetrie, am schwierigsten als Scherenschnitt herzustellen ist. Das liegt daran, dass die Scherenschnitttechnik mit Falten und Schneiden, also mit Axialsymmetrie, arbeitet.

Lernzieltaxonometrie

Die Abbildung 10 zeigt ein Musterbeispiel einer schlechten Vortrags-Folie.

Abb. 10: Vortragsfolie

Eine überfrachtete Item-Litanei, so klein geschrieben, dass der Text kaum mehr lesbar ist. Gravierender sind die Folgen: Auf der Basis solcher Listen geraten die didaktischen Epigonen vom Hundertsten ins Tausendste und erstellen Fragebögen für die Evaluation von Lehrpersonen und ihren Unterricht. Dabei täte not, sich auf wenige wesentliche Punkte zu konzentrieren.

Begriffssysteme im Unterricht

Ich stellte Lehrpersonen in Biologie oder Chemie die Gretchenfrage: Wie hältst du es mit Begriffssystemen? Die Reaktion war zunächst in betretenes Schweigen oder die ausweichende Antwort: Das ist eine gute Frage.

Begriffssysteme sollen erst eingeführt werden, wenn sie sich von der Sache her aufdrängen. Wenn eine Schülerin oder ein Schüler bei einer eigenen Arbeit die Übersicht zu verlieren droht, ist sie oder er dankbar um ein Begriffssystem und weiß dessen Sinn zu schätzen.

Begriffssysteme können einschränkend sein. Unser *Haus der Vierecke* ist unvollständig und kann bei systemtreuen Menschen hemmend wirken. Wir kennen ja alle das Fragebogenproblem: Wenn ich einen Fragebogen ausfüllen soll, fühle ich mich immer unbehaglich, weil es keine Fragen zu meinen

Antworten gibt. Bei einem Fragebogen geht der Informationsfluss in der falschen Richtung: Ich erfahre viel über die Geistesart der Institution oder der Person, welche den Fragebogen verfasst hat. Diese wiederum erfährt wenig oder nichts über meine Gedanken.

Der Schiefe Schnitt

Ein Begriffssystem enthält immer auch eine normative und sogar wertende Komponente. Wir sehen das am Beispiel des so genannten *Goldenen Schnittes* (Abb. 11). Über den Goldenen Schnitt siehe (Walser 2013).

Abb. 11: Der Goldene Schnitt

Die Bezeichnung *Goldener Schnitt* ist ein Marketing-Gag ersten Ranges. Sie wurde zwar erst 1835 von Martin Ohm (1792-1872) verwendet, aber schon vorher gab es Bezeichnungen aus der höchsten Etage, etwa *divina proporzione*. Wohltuend abweichend ist die sachliche Bezeichnung Euklids: *Stetige Teilung* (Euklid 1973, S. 111, VI. Buch, Definitionen). Durchaus sachgemäß wäre die Bezeichnung *Schiefer Schnitt*. Das Teilverhältnis ist unschön und asymmetrisch. Die Teilung einer Erbschaft in diesem Verhältnis würde als ungerecht empfunden. Das Verhältnis ist irrational, historisch gesehen sogar der Prototyp eines irrationalen Verhältnisses, und widerspricht dem pythagoreischen Harmoniebedürfnis.

Das Viereck

Zurück zu unseren Vierecken

Mittenlinien

Die Seitenmitten eines Viereckes bilden ein Parallelogramm, dessen Seiten zu den Viereckdiagonalen parallel sind. Dies kann mit Strahlensätzen gezeigt werden.

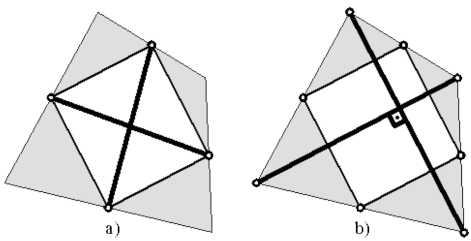


Abb. 12: Orthogonale Diagonalen

Wenn nun die Verbindungslinien gegenüberliegender Seitenmitten gleich lang sind, ist das Parallelogramm speziell ein Rechteck (Abb. 12a). Die Viereckdiagonalen sind dann orthogonal (Abb. 12b).

Das Viereck mit orthogonalen Diagonalen wird im *Haus der Vierecke* [1] nicht genannt. Zwar gehören das Quadrat, der Rhombus und das Drachenviereck dazu, aber dann versandet die Spur. Das Viereck mit orthogonalen Diagonalen hat keine Symmetrie.

Es löst aber unsere aufgeworfenen Fragen.

Briefumschlag

Wir können die Ecken des Vierecks zum Diagonalenschnittpunkt einfalten und erhalten einen Briefumschlag (Abb. 13).

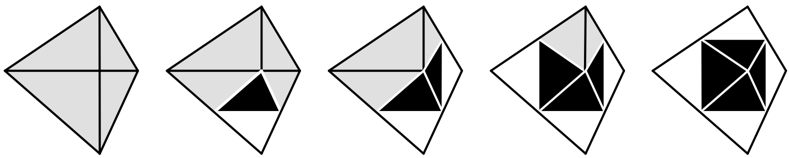


Abb. 13: Briefumschlag

Allerdings können wir auch ein Rechteck, zum Beispiel ein DIN A4-Papier, zu einem Briefumschlag falten (Abb. 14). Dabei kommen aber nicht alle vier Papierecken im selben Punkt zusammen.

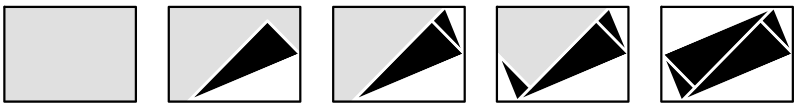


Abb. 14: Briefumschlag aus einem DIN-Rechteck

Die Abbildung 15 zeigt den Konstruktionsweg für die Abbildung 14 mit einem Thaleskreis über der langen Mittelparallele des Rechtecks.

Das sich aus dem DIN-Rechteck ergebende Briefumschlag-Rechteck ist ein so genanntes *Silbernes Rechteck*. Es hat die Eigenschaft, dass man zwei Quadrate abschneiden kann und dann ein ähnliches Restrechteck übrig bleibt.

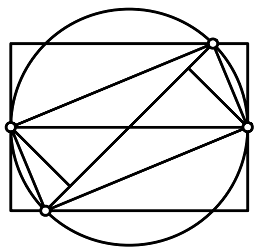


Abb. 15: Konstruktionsweg

Alternierende Quadratsumme

Wenn die Diagonalen orthogonal sind, gibt es im Innern des Viereckes vier rechtwinklige Dreiecke (Abb. 16).

Nun können wir alternierend die Pythagorasformel für diese rechtwinkligen Dreiecke anwenden. An den Katheten im Innern des Vierecks neutralisieren sich die Quadratflächen. Daher ist auch die alternierende Flächensumme der Außenquadrate null.

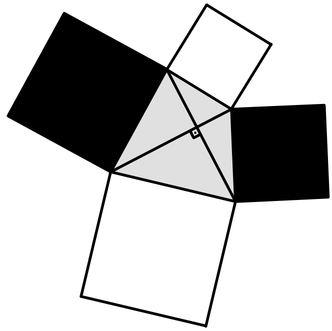


Abb. 16: Alternierende Quadratsumme

Optimale Wegenetze

Für die Behandlung der optimalen Wegenetze müssen wir etwas ausholen. Wir beginnen mit einem suboptimalen Wegenetz gemäß Abbildung 17. Nun drehen wir links und rechts ein Teildreieck um 60° heraus (Abb. 18) und verbinden die Verzweigungspunkte mit den jeweiligen herausgedrehten Bildpunkten.

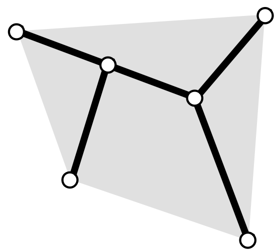


Abb. 17: Suboptimales Wegenetz

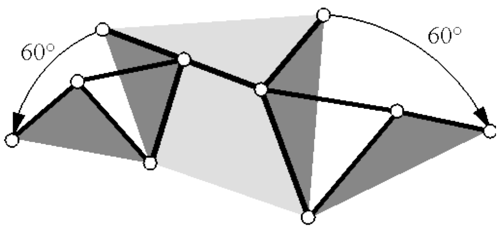


Abb. 18: Herausdrehen von Teildreiecken

Der Streckenzug von ganz links nach ganz rechts ist gleich lang wie das Wegenetz. Die Endpunkte ganz links und ganz rechts sind aber vom Wegenetz unabhängig, sie ergeben sich durch Ansetzen eines gleichseitigen Dreieckes an die beiden Viereckseiten links und rechts. Die minimal mögliche Wegelänge ist also gleich lang wie die Verbindungsstrecke dieser beiden Endpunkte (Abb. 19).

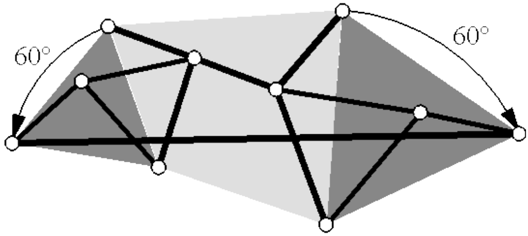


Abb. 19: Minimale Wegelänge

Das optimale Wegenetz mit der minimalen Gesamtlänge finden wir schließlich durch Einzeichnen der Umkreise der beiden gleichseitigen Dreiecke (Abb. 20). Dies kann mit dem Umfangwinkelsatz gezeigt werden.

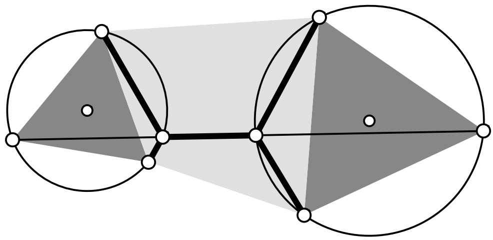


Abb. 20: Optimales Wegenetz

Die Frage, bei welchen Vierecken die beiden Topologien zu gleich langen optimalen Wegenetzen führen, kann nun so formuliert werden: Wir setzen an den Seiten eines Viereckes gleichseitige Dreiecke auf und verbinden die Außenecken gegenüberliegender Dreiecke. Bei welchen Vierecken sind die beiden Verbindungslinien gleich lang?

Wir können das Problem noch etwas verallgemeinern, indem wir die gleichseitigen Dreiecke durch ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel φ ersetzen (Abb. 21).

Eine vektorfreie Darstellung findet sich in (Haag 2003).

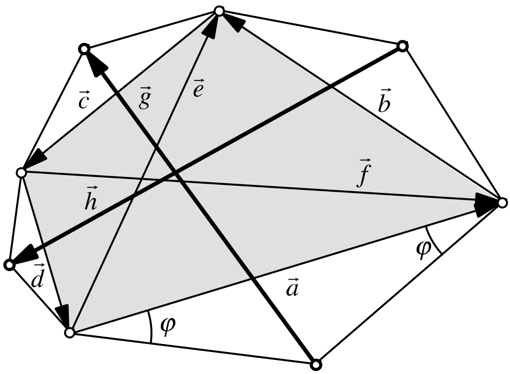


Abb. 21: Ansetzen gleichschenkliger Dreiecke

Die Frage ist nun: Für welche Vierecke ist $|\vec{g}| = |\vec{h}|$? Mit umfangreicher Rechnung finden wir gleich zwei schöne Formeln:

$$\begin{aligned} \vec{g}^2 - \vec{h}^2 &= \tfrac{1}{2}(\tan^2(\varphi) - 1)2\vec{e}\vec{f} \\ 2\vec{g}\vec{h} &= \tfrac{1}{2}(\tan^2(\varphi) - 1)\left(\vec{e}^2 - \vec{f}^2\right) \end{aligned}$$

Die Formeln sind dual. Die erste Formel löst unsere Frage: Die beiden Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ sind genau dann gleich lang, wenn die Diagonalvektoren des Viereckes orthogonal stehen. Allerdings muss dabei $\varphi \neq \pm 45°$ vorausgesetzt werden, damit uns der Faktor $\frac{1}{2}(\tan^2(\varphi) - 1)$ keinen Streich spielt. Die Abbildung 22 illustriert die Situation an einem Beispiel.

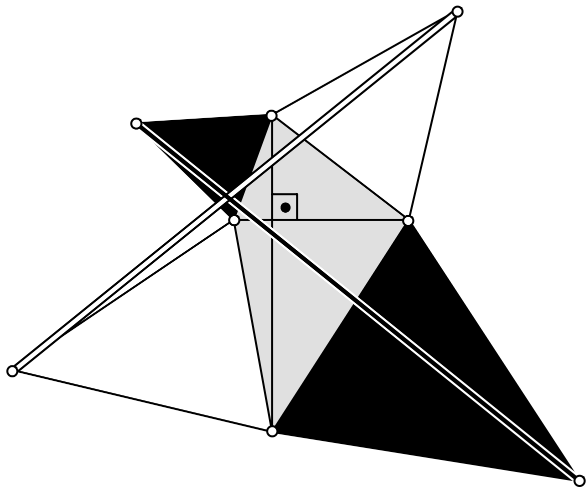


Abb. 22: Schwarz = Weiß

Es ist Schwarz = Weiß, und das gilt sowohl für die Flächensummen der aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecke wie auch für die Längen der Verbindungsstrecken der Außenecken.

Die zweite Formel, also $2\vec{g}\vec{h} = \frac{1}{2}(\tan^2(\varphi) - 1)\left(\vec{e}^2 - \vec{f}^2\right)$, führt zu einem neuen Viereck, das ebenfalls im *Haus der Vierecke* [1] nicht benannt ist: Viereck mit gleich langen Diagonalen (Abb. 23).

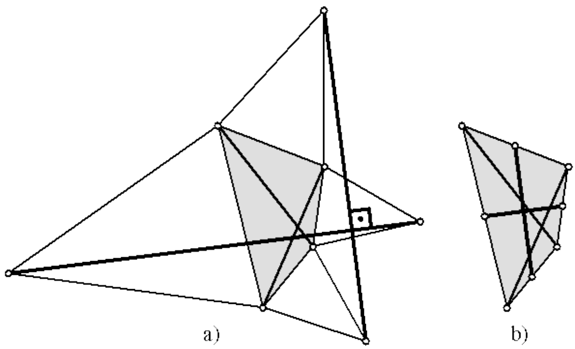


Abb. 23: Viereck mit gleich langen Diagonalen

In einem Viereck mit gleich langen Diagonalen sind insbesondere die Verbindungslinien gegenüberliegender Seitenmitten (Abb. 23b) orthogonal. Das Seitenmittenparallelogramm ist also ein Rhombus.

Für $\varphi \neq \pm 45^\circ$ können unsere beiden Formeln in eine Formel umgeschrieben werden:

$$\left(\vec{e}^2 - \vec{f}^2\right)\left(\vec{g}^2 - \vec{h}^2\right) = 4\left(\vec{e}\vec{f}\right)\left(\vec{g}\vec{h}\right)$$

Es bleibt nun noch der Fall $\varphi = \pm 45^\circ$ zu betrachten. Wir setzen bei einem beliebigen Viereck zum Beispiel nach außen gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke auf (Abb. 24). Dann sind die Verbindungslinien der Außenecken sowohl gleich lang wie auch orthogonal.

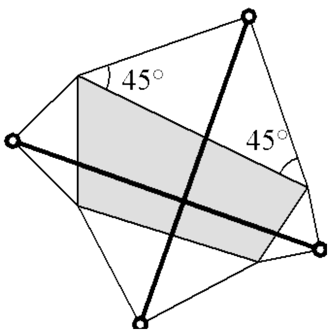


Abb. 24: Halbe Quadrate aufsetzen

Die vier Außenecken bilden also ein Viereck mit gleich langen und orthogonalen Diagonalen. Auch dieses Viereck fehlt im *Haus der Vierecke* [1].

Lassen wir doch die Vierecke mit orthogonalen Diagonalen und die Vierecke mit gleich langen Diagonalen auch im Haus der Vierecke wohnen!

Die Abbildung 25 schließlich ist eine Paraphrase der Abbildung 24.

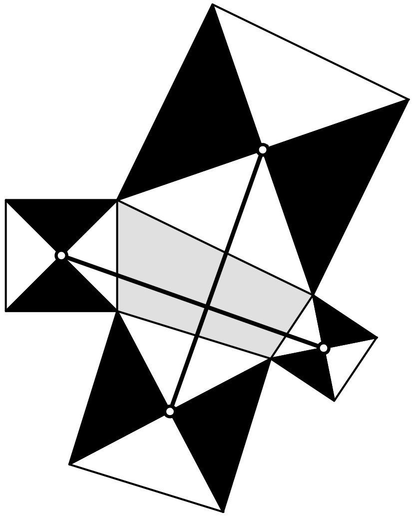


Abb. 25: Die schwarzen Verbindungsstrecken sind gleich lang und orthogonal

Literatur

Euklid (1973). Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft (Ursprünglich Leipzig: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften) 1973.

Haag, W. (2003). Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart: Klett 2003.

Poirier, L. (2007). Teaching mathematics and the Inuit community. The Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 7(1), 2007, p. 57-72.

Walser, H. (2013). Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013.

Internetseiten

[1] http://www.mathematische-basteleien.de/viereck.htm
(*Hierarchie der Vierecke*, abgerufen 6. 4. 2013)

Wohin führen Ortskurven?

Dörte Haftendorn

Zusammenfassung. Ortskurven können mit den starken Möglichkeiten heutiger Mathematik-Werkzeuge einfach erstellt und erkundet werden. Sie ermöglichen eigenes Handeln der Lernenden. Reflexionen an Geraden und Parabeln bieten schon reichhaltige Erfahrungen und führen zu neuen Begriffsbildungen. Nicht nur Kegelschnitte, auch höhere algebraische und transzendente Kurven und ihre Eigenschaften lassen sich in vielfältigen Zusammenhängen entdecken. Viele mathematisch relevante Handlungsweisen und Begriffe ergeben sich „wie von selbst". Und das alles unterstützt mathematisch sinnvolle Argumentation. Ortskurven bereichern die Mathematiklehre.

Grundlegendes zu Ortskurven

Ortskurven – auch Ortslinien genannt – werden von den Dynamischen Mathematik-Systemen (GeoGebra, Cinderella u.a.) in einer Lehr- und Lernsituation zunächst langsam punktweise erzeugt. Ein steuernder Punkt steht in geometrischem oder funktionalem Zusammenhang mit einem zweiten Punkt, für dessen „Weg" – die Ortskurve – man sich interessiert. Bei dieser Bewegung können die Lernenden die Fragestellung durchdringen und auch Vorhersagen über die Form der Ortskurve bestätigen oder widerlegen. Erst dann lässt man das System die ganze Ortskurve anzeigen. Sie wird intern als Spline aus allen im gewählten Fenster möglichen Stellungen berechnet, hat also keine algebraische oder funktionale Repräsentation. Neuerdings gibt es Programme, die dieses leisten (Schumann 2013), sie möchte ich nicht berücksichtigen.

Für die Lehre ist wichtig, dass diese Ortskurven auf weitere Veränderungen der geometrischen Konstellation mit Formänderungen reagieren. Dadurch entsteht eine gewisse Verallgemeinerung und damit eine zweite Stufe des Verstehens. Meist lässt sich dann in mathematischem Diskurs mit den Lernenden eine Klassifizierung der im gegebenen Kontext möglichen Kurven vornehmen.

Naturgemäß kann in einem Vortrag dieses Vorgehen sinnfällig verdeutlicht werden. Schwieriger ist dies in der hier vorliegenden Verschriftlichung. Die gezeigten Bilder sind also alle „dynamisch" zu lesen.

Reflexionen regen Strategien und Begriffe an

Das folgende Beispiel ist allgemein bekannt. Es hat verschiedene Einkleidungen, z.B. auch die rein physikalische als Lichtweg. Es dient sowohl der Begründung der Reflexion als auch der Vorbereitung der nächsten Schritte.

Geraden und die Feuerwehr

Die Feuerwehr, die in der Prärie einen Brand löschen soll und dazu vorher Wasser am Fluss holen muss, ist wenig realistisch, bietet aber gerade darum einen Schritt in die abstrahierende Welt der Mathematik.

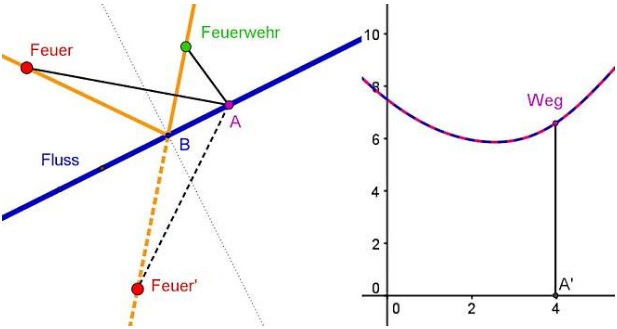


Abb. 1: Feuerwehrbeispiel mit Lösung und Ortskurve für die Weglänge

Zuerst sind nur die Feuerwehr und ein Weg zu dem Feuer zu sehen, dessen Länge rechts als Ordinate dargestellt ist. Erst in der experimentell durch Ziehen an A (gekoppelt mit A‘) gefundenen optimalen Lage kann die Idee, das Feuer zu spiegeln, entstehen. Gerade dieser Schritt, der dann auch den Beweis ergibt, hebt das Beispiel aus den üblichen Extremwertaufgaben heraus und führt im nächsten Beispiel weiter.

Parabelreflexion führt zu einem neuen Begriff

Abb. 2 ist als Schnitt durch eine innen verspiegelte Paraboloidfläche aufzufassen. Parabeltangenten werden intuitiv vom DMS übernommen. Ein achsenparallel einfallender Strahl wird am Einfallslot gespiegelt und bis zum zweiten Auftreffen auf die Parabel gezeichnet. Die reflektierte Parabelsehne zeichnet ihre Spur, wenn man an P zieht. Dabei erkennt man auf der Parabelachse einen Punkt, durch den alle Strahlen verlaufen, er wird Brennpunkt F genannt. Punkt F entspricht dem Feuer im vorigen Problem. Für alle Feuerwehrstellungen verläuft der reflektierte Strahl durch den Ort des Feuers.

Dort hat das Spiegeln von F zur allgemeinen Lösung und vertieftem Verständnis geführt, daher wird hier nun auch F gespiegelt. Die Rolle des Flusses spielt die Tangente.

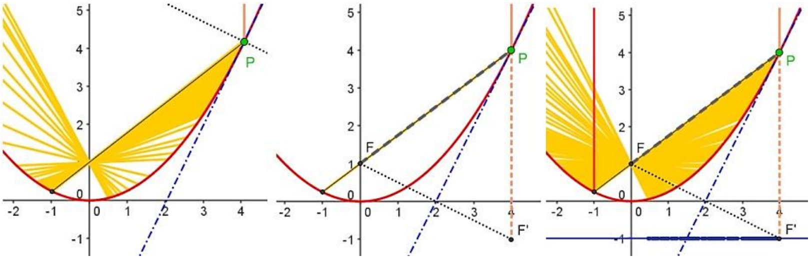


Abb. 2: Parabelreflexion führt zur Leitgeraden der Parabel

Zieht man nun an P, so wandert F‘. Die Ortslinie von F‘ ist eine zur x-Achse parallele Gerade. Nennt man den Abstand, den F von dieser Geraden hat, *p*, dann gilt für alle Punkte P der Parabel nach dem Höhensatz für das rechts ganz weiß gebliebene Dreieck $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = y \cdot \frac{p}{2}$, also $y = \frac{x^2}{2p}$. Ist man von einer Parabel $y = a \cdot x^2$ ausgegangen, so ist nun $p = \frac{1}{2a}$ und *Brennpunkt und Leitgerade* sind als neue Begriffe entdeckt.

Apollonius hat umgekehrt die *Parabel als den geometrischen Ort aller Punkte definiert, die von einem festen Punkt denselben Abstand wie von einer Geraden haben.* Eine entsprechende Realisierung im DMS ließe dann die Parabel als Ortskurve von P erscheinen, wenn man Q = F‘ auf einer Geraden zieht.

Strategien werden an Ellipsen und Hyperbeln fruchtbar

Ellipsen definieren und ihre Tangenten finden

Ellipsen gehören ja schon lange nicht mehr zum schulmathematischen Standard. Damit sich das je wieder ändern kann, haben die Universitäten die Verpflichtung, wenigstens den Lehramtsstudierenden Grundwissen zu Kegelschnitten nahezubringen. Vielleicht sollte man auch deren Potenzial für das Lernen von reichhaltiger Mathematik besser würdigen.

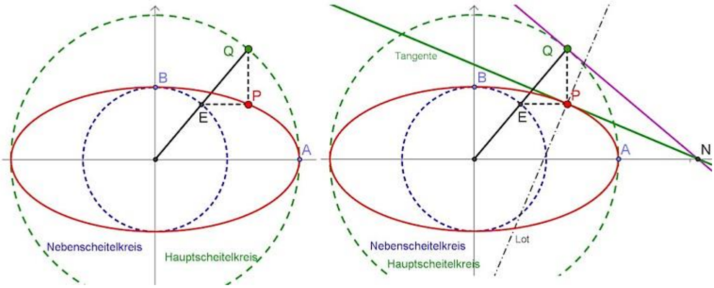


Abb. 3: Ellipse und ihre Tangente aus gestauchtem Kreis gewinnen

Definiert man die Ellipse als affines (hier: achsenparallel gestauchtes) Bild eines Kreises, so ergibt sie sich aus Hauptscheitelkreis und Nebenscheitelkreis als Ortskurve. Auch die Tangente kann man hieraus konstruieren. Ein DMS hat aber auch direkte Befehle dafür.

Erkundung der Reflexion an Ellipsen

Mancher hat von Brennpunkten der Ellipse wohl schon etwas gehört, vielleicht beim Keplerschen Gesetz. Es ist daher naheliegend, Strahlen von einem „Brennpunkt" starten zu lassen. Sie müssten dann aus Symmetriegründen durch den anderen Brennpunkt verlaufen. Die Lage der Brennpunkte kann man nun im DMS experimentell finden.

Dazu setzt man ein F erstmal irgendwo auf die Hauptachse und sieht sich an, wie die Strahlen reflektiert werden. Das ist nicht übersichtlich (Abb. 4 a). F und der zweite Brennpunkt G liegen sicher symmetrisch zur Nebenachse. Nun zieht man an F so, dass der reflektierte Strahl genau durch G verläuft (Abb. 4 b). Es zeigt sich, dass F und G in dieser Lage zu Recht *Brennpunkte* heißen.

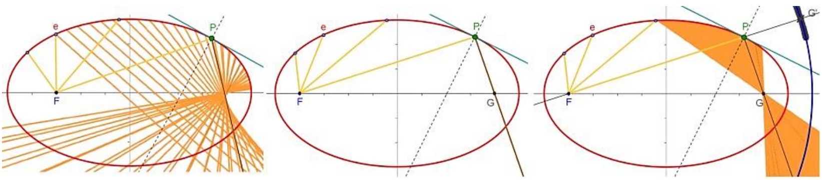


Abb. 4: Ellipsenreflexion führt zum Leitkreis der Ellipse

Weiterführung bei Ellipsen wie bei Parabeln

In Abb. 4 c) ist nun das Vorgehen von der Parabel übertragen. G wird zu G' an der Tangente gespiegelt. Die Ortskurve von G' ist ein Bogen und nicht eine Gerade wie im vorigen Beispiel. Ist dieser Bogen vielleicht ein Kreisbogen? Bei Ellipsen hat jeder Ellipsenpunkt P zu den Brennpunkten dieselbe Entfernungssumme. Aus der Konstanz der Streckensumme $\overline{FP}+\overline{PG}$ folgt wegen $\overline{PG}=\overline{PG'}$ die Konstanz von $\overline{FP}+\overline{PG'}=r$. Diese Strecke ist also der Radius eines Kreises um F. Die Ortskurve von G‘ ist also tatsächlich ein Kreis, er heißt *Leitkreis*.

Wieder kann man auch umgekehrt mit einem Punkt Q auf einem Kreis um F und einem Punkt G auf seinem Durchmesser eine Ellipse konstruieren (Abb. 5 a): Die Mittelsenkrechte von Strecke GQ schneidet den Radius FQ in P_s. Die Ortskurve von P_s ist eine Ellipse. Dieses ist die *Leitkreiskonstruktion der Ellipse*.

Bei der Leitkreiskonstruktion erscheinen unvermutet Hyperbeln

Zieht man G auf F, dann ist die Ortskurve von P_s ein Kreis mit dem halbem Radius des Leitkreises. Liegt G auf B, entartet die Ortskurve zu einem einzigen Punkt, nämlich F. Zieht man aber G nach rechts über den Leitkreis hinaus, so liegt P_s auf dem Strahl FQ und als Ortskurven erscheinen Hyperbeln. Ersichtlich ist nun die Entfernungsdifferenz von P_s zu den zwei festen Punkten F und G konstant, nämlich der Radius des Leitkreises. (Abb. 6 b).

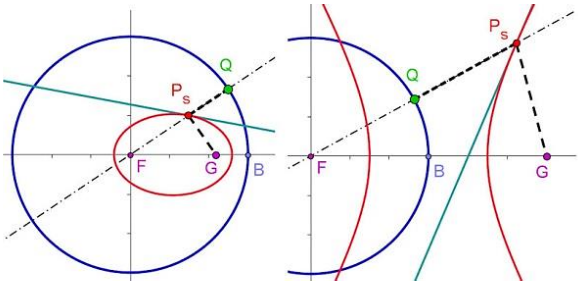


Abb. 5: Leitkreiskonstruktion: Ellipse, Hyperbel

Reflexion an Hyperbeln

Abb. 5 b) zeigt im Grunde schon den Verlauf der Strahlen. Abb. 6 zeigt die Reflexion von Strahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen. Sie werden an der Hyperbel so reflektiert, als kämen sie von dem anderen Brennpunkt. Dabei muss man sich bei Abb. 6 b) den rechten Hyperbelast wegdenken. Der andere Brennpunkt wird zum virtuellen Strahlenzentrum. Diese Konstellation findet Anwendung in astronomischen Geräten.

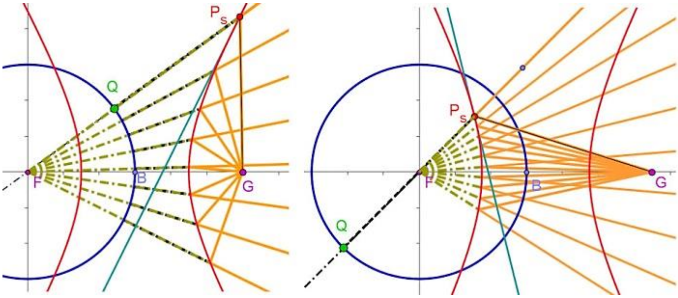


Abb. 6: Reflexion an der Hyperbel

Strahlengang im Röntgen-Teleskop

Durch Kombinationen von Paraboloid- oder Ellipsoidspiegeln und Hyperboloidspiegeln kann man in Teleskopen und Mikroskopen Brennweiten verlängern und verkürzen.

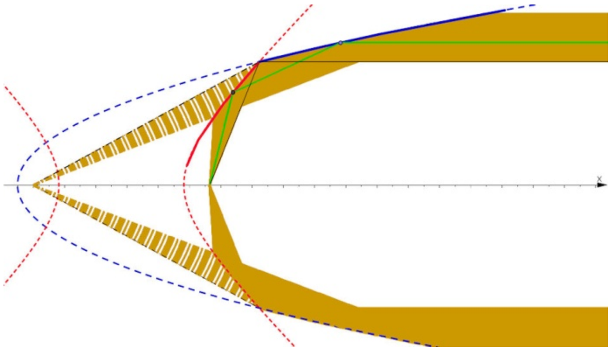


Abb. 7: Röntgen-Teleskop, Wolter-Optik Typ I

In Abb. 7 sind eine Parabel und eine Hyperbel zu sehen, die man sich um die x-Achse rotiert als Körper vorstellen muss. Links haben sie einen gemeinsamen Brennpunkt. Von rechts parallel einfallende Strahlen werden zuerst an dem Parabelspiegel zu diesem Brennpunkt hin reflektiert, dann aber von dem Hyperbelspiegel zu dem anderen Brennpunkt der Hyperbel geleitet. In der technischen Realisierung werden mehrere solche Spiegelpaare ineinander geschachtelt. (Last (2013))

Der Strahlengang ist hier als Spur der entsprechenden Strahlen und Strecken in einfacher Weise verdeutlicht. Die konfokalen Kegelschnitte sind mit ihrer impliziten Gleichung in GeoGebra gezeichnet.

Namensgeheimnis der Kegelschnitte

Dass die Kegelschnitte als Schnittkurven beim Schneiden eines Doppelkegels erscheinen, wundert – zumindest sprachlich – niemanden. Gleichwohl muss dies bewiesen werden. Man kann bekanntlich mathematische Objekte nur in *einem* Kontext definieren, in anderen Kontexten - die mitunter auch für eine Definition gut sind - müssen dann Eigenschaften bewiesen werden. Zum Beispiel ist die Fadenkonstruktion zu beweisen, wenn die Ellipse als Kreisstauchung definiert wird. Diese Beweise sind im Skriptum durchgeführt (Haftendorn 1996-2013, Bereich Kurven → Kurvenheft). Gerade in diesem anschaulichen und dennoch mathematisch strengen Gebiet kann man Lernenden, insbesondere Lehramtsstudierenden, gut eine Einsicht in den Theorieaufbau eines mathematischen Themenfeldes ermöglichen.

Die speziellen Namen *Hyperbel, Parabel, Ellipse*, haben – wie zu erwarten – auch einen mathematischen Hintergrund (Schupp (1988) S.14). Es geht dabei um den Flächenvergleich von Sperrungsrechteck und Ordinatenquadrat.

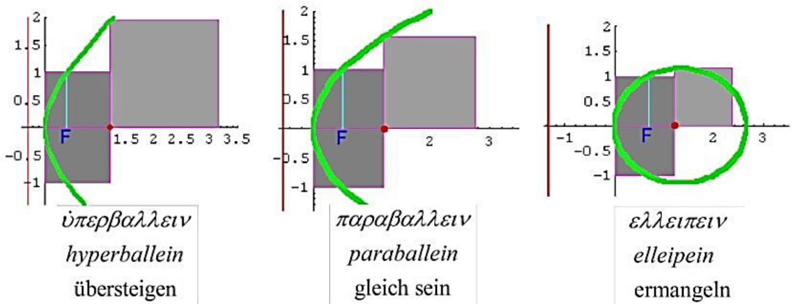


Abb. 8: Namensgeheimnis Hyperbel, Parabel, Ellipse

An einer Stelle der x-Achse wird aus der Ordinate ein *Quadrat* gebildet. Das *Sperrungsrechteck* ergibt sich aus dem Abstand dieser Stelle zum Scheitel und dem Doppelten der Ordinate am Brennpunkt. Ersichtlich „übersteigt“ in Abb. 8 bei der Hyperbel das Ordinatenquadrat das Sperrungsrechteck, bei der Parabel „sind beide gleich groß“ bei der Ellipse „mangelt es“ dem Ordinatenquadrat an Fläche im Vergleich zum Sperrungsrechteck.

Diese Eigenschaften ergeben sich am Einfachsten aus der gemeinsamen Scheitelgleichung der Kegelschnitte $y^2 = 2\,p\,x - \left(1-\varepsilon^2\right)x^2$. Dabei ist *p* die

Ordinate am Brennpunkt. Der Klammerterm ist bei der Hyperbel negativ, bei der Parabel Null und bei der Ellipse positiv. Diese Gleichung ergibt sich aus der Leitgeradenkonstruktion der Kegelschnitte (Haftendorn 1996-2013, Bereich Kurven, Kegelschnitte).

In der Literaturwissenschaft ist eine *Parabel* eine gleichnishafte Erzählung. Von einem *elliptischen* Stil spricht man, wenn ein Autor Sätze verkürzt und Worte auslässt. *Hyperbolisch* schreibt er, wenn er im Ausdruck übertreibt.

Wege von Herr und Hund: Konchoiden

Konchoide des Nikomedes oder Hundekurve

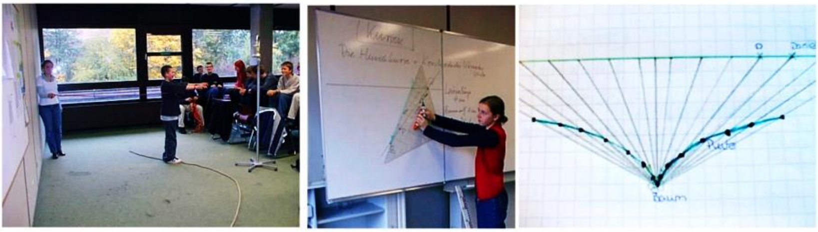


Abb. 9: Hundekurve in der 8. Klasse

Der Umgang mit Kurven sollte im Unterricht zunächst möglichst enaktiv erfolgen. Bei der Hundekurve geht „Herrchen“ auf einer geraden Straße und hält seinen „Hund“ an einer Leine fester Länge. Dieser Hund strebt in jedem Moment einem „Baum“ zu, hier repräsentiert durch den Kartenständer. Der Weg des Hundes wird mit einem langen Seil ausgelegt. Die Umsetzung in „Geometrie“ an der Tafel geschieht im Klassengespräch, dann hat jeder Zeit, die Konstruktion punktweise im Heft zu zeichnen. Danach wird die Konstruktion gemeinsam im Klassengespräch mit einem DMS realisiert.

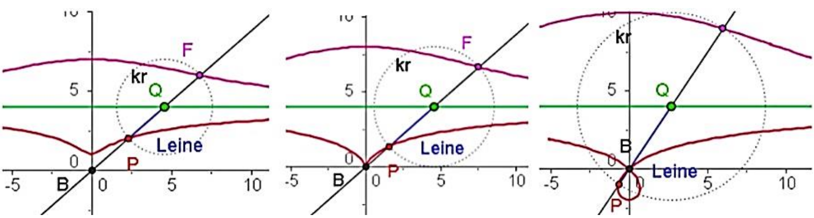


Abb. 10: Hundekurve im DMS

Der zweite Ast wurde von den Lernenden (1998) als der Weg von „Fiffi“, der Angst vor dem Baum hat, interpretiert. Die drei wesentlichen Formen ergeben sich experimentell bei Variation der Leinenlänge. Die Erkenntnis einer solchen mathematischen Systematik ist lehrreich und befriedigt den Forschungsdrang. Mit der Schlaufe haben die Lernenden kein Problem: „mathematische Hunde machen das eben so“. Es ist natürlich wichtig, dass die Lehrperson nicht so tut, als handele es sich um ein „reales“ Problem.

Diese Hundekurve heißt auch *Konchoide des Nikomedes* (um 200 v. Chr.). Dieser kannte nur den oberen Ast und nannte ihn *Muschelkurve*. (Schupp 1995, S. 44) Allgemein erhält man Konchoiden, wenn „Herrchen“ auf einem beliebigen Weg wandert. Die Stellung des Baumes und die Leinenlänge sind dann formbestimmende Parameter. Hier tut sich ein weites Erkundungsfeld auf.

Die Kreisstraße ergibt Pascalsche Schnecken

Wenn „Herrchen“ auf einem Kreis wandert und der Baum auf dem Kreisrand steht, ergeben sich *Pascalsche Schnecken*. Sie sind benannt nach Étienne Pascal (1588-1651), dem Vater von Blaise Pascal. Auch hier (Abb.11) ergeben sich drei Grundformen, aber kein weiterer Ast.

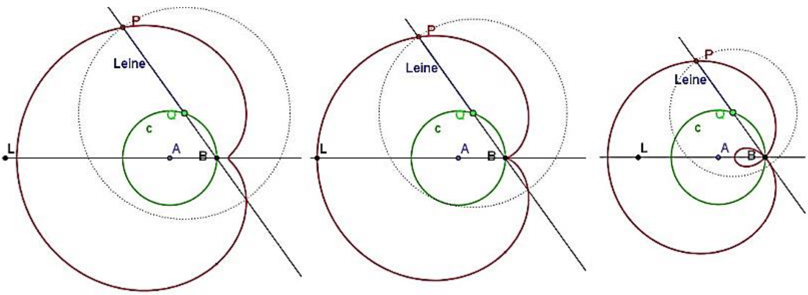


Abb. 11: Pascalsche Schnecken, Kardioide in der Mitte

Bemerkenswert ist, dass die Konchoiden eine ganz einfache Gleichung haben, wenn man die Polarkoordinaten des Weges $R = R(\varphi)$ kennt und der Baum im Ursprung steht: $r = r(\varphi) = R(\varphi) \pm k$ mit dem Parameter k als Leinenlänge.

Das reichhaltige Gebiet der algebraischen Kurven lässt sich in einem Aufsatz bei Weitem nicht ausloten (siehe Haftendorn 1996-2013).

Reflexionen an Kreisen

Die Nephroide und die Kaffeetasse

Reflexionen und Brechungen an Kreisen lassen sich besonders leicht geometrisch realisieren, da das Einfallslot stets eine Radiusgerade ist. Wenn sich dabei Strahlen so überlagern, dass eine helle Hüllkurve entsteht, so heißt diese *Kaustik* (Brennkurve). *Diakaustiken* entstehen bei optischen Linsen. Die bei Reflexionen entstehenden Kurven heißen *Katakaustiken*.

Variationen zum Thema „Reflexion“ führen somit zu weiteren Begriffsbildungen.

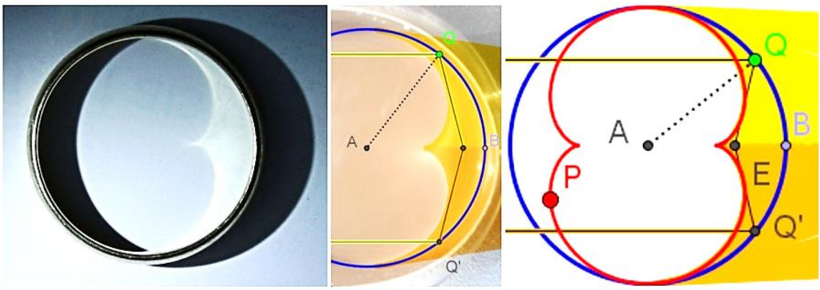


Abb. 12: Paralleles Licht ergibt als Katakaustik die Nephroide

Die Kardiode als Katakaustik

Ist nun eine punktförmige Lichtquelle auf dem Rand des Kreises, so hüllen die reflektierten Strahlen eine apfelförmige (herzförmige) Kurve ein. Handwerklich erhält man sie im DMS als *Spur* der reflektierten Strahlen.

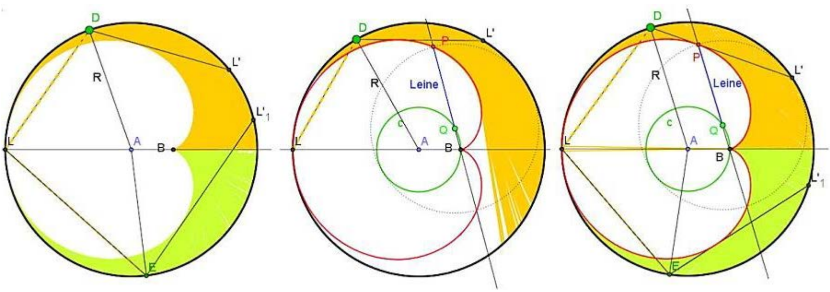


Abb. 13: Eine punktförmige Lichtquelle ergibt als Katakaustik die Kardioide

Wenn nun die Idee ist, es könnte sich um eine Kardioide handeln, ist klar, dass dann der Radius des „Wanderkreises“ aus Abb. 11 Mitte dreimal in den Abstand Lichtquelle-Mittelpunkt passen muss. Trägt man einen derartigen Kreis und die zugehörige Konstruktion eines Punktes P einer Pascalschen Schnecke ein (Abb. 13 Mitte), so liegt nahe, P auf den Berührpunkt des reflektierten Strahls zu ziehen. In Abb. 13 rechts sieht man, dass nun das Einfallslot und die Verbindungsstrecke von P zum Baum B parallel sind. Dieses lässt sich tatsächlich mit geometrischer Argumentation für jede Stellung beweisen (ausführlich in Haftendorn 1996-2013) und die Hüllkurve stimmt mit der Ortskurve von P überein.

Es zeigt sich hier, dass ein reichhaltiger mathematischer Werkzeugkasten den Blick auf Mathematik weiten kann. Trivial wird es dadurch nicht.

Weitere Phänomene, in denen Ortskurven helfen

Im Folgenden werden nur noch als Ausblick Themen genannt, bei denen Ortskurven wesentlich werden.

Gelenkkonstruktionen

Der *Inversor von Peaucellier* (Abb.14 links) ist ein Gestänge aus zwei Schenkeln der Länge *b*, die gegenüberliegende Punkte einer Raute mit der Seitenlänge *a* (mit *a*<*b)* fassen. Wenn der innere freie Punkt Q der Raute auf einem Kreis läuft, dann bewegt sich der äußere freie Punkt P auf einer Geraden. Damit wird die Kreisbewegung von Q in eine exakt geradlinige Bewegung von P übersetzt. Dieses hat in der technischen Mechanik eine große Bedeutung. Der Beweis erfolgt dadurch, dass mit geometrischen Mitteln $\overline{OQ} \cdot \overline{OP} = b^2 - a^2$ nachgewiesen wird. Dieses konstante Produkt beschreibt gerade die Inversion am Kreis.

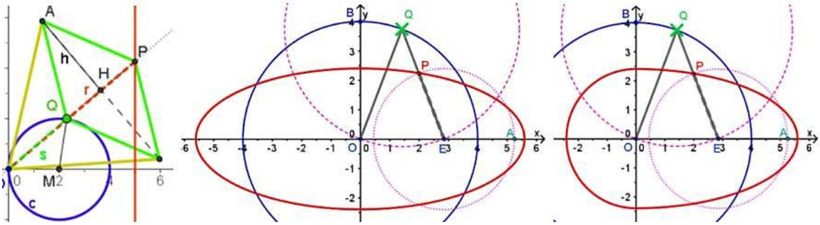


Abb. 14: Gelenkkonstruktionen: Inversor und Ellipsenzirkel

Der *Ellipsenzirkel* (Abb. 14 Mitte) ist eine Gelenkkonstruktion, bei der $\overline{OQ} = \overline{QE} = c$ und $\overline{PE} = b$ ist, wobei Q auf einem Kreis und B auf einer Geraden durch dessen Mittelpunkt verläuft.

In Abb. 14 rechts ist das *Punktsprung-Phänomen* demonstriert. In GeoGebra kann man in den erweiterten Einstellungen die „Kontinuität“ AN oder AUS schalten. Wenn man nicht für Kontinuität sorgt, wird an die halbe Ellipse ein Halbkreis angesetzt, denn dann tauschen in den Berechnungen des Systems O und E ihre Rollen. Der Kreis um E, der P erzeugt, wird zum Kreis um O. Da sich O nicht bewegt, entsteht links der Halbkreis. Bei „Kontinuität“ bleibt E Kreismittelpunkt. Die Diskontinuität ist auch in den Dynamischen Geometriesystemen (DGS) ZuL und Dynageo zu beobachten. Das DGS Cinderella (Kortenkamp 1999) ist mathematisch aufwendiger definiert und vermeidet dadurch grundsätzlich das Punktsprung-Phänomen.

Extremwertaufgaben

Als entscheidendes Werkzeug bieten sich Ortskurven bei Extremwertaufgaben an. Dies sind Aufgaben, bei denen eine in geometrischem oder analytischem Zusammenhang definierte „Zielgröße“ optimiert werden soll. Die Ortskurve, die diese Größe in einem passenden Koordinatensystem darstellt, kann erzeugt werden *bevor* eine Funktionsgleichung im Sinne der Analysis vorliegt. Mit ihr kann zunächst interaktiv das Problem erkundet und verstanden werden. Die Nebenbedingungen müssen in dem Moment auch noch nicht termmäßig erfasst sein, sie ergeben sich zunächst durch Abgreifen von Streckenlängen o.ä. aus dem DGS. Der nachfolgende Unterricht kann dann eine fundierte rechnerische Behandlung initiieren.

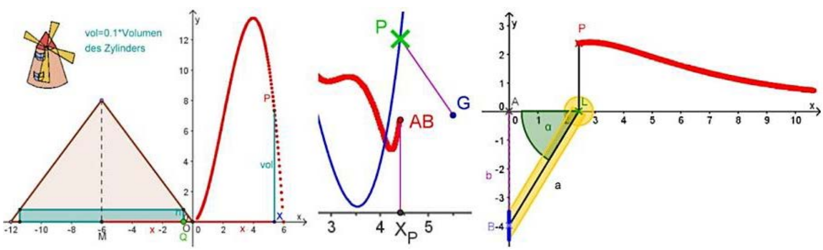


Abb. 15: Wasser im Mühlendach, Abstand von einer Funktion, Ausleuchtung eines Bildes

Die in Abb. 15 gezeigten Beispiele stehen prototypisch für diesen Aufgabentyp. Diese und viele weitere Beispiele mit GeoGebra und TI Nspire sind auf der Website (Haftendorn 1996-2013) zu finden (Bereiche Analysis/Ortslinien und Analysis/Extremwertaufgaben).

Polarkoordinaten

Alle graphikfähigen (und CAS-) Taschenrechner ermöglichen einen einfachen Zugriff auf Polarkoordinaten. Das gilt auch für DMS wie GeoGebra, Cinderella und andere.

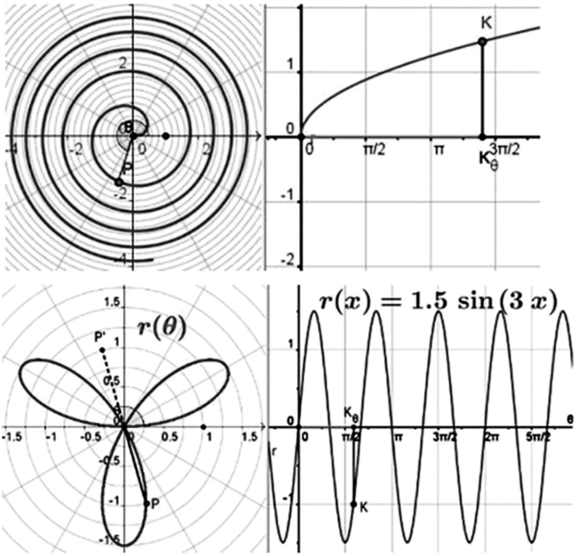


Abb. 16: Wurzelspirale und Rosette

GeoGebra u. a. DMS ermöglichen zwei gekoppelte Grafikfenster nebeneinander. Hier wird damit die simultane Sicht auf die eigentliche Polardarstellung und eine zughörige kartesische Darstellung vorgeschlagen. Die Polarkurve ist darin die Ortskurve eines Punktes $P = (r(\theta), \theta)$, der sich interaktiv synchron mit dem Punkt $K = (\theta, r(\theta))$ bewegt. K läuft dabei im kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x und $r(x)$ auf dem Graphen der Funktion $x \mapsto r(x)$ (Haftendorn 1996-2013, Bereich Analysis/Polarkoordinaten).

Fazit: Wohin führen Ortskurven?

Zusammenfassend kann man wohl sagen:

1. Ortskurven dienen dem Verstehen.
2. Sie entschleunigen durch die langsame interaktive Entstehung.
3. Sie regen das mathematische Argumentieren an.
4. Sie führen zu neuen Begriffsbildungen.
5. Sie regen rechnerische Methoden an.
6. Sie erlauben Prüfung der Rechnungen.
7. Sie regen Variieren und Erkunden an.
8. Sie sind von der Sek.I bis in die Hochschullehre einsetzbar.
9. Sie ermöglichen eine reichhaltige Mathematiklehre.
10. *Ortskurven führen in die wunderbare Welt der Mathematik.*

Literatur

Haftendorn, Dörte (2010). Mathematik sehen und Verstehen, Heidelberg, Springer Spektrum Verlag.

Haftendorn, Dörte (1996-2013). http://www.mathematik-verstehen.de Bereiche Algebraische Kurven, Analysis und andere.

Kortenkamp, U. (1999). Foundations of Dynamic Geometry, Dissertation ETH Zürich N° 13403.

Last, Arndt. (2013). www.x-ray-optics.de Bereich Optiktypen, Reflexionsoptiken, Gekrümmte Spiegel.

Schumann, H. (2013). Vortrag GDM-Tagung Münster, noch unveröffentlicht.

Schupp, Hans. (1988). Kegelschnitte. In: Knoche, N. und Scheid, H.: Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd. 12, Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Schupp, H., Darbrock, H. (1995). Höhere Kurven. In: Knoche, N. und Scheid, H.: Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd. 28, Mannheim, BI Wissenschaftsverlag.

Autorenverzeichnis

Dipl.-Päd. Christian Dohrmann
Institut für Mathematik (Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik)
Martin-Luther-Universität
Herrenstraße 20
06108 Halle (Saale)
christian.dohrmann@mathematik.uni-halle.de

Prof. Dr. Günter Graumann
Fachbereich Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstrasse 27
33615 Bielefeld
graumann@math.uni-bielefeld.de

Prof. Dr. Dörte Haftendorn
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Leuphana Universität Lüneburg
Scharnhorststr. 1
21335 Lüneburg
Haftendorn@uni.leuphana.de

Dr. Ana Kuzle
Fachbereich Mathematik
Universität Paderborn
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
akuzle@math.upb.de

Verena Rembowski
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Universität des Saarlandes
Campus
66123 Saarbrücken
rembowski@math.uni-sb.de

Marie-Christine von der Bank
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Universität des Saarlandes
Campus
66123 Saarbrücken
mcvdb@t-online.de

Dr. Hans Walser
Mathematisches Institut
Universität Basel
Rheinsprung 21
CH-4051 Basel
hwalser@bluewin.ch
Homepage: www.math.unibas.ch/~walser/

Prof. Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach
Fachbereich 08 Physik, Mathematik und Informatik
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Staudinger Weg 9
55099 Mainz
weisspid@uni-mainz.de

Herausgeber

Prof. Dr. Andreas Filler
Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Unter den Linden 6
D-10099 Berlin
filler@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Matthias Ludwig
Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik
Goethe-Universität Frankfurt
Senckenberganlage 9
D-60325 Frankfurt
ludwig@math.uni-frankfurt.de