

# Senkrecht – Vom Phänomen zum Relationsbegriff

Günter Graumann, Bielefeld

## Einleitung

Der Ausdruck „senkrecht“ taucht im Geometrieunterricht von der Grundschule bis zur Sekundarstufe II immer wieder auf. Allerdings ist dabei nicht immer klar, dass es sich um einen Relationsbegriff handelt. So kann z.B. eine Linie nicht senkrecht sein, sondern nur „senkrecht zu“ etwas. Dass ein solcher Relationsbegriff in der Sache komplexer als ein Eigenschaftsbegriff ist und welche Phänomene hinter der teilweise falschen Verwendung des Begriffs „senkrecht“ stecken, sollte allen Lehrerinnen und Lehrern bewusst sein. Einige wichtige Informationen dazu, zu den verwendeten Wörtern und mathematisch strukturellen Gesichtspunkten seinen im Folgenden dargestellt.

## Das Phänomen „rechter Winkel – senkrecht“ in der Umwelt

In der vom Menschen geschaffenen heutigen Umwelt finden wir überall Phänomene, die mit rechten Winkeln oder anders ausgedrückt mit zueinander senkrechten Linien bzw. Kanten oder zueinander senkrechten Flächen zu tun haben.

Fensterkanten, Bilderrahmen oder Kanten von Papieren und Büchern sind in der Regel zueinander senkrecht, quaderförmige Verpackungen oder Bücherregale haben zueinander senkrechte Seitenflächen und Kanten, eine Dose steht senkrecht zur Regalfläche, etc.

In der natürlichen Umwelt kommen rechte Winkel dagegen nur sehr selten vor. Das für den Menschen wichtigste Phänomen ist diesbezüglich der aufrechte Gang, d.h. eine zur „idealisierten“ Erdoberfläche senkrechte Linie oder genauer eine gerade Linie, die auf den Mittelpunkt (d.h. Schwerpunkt) der Erde ausgerichtet ist. Der Bau eines stabilen Turms (von Menschen in der Antike und später oder von Kindern mit Bauklötzen errichtet) muss sich auch an einer solchen Richtung im Raum orientieren. Hier bilden physikalische Gesetze der Natur eine Rolle. Deshalb haben die Wörter, die in verschiedenen Sprachen mit dem Phänomen „senkrecht“ verbunden werden, alle hier ihren Ursprung.

## Etymologische Betrachtungen zum Wortfeld „senkrecht“

Das Wort „*senkrecht*“ setzt sich aus den Wortteilen „senk“ (bezogen auf das „Senkblei“, das ja auf den Mittelpunkt der Erde zeigt) und „recht“ (gemeint „richtig“ oder „gerichtet“) zurück. Den gleichen Ursprung hat das Wort „*lotrecht*“, wobei das Lot ein anderer Name für das Senkblei ist und vornehmlich von Maurern und beim Angeln benutzt wird.

Im Deutschen seltener, aber in vielen anderen Sprachen (z.B. im Englischen, Französischen, Italienischen, Spanischen, Russischen, Schwedischen) wird der Ausdruck „*perpendicular*“ verwendet. Dieser Ausdruck ist mit dem „Perpendikel“ einer Uhr verwandt und geht auf das lateinische Wort

„perpendere“ zurück, das dort „genau abwägen“ bedeutet und als Substantiv „perpendicularum“ auch im Sinne von „Senkblei“ verwendet wurde.

Mit Blick auf den Winkel und dessen Spitze (eng./lat. „vertex“) wird, zwar selten im Deutschen aber häufiger in anderen Sprachen, das Wort „**vertikal**“ an Stelle von „senkrecht“ verwendet, wobei man es allerdings heutzutage in der Regel mit der Richtung zum Erdmittelpunkt verbindet.

Das in der Fachsprache oft verwendete Wort „**orthogonal**“ ist dem Griechischen entlehnt mit den Wortteilen „orthos“ (= richtig, recht-) und „gonia“ (= Winkel). Es handelt sich also um ein Fremdwort für „**rechtwinklig**“. Ein rechter Winkel ist also ein „richtiger“ Winkel im Sinne von „herausgehobener Winkel“. Man könnte auch sagen ein „gerechter Winkel“, da zu seinem Nebenwinkel gleich groß ist.

Auf die Bedeutung „vom rechten Maß“ (lat. „norma“ = Maß) geht die Verwendung des Wortes „**normal**“ (vgl. auch „Normale“) zurück, das in der analytischen und synthetischen Geometrie üblich ist.

Für die Schule und die Fachmathematik ist es angebracht, sich um eine eindeutige Wortwahl zu bemühen bezüglich der physikalischen Eigenschaft der Richtung auf den Erdmittelpunkt und der geometrischen Relation zwischen Linien und Flächen (insbesondere Geraden und Ebenen). In den letzten Jahrzehnten hat sich auch schon eine geeignete Festlegung herausgebildet. Diese sollte deshalb in Zukunft flächendeckend vorherrschend sein. Zur Verdeutlichung zeige ich sie hier auf:

- Für die **geometrische Relation** zwischen zwei Geraden bzw. einer Geraden und einer Ebene bzw. zweier Ebenen verwenden wir die Wörter „**senkrecht zu**“ oder „**orthogonal zu**“ oder wir sprechen von einem „**rechten Winkel**“.
- Die **physikalische Eigenschaft** in Richtung auf den Erdmittelpunkt (und senkrecht zur idealisierten Erdoberfläche bezeichnen wir als „**lotrecht**“.

Man sollte dann in der Geometrie auch *nicht* mehr, wie früher meist üblich vom „Lot fällen“ bzw. „Lot errichten“ sprechen, sondern die Ausdrücke „Senkrechte (oder Orthogonale) konstruieren“ oder eventuell auch „Senkrechte (Orthogonale) fällen“ bzw. „Senkrechte (Orthogonale) errichten“ verwenden.

### Geometrische Charakterisierungen von Orthogonalität

Kinder lernen oft den Begriff „senkrecht zu“ im Zusammenhang mit dem Geodreieck. Dabei wird dann meist die Orthogonalität zweier gerader Linien<sup>1</sup> überprüft und es werden zu gegebenen geraden Linien zu diesen senkrechte gerade Linien konstruiert. Man sollte ergänzend dazu aber auch die Orthogonalität von Falllinien herstellen, z.B. indem man ein ebenes Papier

---

<sup>1</sup> Die Erweiterung der Orthogonalität auf Kurven etc. ist ein Aspekt, der frühestens bei Themenfeld „Kreis“ auftritt und systematisch erst bei der Behandlung von Kurven und Flächen in der Sekundarstufe II behandelt werden kann.

zuerst einmal irgendwie faltet (um eine gerade Linie zu erhalten) und dann das gefaltete Blatt so faltetet, dass die erste Faltlinie auf sich fällt. Wenn man das Blatt dann wieder vollständig auffaltet, hat man zwei zueinander senkrechte Faltlinien<sup>2</sup>. Dabei kann man die Eigenschaft erkennen, dass eine zur ersten geraden Linie senkrechte Linie beim Falten bzw. Spiegeln an der ersten geraden Linie auf sich fällt. Im zusammengefalteten Zustand kann man außerdem erkennen, dass alle vier von den beiden zueinander senkrechten Faltlinien Winkelfelder deckungsgleich, d.h. gleich groß, sind.

Wichtig ist es auch, dass Kinder Erfahrungen mit rechten Winkeln in ganz verschiedenen Lagen im anschaulichen Raum machen und dass an der Tafel senkrechte Geradenpaare nicht nur parallel zu den Tafelkanten vorkommen. Wegen des historischen und entwicklungspsychologischen Hintergrundes von lotrechter und waagerechter Linie als Prototypen für senkrechte Linien werden rechte Winkel an Figuren oft nur in dieser ausgezeichneten physikalischen Lage erkannt. In der Geometrie ist ein Begriff wie „senkrecht zu“ aber nicht von der Lage abhängig. Das muss im Unterricht bewusst reflektiert werden.

Es ist hier nicht der Ort, auf weitere methodische Einzelheiten bezüglich des Themenfeldes „senkrecht zu“ - wie etwa dem Zählen von Paaren zueinander senkrechten Kanten und Paaren zueinander senkrechten Seitenflächen bei einem Quader - einzugehen. Es sei hier lediglich erwähnt, dass man in der Sekundarstufe I die räumliche Geometrie miteinbeziehen sollte. Die folgenden *geometrischen Charakterisierungen* sollte dabei jede Lehrkraft im Hinterkopf haben.

In der ebenen Geometrie sind zwei verschiedene, sich schneidende Geraden  $g$ ,  $h$  *senkrecht zueinander*, wenn sie eine der folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Alle vier von  $g$  und  $h$  gebildeten Winkelfelder sind gleichgroß, d.h. kongruent zueinander.
- Bei der Spiegelung von  $h$  an  $g$  geht  $h$  in sich über und bei der Spiegelung von  $g$  an  $h$  geht  $g$  in sich über.
- Für jeden Punkt  $P$  von  $g$  ist die kürzeste Verbindung mit  $h$  die Verbindungsstrecke von  $P$  mit dem Schnittpunkt von  $g$  und  $h$  und für jeden Punkt  $P$  von  $h$  ist die kürzeste Verbindung mit  $g$  die Verbindungsstrecke von  $P$  mit dem Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ .

In der räumlichen Geometrie sind zwei, sich schneidende Ebenen  $E$ ,  $F$  *senkrecht zueinander*, wenn sie eine der folgenden Eigenschaften erfüllen:

- Alle vier von  $E$  und  $F$  gebildeten Winkelkeile sind kongruent zueinander.

---

<sup>2</sup> Es sei nebenbei erwähnt, dass man zwei zueinander parallele gerade Faltlinien erhält, wenn man zur ersten Faltlinie eine weitere senkrechte Faltlinie erzeugt. Dahinter steht die Charakterisierung, dass zwei Geraden, die eine gemeinsame senkrechte Gerade haben, zueinander parallel sind.

- Bei Spiegelung von  $F$  an  $E$  geht  $F$  in sich über und bei Spiegelung von  $E$  an  $F$  geht  $E$  in sich über.
- Es gibt eine dritte Ebene, so dass die aus den drei Ebenen gebildeten Schnittgeraden paarweise zueinander senkrecht sind.

In der räumlichen Geometrie ist eine Gerade  $g$  zu einer sie schneidenden Ebene  $E$  *senkrecht*, wenn eine der folgenden Eigenschaften erfüllt ist:

- Bei Spiegelung von  $g$  an  $E$  geht  $g$  in sich über und bei Spiegelung von  $E$  an  $g$  geht  $E$  in sich über.
- Für jeden Punkt  $P$  von  $g$  ist die kürzeste Verbindung mit  $E$  die Verbindungsstrecke von  $P$  mit dem Schnittpunkt von  $g$  und  $E$  und für jeden Punkt  $P$  von  $E$  ist die kürzeste Verbindung mit  $g$  die Verbindungsstrecke von  $P$  mit dem Schnittpunkt von  $g$  und  $E$ .
- Die Gerade  $g$  ist senkrecht zu jeder Geraden  $h$ , die in der Ebene  $E$  liegt und durch den Schnittpunkt von  $g$  und  $E$  geht.

Um eine vertiefte Vorstellung von der Relation der Orthogonalität zu erhalten, sollten alle diese Charakterisierungen bzw. damit zusammenhängende umweltliche Phänomene im Unterricht der Sekundarstufe irgendwann einmal thematisiert werden. Ob man sich dabei für jeweils eine Charakterisierung (etwa die in allen drei Fällen auftretende über die Spiegelung) als Definition ausgibt und die anderen als gleichwertige Charakterisierungen behandelt sei dabei der einzelnen Lehrperson bzw. dem vorliegenden Lehrbuch überlassen.

### Strukturelle Eigenschaften der Orthogonalität

Aus der Elementargeometrie kennen wir ein paar grundlegende Eigenschaften der Orthogonalität, die in abstrakten synthetischen Geometrie in Form von Axiomen oft auch als definierende Eigenschaften der Orthogonalität verwendet werden. Sie sollten natürlich in der Schulgeometrie auch einen geeigneten Platz finden. Solche Eigenschaften seien hier abschließend genannt.

#### Schnittpunkt bzw. Schnittgerade:

- Zwei zueinander senkrechte Geraden haben genau einen gemeinsamen Punkt (und haben deshalb auch genau eine gemeinsame Ebene).
- Zwei zueinander senkrechte Ebenen haben genau eine Gerade gemeinsam.
- Eine zu einer Ebene senkrechte Gerade hat mit dieser Ebene genau einen gemeinsamen Punkt.

### Eindeutige Konstruktion einer Senkrechten:

- Zu einer Geraden einem nicht auf ihr liegendem Punkt gibt es genau eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und zu der gegebenen Geraden senkrecht ist.
- Zu einer Geraden und einem auf ihr liegenden Punkt sowie eine die Gerade enthaltene Ebene gibt es genau eine Gerade, die durch den Punkt geht und in der gegebenen Ebene liegt und zur gegebenen Geraden senkrecht ist.
- Zu einer Ebene und einem beliebigen Punkt gibt es genau eine Gerade, die durch den Punkt geht und zu der vorgegebenen Ebene senkrecht ist.
- Zu einer Geraden und einem beliebigen Punkt gibt es genau eine Ebene, die durch den Punkt geht und zu der vorgegebenen Geraden senkrecht ist.
- Zu einer Ebene und einem beliebigen Punkt gibt es unendlich viele Ebenen, die durch den Punkt gehen und zu der gegebenen Ebene senkrecht sind. Alle diese Ebenen haben eine Gerade gemeinsam, die zu der gegebenen Ebene senkrecht ist.

### Relationseigenschaft:

- Die Orthogonalität in der Geradenmenge bzw. in der Ebenenmenge ist eine irreflexive und symmetrische Relation.