Von der brennenden Kerze über die Zentralkollineation zur Gruppe der projektiven Abbildungen

Sebastian Kitz, Wuppertal

I Zentralprojektion

Eine brennende Kerze kann in guter Näherung als punktförmige Lichtquelle aufgefasst werden, d.h. alle Lichtstrahlen breiten sich von einem Punkt aus geradlinig in den Raum aus. Nun betrachtet man die in der folgenden Abbildung dargestellte Situation, in der das Licht nur einen kleinen Bereich einer Ebene (hier in Form eines Dreiecks) durchdringen kann und ansonsten von ihr abgeschirmt wird. Die Ebene wirkt also als Blende. Hinter der Blende entsteht auf einer zweiten Ebene ein Bild des Dreiecks.

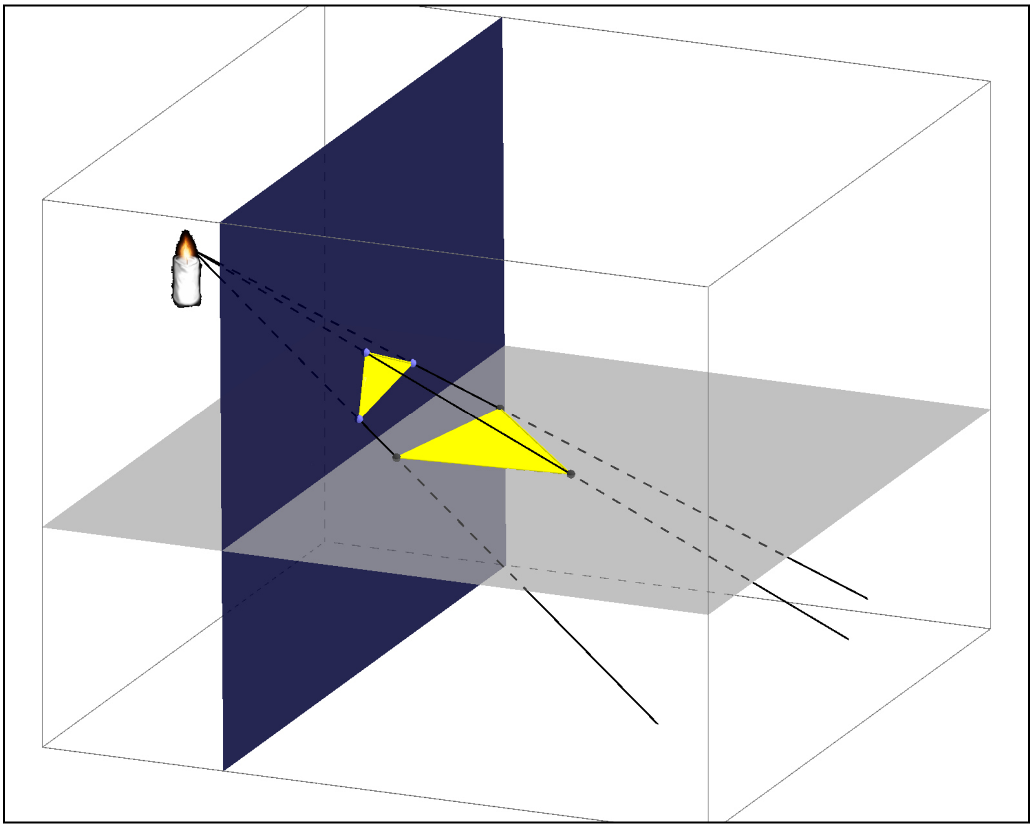

Abbildung 1 Zentralprojektion

Nimmt die Entfernung der Lichtquelle zu, geht die Zentralprojektion in die Parallelprojektion über.

Es stellt sich die Frage, von welchen Faktoren die Form des Bildes abhängt. Mögliche relevante Aspekte könnten sein:

- Position der Kerze
- Form der Blendenöffnung
- Lage der Ebenen zueinander

Darüber hinaus ist von Interesse, welche geometrische Beziehung zwischen der Form der Blendenöffnung und dem entstehenden Bild besteht. Kann beispielsweise die Situation eintreten, dass die beiden Figuren ähnlich sind?

Mathematisch gesehen handelt es sich bei der oben dargestellten Situation um ein Beispiel für eine Zentralprojektion einer ebenen Figur in eine zweite Ebene, also eine perspektive Abbildung. Gewöhnlich geht man bei der Zentralprojektion davon aus, dass die Urbildebene E horizontal liegt und die Bildebene E' orthogonal dazu verläuft. Urbild- und Bildebene schneiden sich in der *Achse* a. Durch das Projektionszentrum Z (auch *Augpunkt* genannt) verläuft durch jeden Punkt P der Urbildebene ein *Sehstrahl*, der die Bildebene im zu P gehörenden Bildpunkt P' schneidet[1].

Die Eigenschaften der Zentralprojektion sind

- Punkte werden auf Punkte abgebildet.
- Geraden werden auf Geraden abgebildet.
- Die Inzidenz bleibt erhalten.
- Die Achse ist Fixpunktgerade.
- …

[1] Die Wahl der Bezeichnungen und die Lage von Urbild- und Bildebene lassen die ursprünglichen Beziehungen der Zentralprojektion zum Vorgang des Sehens erkennen.

II Zentralkollineation

Da die Zentralprojektion eine Abbildung im Raum darstellt, gestaltet sich die zeichnerische Bestimmung des perspektiven Bildes zu einer gegebenen Figur mitunter schwierig. Daher ist folgendes Verfahren hilfreich.

Die Urbildebene E (und alle in ihr liegenden Punkte) wird um die Achse a um 90° gedreht, so dass E und E' zusammenfallen. Ebenso wird Z um die Gerade h um 90° gedreht, sodass er ebenfalls in die Ebene E' fällt. Als Resultat erhält man die rechts abgebildete Situation.

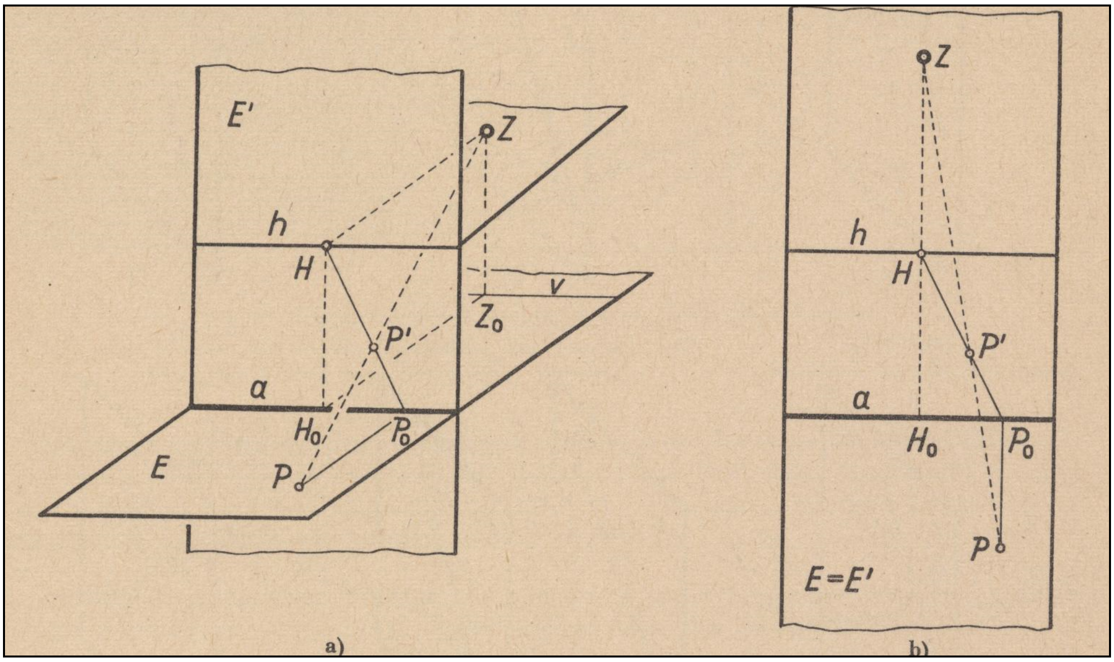

Abbildung 2 Übergang von der Zentralprojektion zur Zentralkollineation (aus: Wolff 1955)

Die Verbindungsgeraden der Punkte und ihrer Bildpunkte verlaufen immer durch Z (warum?), die Gerade a ist Fixpunktgerade. Eine solche (ebene) Abbildung bezeichnet man als *Zentralkollineation*.

Auch für den Fall, dass die Ebenen E und E' parallel sind, kann man durch Verschiebung eine zugehörige Zentralkollineation erhalten.

Entfernt sich das Projektionszentrum von der Ebene E' (Übergang von Zentral- zu Parallelprojektion), verlaufen die Verbindungsgeraden der Punkte und ihrer Bildpunkte alle parallel.

III Verallgemeinerung

Die Abbildungsgleichung der Zentralkollineation kann man mithilfe folgender Überlegungen leicht finden:

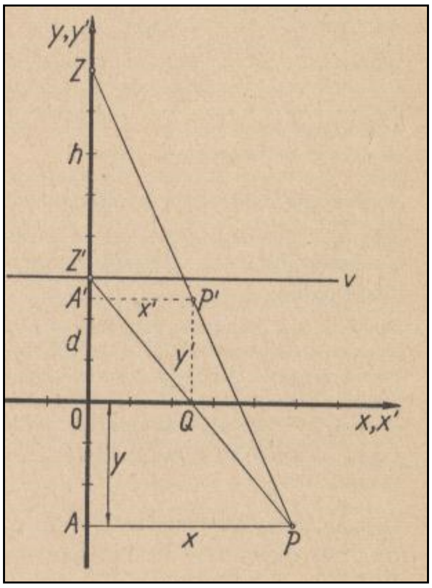

Abbildung 3 Abbildungsgleichnung (aus: Wolff 1955)

Im Dreieck Z'PA gilt: $\frac{OQ}{AP} = \frac{OZ'}{AZ'}$ und damit $\frac{x'}{x} = \frac{d}{d-y}$.

Im Dreieck Z'ZP gilt: $\frac{y'}{h} = \frac{P'Q}{ZZ'} = \frac{PQ}{PZ'}$

Im Dreieck Z'AP gilt: $\frac{PQ}{PZ'} = \frac{AO}{AZ'} = \frac{-y}{-y+d}$

Also: $x' = -\frac{dx}{y-d}$, $y' = \frac{hy}{y-d}$.

Wählt man das Koordinatensystem in allgemeiner Lage, erhält man:

$$x' = \frac{-dx + ay}{y-d}, \quad y' = \frac{hy}{y-d}$$

Die allgemeinste Form der Kollineation (nicht zwingend eine Zentralkollineation) hat die Abbildungsgleichung: $x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}$, $y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}$. Alle affinen Abbildungen, Ähnlichkeits- und Kongruenzabbildungen ergeben sich als Spezialfälle dieser, wie die folgende Abbildung zeigt.

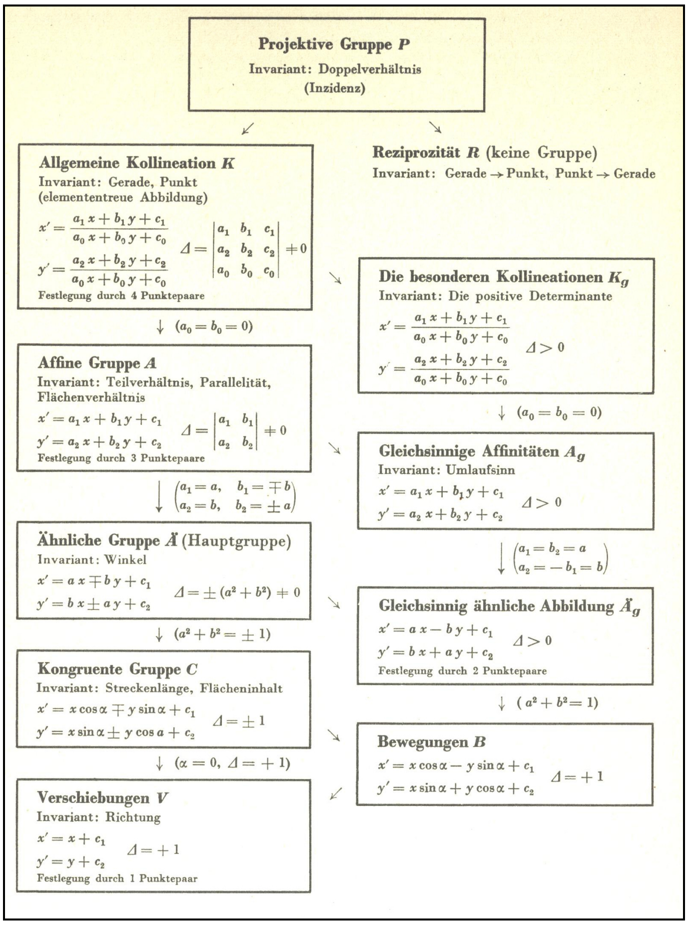

Abbildung 4 Hierarchie der Abbildungsgruppen (aus: Wolff 1955)

Für die hier auftretenden geometrischen Verwandtschaften gibt es jeweils einen „Repräsentanten“, der als Projektion bzw. Zentralkollineation interpretiert werden kann:

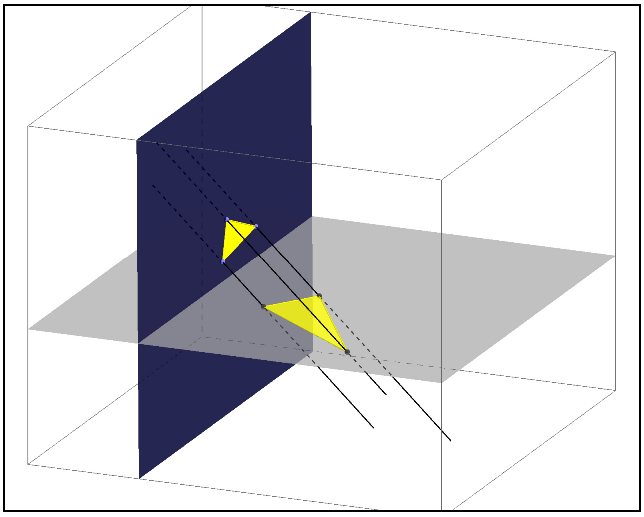

Abbildung 5 Achsenaffinität

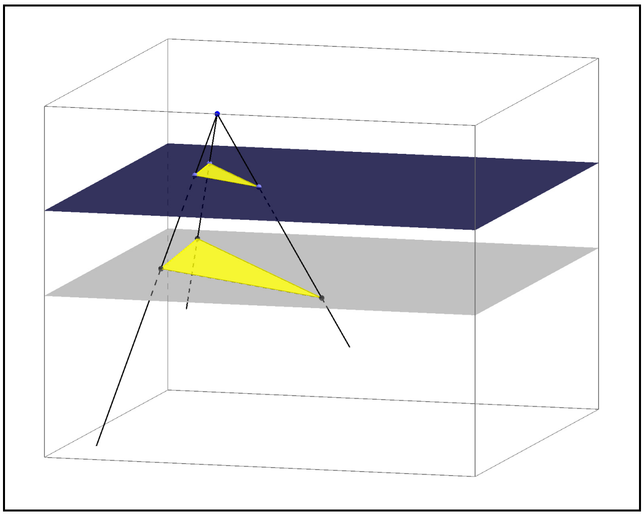

Abbildung 6 Zentrische Streckung

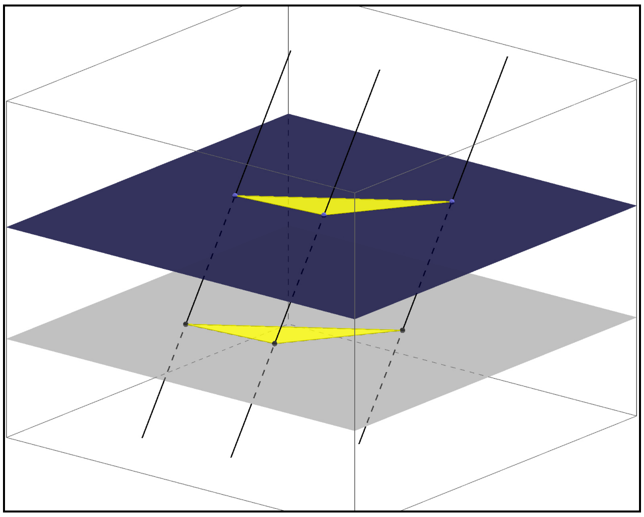

Abbildung 7 Verschiebung

IV Literatur

Stolzenburg, Alexander: Projektive Geometrie. Stuttgart: edition waldorf 2009

Wölz, Rudi: Ein Vorschlag zur Behandlung der Zentralkollineation. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 17 (1964/1965), S. 406-412

Wolff, Georg (Hrsg.): Die Elemente der Mathematik (Band 4). Paderborn: Schöningh; Hannover: Schroedel [2]1955