Vernetzung durch diskrete Mathematik

Ein Zusammenspiel Fundamentaler Ideen der Mathematik und Informatik

Ausarbeitung des Vortrags auf der 31. Tagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik in der GDM

„Diskrete Mathematik“

Vom 27.-29.09.2013 in Saarbrücken

Marie-Christine von der Bank

Vernetzung durch diskrete Mathematik

Ein Zusammenspiel Fundamentaler Ideen der Mathematik und Informatik

Marie-Christine von der Bank

ZUSAMMENFASSUNG: Für den Mathematikunterricht der letzten Jahrzehnte war und ist die (oft auch implizit geführte) Diskussion um Fundamentale Ideen von Mathematik prägend. Impulse erhielt der deutschsprachige Diskurs z. B. durch die Einführung von Informatik als Schulfach (Schwill 1993) oder die Festsetzung von Bildungsstandards - dort dienen inhaltliche Leitideen und allgemeine Kompetenzen dem Erwerb vernetzten Wissens (KMK 2003 bzw. KMK 2012). Im Beitrag werden ein strukturiertes und strukturierendes Modell der Theorie Fundamentaler Ideen und seine unterrichtspragmatische Reduktion vorgestellt. Diese Reduktion wird, mit Blick in unterschiedliche Schulbücher, genutzt, um Möglichkeiten zur Vernetzung im Unterricht aufzuzeigen, die sich u. a. auch aus der Betonung diskreter mathematischer Inhalte im Mathematikunterricht ergeben.

1. Einleitung

> Wo sollte diskrete Mathematik in der Schule verortet werden? Im Mathematikunterricht, im Informatikunterricht oder gar in einem neuen Kontinuierliches und Diskretes versöhnendem Fach „Mathematik und Informatik“?

Mit dieser Leitfrage der diesjährigen Tagung wird ein Themenkomplex aufgegriffen, der lange Tradition im Arbeitskreis hat. Es geht um die Betonung vernetzender Elemente (hier diskreter Inhalte) von Mathematik und Informatik und deren Verortung und Etablierung im Schulunterricht dieser Fächer.

Die vorliegende Arbeit möchte einen Betrag zur Diskussion leisten, indem sie ausgehend von der Analyse Fundamentaler Ideen der Mathematik und Informatik untersucht, ob und wie reichhaltig Vernetzungen zwischen zentralen Aspekten des Mathematik- und Informatiktreibens durch eine Betonung diskreter Inhalte ermöglicht werden.[1]

[1] Die Diskussion um eine Verknüpfung von Mathematikunterricht und Informatik mittels der für die jeweilige Fachwissenschaft zentral erscheinenden (Fundamentalen) Ideen hat ebenfalls Tradition im Arbeitskreis. Sowohl 1995 als auch 2005 wurden Tagungsbände

Konkreter Untersuchungsgegenstand sind Schulbuchkapitel aus unterschiedlichen didaktisch geprägten Epochen (Strukturmathematik und aktuelle „Neuer Aufgabenkultur"), die sich inhaltlich zum einen mit der „Teilbarkeitslehre“ (darin integriert der Euklidische Algorithmus) und zum anderen mit Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln beschäftigen. Als Vergleichskriterium dienen hierbei die Vernetzungsmöglichkeiten, die in den jeweiligen Kapiteln (explizit und implizit) angeregt werden.[2] Zur Analyse der Vernetzungsmöglichkeiten dient folgender Vernetzungspentagraph, der eine unterrichtspragmatische Reduktion einer Theorie Fundamentaler Ideen darstellt (siehe (von der Bank 2012)).

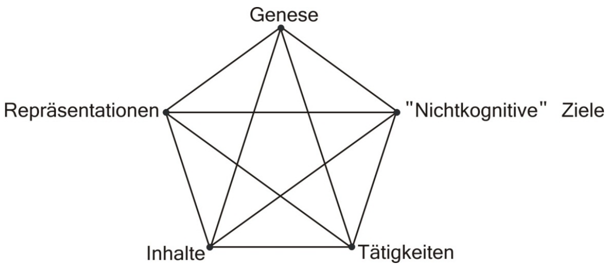


Abb. 1: Vernetzungspentagraph

Ausgehend von einer Analyse historischer und aktueller Fundamentaler Ideen wird im Folgenden diese Reduktion skizziert und der Vernetzungspentagraph als didaktische Brille zur vergleichenden Schulbuchanalyse genutzt.

---

dieser Thematik gewidmet. Im 1995 herausgegebenen Tagungsband „Fundamentale Ideen der Mathematik und Informatik“ ging es um die Herausarbeitung von gemeinsamen und unterschiedlichen Fundamentalen Ideen von Mathematik und Informatik. Im Tagungsband „Informatische Ideen im Mathematikunterricht“ von 2005 wurden Ansätze zur Etablierung Fundamentaler Ideen der Informatik im Mathematikunterricht vorgestellt. Darin zeigten beispielweise ANSELM LAMBERT und PIA SELZER, dass (durch den Einsatz des Computers unumgängliche) „Diskretisierung“ eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik ist, deren bewusste Thematisierung im Unterricht zur Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen des Werkzeugs Computer anregt (Lambert/Selzer 2005, S. 87-100).

[2] Zugrunde liegt dabei ein naiver Vernetzungsbegriff, das heißt, Knoten eines ebenen oder auch räumlichen Graphen sind/werden über Kanten verbunden.

2. Fundamentale Ideen

Ein Ausgangspunkt: Jerome Bruner

Mit der Veröffentlichung seines Buches „The Process of Education“ eröffnete Bruner 1960 erneut[3] eine breite Diskussion um Auswahlkriterien für Inhalte des Schulunterrichts (Bruner 1960). Bruner forderte darin „that school curricula and methods of teaching should be geared to the teaching of fundamental ideas in whatever subject is being taught“ (Bruner 1960, S. 18). Bruner misst diesen „fundamental ideas“, die an vielen Textstellen auch als „fundamental principles“ oder „basic ideas“ bezeichnet werden, große Bedeutung im Lernprozess zu, da sie für den „nonspecific transfer“ nötig sind. Er schreibt, „this type of transfer is at the heart of the educational process – the continual broadening and deepening of knowledge in terms of basic and general ideas“ (Bruner 1960, S. 17). Um die Anwendbarkeit einer Fundamentalen Idee beim “nicht-spezifischen Transfer” zu erkennen, muss der Schüler die „Struktur“ eines Themas kennen, denn „die Struktur eines Themas lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind“ (Bruner 1970, S. 22). Es blieb allerdings, trotz vieler blumiger Beschreibungen der Bezeichner „Fundamentale Ideen“ und „Struktur“, offen, welche Bedeutung Bruner ihnen zuweist.[4] Die Ausarbeitung eines konsensfähigen Katalogs Fundamentaler Ideen möchte Bruner „den fähigsten Geistes- und Naturwissenschaftlern [...] in Zusammenarbeit mit Lehrkräften und Fachleuten für die Entwicklungspsychologie des Kindes“ überlassen (Bruner 1970, S. 43). Damit prägte Bruner eine bis heute andauernde Forschungsdebatte, die sich mit dem Auffinden und Beschreiben dieser „Fundamentalen Ideen“ befasst.

---

[3] Debatten um zentral erscheinende Aspekte von Mathematik und deren Nutzung als Leitlinien beim Unterrichten gab es selbstverständlich schon vor Bruner. Vgl. dazu beispielsweise (Führer 1997, S. 83).

[4] Dem gesamten Artikel liegt die Unterscheidung von „Begriff“ und „Bezeichner“ (des Begriffs) sowie den Relationen „Bezeichnung“ (bei der einem gegebenen Begriff ein Bezeichner zugeordnet wird) und „Bedeutung“ (wobei einem Bezeichner ein Begriff zugewiesen wird), nach (Lambert 2003) bzw. (Lambert 2011) zugrunde. Zudem ist bei der Entwicklung des Begriffs „Fundamentale Idee“ eine Unterscheidung zwischen „prototypischer“ und „logischer“ Begriffsbildung sinnvoll (s. u.).

Einen Überblick zur Forschungsliteratur in Mathematik und Informatik gibt die folgende Auflistung.

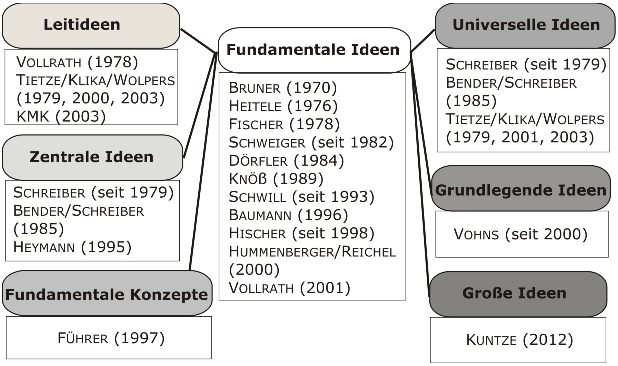


Abb. 2: Synonyme(?) für den Begriff „Fundamentale Idee" in der deutschsprachigen Literatur

Exemplarisch werden nun die für die Mathematikdidaktik zu Urtheorien gewordenen Ansätze von ALFRED SCHREIBER in Zusammenarbeit mit PETER BENDER (Bender/Schreiber 1985)[5] und FRITZ SCHWEIGER (Schweiger 1992, Schweiger 2006)[6] sowie die Arbeit von WILLIBALD DÖRFLER (Dörfler 1984) für die Informatikdidaktik vorgestellt.[7]

---

[5] Auf die Vorarbeiten von SCHREIBER (Schreiber 1979 und Schreiber 1983) wird hier nicht gesondert eingegangen, da diese in der Zusammenarbeit mit BENDER enthalten sind und in der „Operativen Genese der Geometrie" (Bender/Schreiber 1985) weiter ausgeschärft wurden. Zudem findet sich dort eine erste Anwendung des Konzepts „Fundamentaler Ideen" auf einen Teilbereich der Mathematik (vgl. Bender/Schreiber 1985, S. 199-207).

[6] SCHWEIGER beschäftigt sich, wie auch SCHREIBER seit den 1980ern intensiv mit der Theorie Fundamentaler Ideen (Schweiger 1982, Schweiger 1988). In (Schweiger 1992) sind diese frühen Arbeiten erneut thematisiert, daher wird hier nicht gesondert aus diese eingegangen.

[7] Für eine ausführliche Diskussion der genannten Forschungsansätze vgl. (von der Bank 2012).

BENDER und SCHREIBER definieren „Universelle Ideen“[8] als „Schemata“ im Sinne ERICH WITTMANNS (Schreiber 1979, S. 167) und konkretisieren sie als

> wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc. […] deren Universalität nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Anwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht. Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen, sie sind vielmehr begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theoriebildung. Sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Entsprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwissenschaftlichen (nicht: unwissenschaftlichen) Denken an. Dabei stiften sie Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt; noch wichtiger ist ihre ordnende Funktion beim Eindringen in diese Struktur und beim Erschließen der Umwelt. Universelle Ideen zeichnen sich also aus durch
>
> - Weite („logische“ Allgemeinheit),
> - Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen),
> - Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).

(Bender/Schreiber 1985, S. 199)

Bei ihren Überlegungen steht zum einen das Mathematikbetreiben, also der Prozesscharakter von Mathematik, im Vordergrund. Zum anderen betonen die Autoren mit der ordnenden Funktion Universeller Ideen deren Wirksamkeit auf einer Meta-Ebene im Denken des Lernenden. Die aufgestellten Kriterien für Universelle Ideen stellen sicher, dass die Ideen nicht isoliert nebeneinanderstehen, sondern innermathematische Vernetzungen („Weite“, „Fülle“) und Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit („Sinn“) zulassen.

Ein zweiter, ebenfalls bis heute wegweisender Ansatz, stammt von SCHWEIGER. Während die Überlegungen von BENDER und SCHREIBER ganz im Sinne BRUNERS von der Mathematik aus gedacht sind, fokussiert SCHWEIGER mit seinem Kriterien-Katalog schon eher den Mathematikunterricht, da er Fundamentale Ideen als ein Mittel zur Strukturierung von Curricula sieht (s. u.). Auch bei ihm steht das Mathematiktreiben im Vordergrund. SCHWEIGER übernimmt den Bezeichner „Fundamentale Idee“ von BRUNER und definiert:

[8] Um aufgekommenen verfälschenden Interpretationen zu begegnen, lehnen BENDER und SCHREIBER den Bezeichner „fundamental“ ab und sprechen stattdessen von „Universellen Ideen“ (Schreiber 1979, S. 166).

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, die
>
> 1. in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
> 2. tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
> 3. als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
> 4. den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
> 5. in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.
>
> (Schweiger 1992, S. 207)

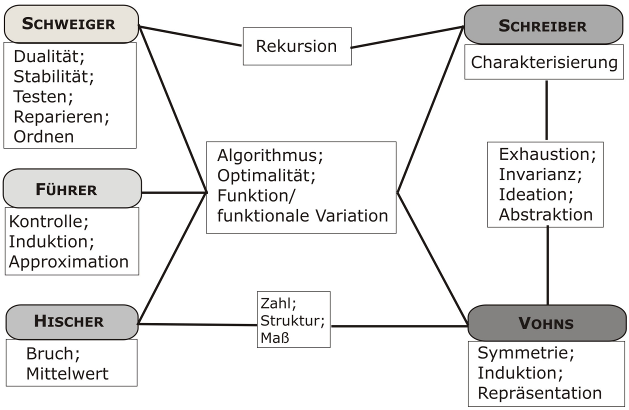
Wie bei BENDER und SCHREIBER sollen auch bei SCHWEIGER Fundamentale Ideen innermathematische Vernetzungen (Punkte 2. und 4.) und Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit (Punkt 5.) ermöglichen. Die Forderung nach Vernetzung von mathematischen Inhalten und deren historischer Genese (Punkt 1.) stellt eine Neuerung dar. Punkte 3. und 4. weisen wieder auf die meta-mathematische Bedeutung Fundamentaler Ideen hin.

HORST HISCHER strukturierte den Kriterien-Katalog SCHWEIGERs weiter, indem er die genannten Kriterien nach ihrem deskriptiven (Punkte 1., 3. und 5.) und normativen (Punkte 2. und 4.) Charakter einteilte (Hischer 1998). Damit wurde und wird deutlicher reflektiert, wie Fundamentale Ideen sowohl Mathematik als auch den Umgang mit Mathematik beschreiben und welche Erwartungen an Fundamentale Ideen gestellt werden.

In den Arbeiten von SCHWEIGER ist eine für die Diskussion um Fundamentale Ideen typische (häufig implizite) Dialektik von logischer und prototypischer Begriffsbildung besonders deutlich. Mit der Aufzählung von Kriterien, die eine Fundamentale Idee erfüllen soll, legt SCHWEIGER kritische Attribute zur Definition dieser Idee fest und trägt so zur logischen Begriffsbildung des Begriffs „Fundamentale Idee" bei. Zusätzlich gibt er (wie fast alle Autoren) einen Ideen-Katalog an, der Prototypen des zuvor logisch definierten Begriffs enthält und somit zur prototypischen Begriffsbildung beiträgt. 2006 schärfte SCHWEIGER seine zur logischen Begriffsbildung dienenden kritischen Attribute für Fundamentale Ideen durch eine Analyse der Ideen-Kataloge verschiedener Autoren (Schweiger 2006, S. 66) weiter aus. Er unterscheidet nun ebenfalls zwischen deskriptiven und normativen Kriterien und gibt insgesamt acht (anstatt fünf)

Kriterien an. Als deskriptive Kriterien behält Schweiger die Punkte 1. und 5. seines 1992er Katalogs und fügt zum einen die „horizontal dimension" („Fundamental ideas recur in different areas of mathematics", Schweiger 2006, S. 68) und zum anderen die „vertical dimension" („Fundamental ideas recur at different levels", Schweiger 2006, S. 68) hinzu. Als normative Kriterien nennt er „design curricula", „elucidate mathematical practice and the essence of mathematics", „build up semantic networks between different areas", „improve memory" (Schweiger 2006, S. 68). Auf Basis dieser Weiterentwicklung im Bereich der logischen Begriffsbildung gibt SCHWEIGER nun auch (teilweise) neue prototypische Ideen an (Schweiger 2006, S. 69-71).[9] Somit befruchten Prototypen und kritische Attribute sich gegenseitig und tragen so zur kritischen Reflexion der Bedeutung des Begriffs „Fundamentale Idee" bei.

Zur Illustration obiger Kriterien-Kataloge werden nun exemplarisch Ideenkataloge verschiedener Autoren vorgestellt und u. a. der Ideenkatalog von BENDER/SCHREIBER den Katalogen SCHWEIGERs gegenübergestellt.[10]



[9] In (Schweiger 2010) wird der Ideen-Katalog aus (Schweiger 2006) ausgearbeitet und detailliert beschrieben. Dort gibt SCHWEIGER wieder den Kriterien-Katalog von 1992 an, die acht Kriterien von 2006 spielen nur implizit eine Rolle.

[10] SCHWEIGER gibt in seinen beiden Hauptwerken zum Thema Fundamentale Ideen zwei sehr unterschiedliche Ideenkataloge an (vgl. Schweiger 1992 und Schweiger 2010). Er begründet dies mit der Überzeugung, dass ein Ideenkatalog stets nur provisorischen Charakter haben kann. Dass aber das „Finden eines individuellen Katalogs, der auch immer wieder revidiert werden kann" ein lohnender Teil der Unterrichtsreflexion ist (Schweiger 2010, S. 1).

Abb. 3: Ideenkataloge für Mathematik (-unterricht)[11]

Obwohl die Ideenkataloge teilweise stark differieren, zeichnet sich ein Kern von Ideen ab, der von allen Autoren als fundamental angesehen wird. Für die Mathematik sind das die Ideen „Optimierung", „Algorithmus" und „Funktion".[12]

In der Informatikdidaktik, die das Konzept der Fundamentalen Ideen ebenfalls vielfältig diskutiert,[13] lässt sich eine ähnliche Beobachtung machen. Hier bilden „Algorithmisierung" und „Modularisierung" eine Art anerkannten „Ideen-Kern" auch wenn diese Ideen nicht bei allen Autoren explizit genannt werden. Allerdings ist das Spektrum der genannten Ideen nicht so weit wie in der Mathematikdidaktik, wie die folgende (unvollständige) Zusammenstellung von Ideenkatalogen ausgewählter Autoren zeigt.

- DÖRFLER 1984: Formale Darstellung (Repräsentation) von Situationen und vor allem Prozessen; Iteration und Rekursion; Unterprogrammtechnik und **Modularisierung**; Simulation.
- KNÖß 1989: **Moduln**; Strukturen von **Algorithmen** und Daten; Darstellung von Algorithmen und Datenstrukturen; Realisierung und Algorithmen und Datenstrukturen; Qualität von Algorithmen und Datenstrukturen.
- SCHWILL 1993: **Algorithmisierung**; **Strukturierte Zerlegung**; Sprache.

---

[11] In den Ideenkästen unter den jeweiligen Autorennamen sind die Ideen aufgelistet, die nur sie in ihren Ideenkatalogen nennen. Eine Verbindungslinie von einem Autorennamen zu einem Ideenkasten bedeutet, dass der Autor auch diese Ideen als fundamental ansieht. Beispielsweise nennt HISCHER die Ideen „Bruch" und „Mittelwert", aber auch „Zahl", „Struktur" und „Maß". Die drei letztgenannten Ideen werden aber auch von ANDREAS VOHNS als fundamental angesehen (Vohns 2007).

[12] Die bei einigen Autoren unterschiedlichen Bezeichner der Ideen blieben bei obiger Auflistung unberücksichtigt. Den Handlungsaspekt Fundamentaler Ideen betonend spricht SCHWEIGER beispielsweise von „Optimieren" als Fundamentaler Idee, während bei BENDER/SCHREIBER „Optimalität" eine Universelle Idee als Eigenschaft von Objekten und Verfahren ist.

[13] Dabei lieferte die Diskussion aufseiten der Informatik auch Impulse für die Mathematikdidaktik. Beispiel hierfür ist die Arbeit von ANDREAS SCHWILL, der neben einem Katalog Fundamentaler Ideen der Informatik auch Anregungen für eine Weiterentwicklung Fundamentaler Ideen der Mathematik auf der Jahrestagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 1994 lieferte (Schwill 1994, S. 18-25).

- BAUMANN 1996: Formalisierung, Automatisierung (**Algorithmisierung**), Vernetzung (Kommunikation).

Für die Entwicklung Fundamentaler Ideen der Informatik lassen sich zwei Forschungspositionen herausarbeiten: Entweder werden Fundamentale Ideen der Informatik aus dem Blickwinkel des Mathematikunterrichts gesehen und möglichst in diesen integriert (die Arbeiten von DÖRFLER und PETRA KNÖß sind Beispiele für solche Versuche).[14] Oder, um ein eigenständiges Schulfach Informatik zu begründen, wird ein Katalog Fundamentaler Ideen der Informatik erarbeitet, der (scheinbar) möglichst wenig mit den Ideen der Mathematik gemeinsam hat (vgl. Schwill 1993).[15] Gemeinsam ist den oben genannten Arbeiten der Informatikdidaktik, dass sie zur Klärung der Bedeutung des Begriffs „Fundamentale Idee" auf Arbeiten aus der Mathematikdidaktik zurückgreifen. DÖRFLER und RÜDIGER BAUMANN gehen von einem intuitiven Begriffsverständnis aus, welches nicht weiter vertieft wird. KNÖß legt ihrer Arbeit bewusst die sehr vage Begriffsexplikation BRUNERs und die drei Kriterien von BENDER/SCHREIBER zugrunde, da in der Vagheit der Fundamentalen Ideen gerade ihr Potential steckt (Knöß 1989, S. 25). SCHWILL führt die Kriterienkataloge von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER zusammen und nutzt die resultierende Theorie zur Erschließung eines „vollständigen Katalogs fundamentaler Ideen der Informatik" (Schubert/Schwill 2004, S. 95). Die drei oben genannten Ideen bilden dabei die „Masterideen" (Schubert/Schwill 2004, S. 96), die in Ideenbäumen mit letztendlich 60 Fundamentalen Ideen der Informatik ausdifferenziert werden. Die Arbeiten der Informatikdidaktik tragen insgesamt wenig(er) zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen bei. Ihre Stärke liegt

---

[14] Zu beachten ist, dass DÖRFLER ein eigeständiges Fach Informatik keinesfalls ausschließt. Er möchte allerdings zunächst „Berührpunkte" des Mathematik- und Informatikunterrichts aufzeigen und plädiert daher für eine Behandlung informatischer Ideen im Mathematikunterricht. KNÖß dagegen, deren Überlegungen auf den Primarbereich gerichtet sind, begründet ihre Integration informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht damit, dass „in absehbarer Zeit niemand die Einführung eines eigenständigen Faches Informatik in der Primarstufe befürworten [wird]" (Knöß 1989, S. 25-26). Sie rückt einen fächerübergreifenden Unterricht in den Mitteilpunkt, da „die Einführung eines weiteren Faches im ohnehin schon stark in Fächer zerklüfteten Grundschulbereich kaum wünschenswert" erscheint (Knöß 1989, S. 26).

[15] Zur Kritik an den Trennungsversuchen von Informatik- und Mathematikunterricht mittels ihrer Fundamentalen Ideen und speziell zum Ansatz von SCHWILL vgl. (Bender 1994, S. 8-17, speziell S. 12-13).

hingegen in der prototypischen Begriffsbildung. In den jeweiligen Arbeiten werden Ideenkataloge nicht nur ausführlich vorgestellt und ihre möglichen Umsetzungen im Unterricht beschrieben, sondern die Ideen werden aus historischen Entwicklungen der Informatik hergeleitet und bewertet.[16]

Da DÖRFLER eine Integration von informatischen Ideen in den Mathematikunterricht vorschlägt und bei der im vorliegenden Beitrag folgenden Schulbuchanalyse auch Vernetzungen zu informatischen Inhalten untersucht werden, soll seine Arbeit vorgestellt werden.

In (Dörfler 1984) wird, angeregt durch das Eindringen von „Informations- und Kommunikationstechnologien in alle Lebensbereiche“, schon vor drei Jahrzehnten gefordert, diese Entwicklung auch an allgemeinbildenden Schulen zu berücksichtigen. Der Autor sieht im Mathematikunterricht Potential zur Bewältigung dieser Herausforderung.

> Meine Position ist die, daß der Mathematikunterricht ohne einschneidende inhaltliche Veränderungen gewisse, heute in der Informatik durch die Charakteristika des Instruments Computer relevant gewordene Denkformen und Mittel des Denkens genauso entwickeln kann. Ich möchte diese kognitiven Strategien auch „fundamentale Ideen“ der Informatik nennen, weil sie dort erstmals bewußt und gezielt zum Gegenstand und Mittel der Forschung und Entwicklung wurden.

(Dörfler 1984, S. 21)

Obwohl also diese Ideen im Mathematikunterricht aufgehoben sein können, bezeichnet DÖRFLER sie bewusst als informatische Ideen, da „es dies alles [zwar] schon lange in der Mathematik gibt, aber es bleibt dort „stilles Hilfsmittel“ und wurde nicht bewußt dargestellt und untersucht“ (Dörfler 1984, S. 21). Durch eine erheblich verbesserte Computerleistung und die daraus resultierende Entwicklung der Informatik als eigenständige Fachwissenschaft bekommen diese zunächst mathematischen Ideen neue informatische Bedeutungen. Sie

---

[16] In Arbeiten der Mathematikdidaktik wird meist auf eine Herleitung (und damit Begründung) der Ideenkataloge verzichtet. Zwei der seltenen Arbeiten, die jede Idee ihrer Ideenkataloge an den von ihnen entwickelten Kriterien messen, sind (Bender/Schreiber 1985) und (Schweiger 2010). Im Bereich der Arbeiten, die eine mathematische Idee als fundamental herausarbeiten, seien HISCHER, der sich vorrangig mit der Idee „Mittelwertbildung“ beschäftigt (Hischer 1998), und HANS SCHUPP, der die Fundamentalität des „Optimierens“ nachweist (Schupp 1992), mit überzeugender Herleitung und Begründung ihrer Ideen genannt.

können aber, unter Berücksichtigung ihrer erweiterten Bedeutung, im Mathematikunterricht behandelt werden. Allerdings scheint DÖRFLERs Umschreibung von Fundamentalen Ideen als „kognitive Strategie“ zu kurz, da einige der genannten Ideen streng genommen nicht nur Strategien sind. Beispielsweise kann die Idee „formale Darstellung“ eine Strategie sein, dann müsste sie aber eher mit „formales Darstellen“ bezeichnet werden. „Formale Darstellung“ kann aber auch ein Objekt sein, eben die formale Darstellung einer Situation. DÖRFLERs Ideen umfassen also neben Strategien auch Objekte. Diese Unschärfe der genannten Ideen ist dem von Dörfler gewollten intuitiven Zugang zum Begriff „Fundamentale Idee“ geschuldet.

Aktuelle Fundamentale(?) Ideen

Die didaktische Diskussion um Fundamentale Ideen sowohl der Mathematik als auch der Informatik gipfelte auf bundesdeutscher Ebene institutionalisiert in Bildungsstandards für beide Fächer.[17]

Durch allgemeine Kompetenzen (math. argumentieren; Probleme math. lösen; math. modellieren; math. Darstellungen verwenden; mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen; kommunizieren) und inhaltliche Leitideen (Zahl; Messen; Raum und Form; funktionale Abhängigkeit; Daten und Zufall) formulierte die KULTUSMINISTERKONFERENZ (KMK) 2003 Bildungsstandards für den Mathematikunterricht[18] und gab so Rahmenbedingungen für standardisierte Lehrpläne, Curricula und Abschlussprüfungen vor. Zusammen mit den für Aufgaben und Prüfungen zu unterscheidenden Anforderungsbereichen (Reproduzieren; Zusammenhänge herstellen; Verallgemeinern und Reflektieren) ergibt sich so eine 6x5x3-Kompetenzmatrix, die Mathematikunterricht definieren soll.[19]

---

[17] Für die Informatik liegt bislang nur ein Vorschlag für Bildungsstandards der Gesellschaft für Informatik vor. Dieser ist bundespolitisch (noch) nicht bindend.

[18] (KMK 2003) für den Mittleren Bildungsabschluss, (KMK 2004) für den Hauptschulabschluss und (KMK 2012) für die Allgemeine Hochschulreife.

[19] Eine Analyse der deutschen Bildungsstandards und einen Vergleich mit ihrem österreichischen Pendant, der auch auf leicht festzustellende Auslassungen in den Standards (die sich besonders auch den Bereich der „nichtkognitiven“ Absichten und Ziele von Mathematikunterricht beziehen) eingeht, findet sich in (von der Bank 2012).

Obwohl einige Bezeichner der allgemeinen Kompetenzen und insbesondere die der Leitideen sich mit denen der oben aufgelisteten Fundamentalen Ideen decken, ist ihre Bedeutung eine völlig andere. Sie dürfen nicht als Prototypen Fundamentaler Ideen angesehen werden, da durch (zur Nutzung bei „Output-orientierten" Tests nötige) Institutionalisierung und Standardisierung der Kompetenzen und Leitideen die für Fundamentale Ideen wesentlichen Aspekte, wie ihre Wirksamkeit auf einer Meta-Ebene oder ihre bewusste historische Verankerung, verloren gingen.[20] Dies ist vor allem darin begründet, dass auf staatlicher Ebene die komplette deutschsprachige Forschungstradition zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen ausgeblendet wurde.

Ähnlich wie für den Mathematikunterricht existieren mit der Empfehlung „Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule" des Arbeitskreises „Bildungsstandards" der GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK (GI) seit 2008 auch für den Informatikunterricht ausformulierte Kompetenzen. Sie sind in Prozessbereiche (Modellieren und Implementieren; Begründen und Bewerten; Strukturieren und Vernetzen; Kommunizieren und Kooperieren; Darstellen und Interpretieren) und Inhaltsbereiche (Information und Daten; Algorithmen; Sprache und Automaten; Informatiksysteme; Informatik, Mensch und Gesellschaft) gegliedert (GI 2008, S. 11).

Die Ähnlichkeiten zwischen allgemeinen Kompetenzen der KMK und den Prozessbereichen des GI-Vorschlags sind nicht zu übersehen. Allerdings verweisen Prozessideen wie beispielsweise Bewerten auf ihre Bedeutsamkeit auf einer Meta-Ebene. Diese Eigenschaft ist in den allgemeinen Kompetenzen der KMK nicht so deutlich. Auf der Inhaltsseite lassen sich fachbedingte Unterschiede ausmachen, wobei auch hier (wie bei den Fundamentalen Ideen der Mathematik bzw. Informatik) deutlich wird, dass dem Algorithmus zentrale Bedeutung im Mathematik- und Informatikunterricht zukommt.[21]

Der Inhaltsbereich „Informatik, Mensch und Gesellschaft", der soziale und gesellschaftliche Aspekte von Informatiksystem und den verantwortungsvollen Umgang mit diesen umfasst (GI 2008, S. 13), findet kein gleichwertiges Pen-

---

[20] Vgl. (Bender 2004) und (Führer 2007).

[21] Während in (KMK 2003) und (KMK 2004) die Idee „Algorithmus" noch unter der Leitidee „Zahl" gefasst ist, betont die Leitidee „Algorithmus und Zahl" in (KMK 2012) die Bedeutung des Algorithmus.

dant in den Bildungsstandards der KMK. In der Informatikdidaktik hat eine Thematisierung von gesellschaftlichen Bedingungen und Auswirkungen der Informatik Tradition. Schon der 1976 vom Fakultätentag Informatik verabschiedete Fächerkatalog gliedert Informatik in sechs Teilbereiche, unter denen „Gesellschaftliche Bezüge der Informatik“ einen Bereich bildet (nach (Baumann 1996, S. 83)).

Ausgehend von der Ausblendung „Nichtkognitiver“ Aspekte des Mathematikunterrichts bei den weniger bis gar nicht tauglichen Prototypen Fundamentaler Ideen der deutschen Bildungsstandards, entwickelte LAMBERT ein erweitertes und stärker strukturiertes Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen, welches auch andere für die Mathematik wesentliche Aspekte stärker berücksichtigt (Lambert 2012). LAMBERT schlägt folgende Prototypen in Ideenkategorien gegliedert vor:

- *Inhaltsideen*: Zahl, Maß, Raum und Form, Funktion, Zufall;
- *Schnittstellenideen*: Kommunizieren, Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Darstellen, Fragen;
- *Begriffsideen*: Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierung;
- *Prozessideen*: Strategien, Heuristiken, Handlungen;
- *Tätigkeitsideen*: Approximieren (insbesondere Optimieren), Algorithmisieren, Dualisieren, Vernetzen, Ordnen, Strukturieren, Formalisieren, Exaktifizieren, Passen[22], Verallgemeinern, Deduzieren;[23]
- *Theorieideen*: Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskulturen, Systeme und Sprache;
- *„Nichtkognitive“ Ideen:* Interesse (Begeisterung), Bereitschaft und Freude, Werthaltung, Kreativität und Geschmack, Motorik.

Dieses Ideensystem umfasst Mathematik(-unterricht) ganzheitlicher als Ideenkataloge anderer Autoren, ist aber für eine unterrichtliche Nutzung zu komplex. Die für die Mathematik bedeutsamen Aspekte Fundamentaler Ideen müssen also auf ihren unterrichtspragmatischen Kern reduziert werden. Als unterrichtspragmatischer Kern werden hier *Inhalte – Tätigkeiten – Repräsentationen – (histori-*

[22] „Passen“ umfasst hier (anders als bei BENDER/SCHREIBER) auch meta-mathematische Aspekte, z. B. das „(An-)passen“ eines Axiomensystems an ein begriffliches „Wollen“ (vgl. Fischer/Malle 1985, S. 151).

[23] Dies sind eher innermathematische Tätigkeiten, die in der Auflistung von mathematisch nach meta-mathematisch geordnet sind.

sche) Genese – „Nichtkognitive" Ziele betrachtet. Dies geschieht durch Kombination, Zusammenfassung und Konkretisierung der einzelnen Ideen zu folgendem Vernetzungspentagraphen (siehe (von der Bank 2012)).

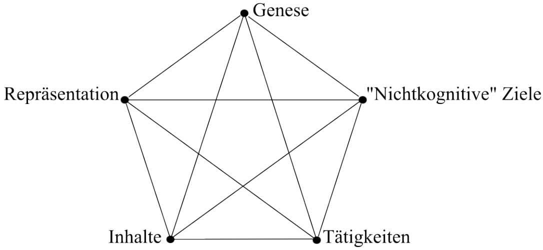


Abb. 5: Vernetzungspentagraph

Nach der Reduktion umfasst der Knoten Inhalte Objekte, Ordnungen, Charaktersierungen und Beweise aus den Gebieten der Schulmathematik (Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie, Stochastik und Diskrete Mathematik[24]). Der Knoten Tätigkeiten fasst Schnittstellenideen, Tätigkeitsideen und Konkretisierungen von Prozessideen zusammen. Verschiedene Darstellungsformen von Inhalten und Objekten und die damit verbundenen Aspekte von Begriffsbildung fallen unter den Knoten Repräsentationen. Historische Entwicklungen von Inhalten und Darstellungsformen, aber auch historisch bedingte Sprachen und Begründungskulturen werden im Knoten Genese berücksichtigt. Im Knoten „Nichtkognitive" Ziele sind die „Nichtkognitiven" Ideen aufgehoben.

3. Anwendungspotential des Vernetzungspentagraphen beim Vergleich von Schulbüchern

Der Vernetzungspentagraph eignet sich als Werkzeug zur Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten zwischen seinen Knoten im Unterricht. Da Unterrichtsrealität (besonders im Mathematikunterricht) inhaltlich und methodisch durch Schulbücher beeinflusst ist, wird der Vernetzungspentagraph als didaktische Brille zur deskriptiven Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten in verschiedenen Schulbuchkapiteln genutzt. Zum Vergleich dienen dabei Schulbuchkapitel, die

[24] Themen der Diskreten Mathematik konnten sich zwar noch nicht dauerhaft im Mathematikunterricht etablieren, spielen in dieser Arbeit allerdings eine wichtige Rolle und zählen daher auch zu den Gebieten der Schulmathematik.

sich zwar inhaltlich mit den gleichen Themen beschäftigen (Teilbarkeitslehre mit Euklidischem Algorithmus und Reelle Zahlen mit Heron-Verfahren), allerdings aus unterschiedlich (mathematikdidaktischen) geprägten Epochen stammen (Strukturmathematik und „Neue Aufgabenkultur"). Zum einen sind dies die Bände *Arithmetik 1 mit Geometrie* von 1980 und *Mathematik Neue Wege 5* von 2009 für die Teilbarkeitslehre mit Euklidischem Algorithmus und zum anderen die Bände *Algebra 2* von 1974 und *Mathematik Neue Wege 8* von 2010 für das Heron-Verfahren.[25]

Der Vernetzungspentagraph analysiert dabei zweifach. Zum einen „Füllen" sich seine Knoten mit den im Schulbuch vorhandenen Inhalten, Repräsentationen und deren Genese, den angeregten Tätigkeiten und den angestrebten „Nichtkognitiven" Zielen. Zum anderen werden über die Kanten des Vernetzungspentagraphen vorhandene und fehlende Vernetzungen zwischen seinen Knoten sichtbar. Werden beispielsweise bei einem inhaltlichen Schwerpunkt besonders Aspekte von Begriffsbildung, verschiedene Repräsentationmodi etc. berücksichtigt, besteht eine starke Verknüpfung von Inhalt und dessen Repräsentation. Dies wird im Vernetzungspentagraphen durch eine „fette" Kante visualisiert.[26]

Teilbarkeitslehre und Euklidischer Algorithmus

Das von KARL WÖRLE für die 5. Klassenstufe konzipierte Lehrwerk *Arithmetik 1 mit Geometrie* ist durch das Eindringen der Mengenlehre in den Mathematikunterricht geprägt. Er bemerkt dazu im Vorwort.

[25] Die Bände *Arithmetik 1 mit Geometrie* und *Algebra 2* stammen aus einer Schulbuchreihe des Bayrischen Schulbuch Verlags und sind durch die Strukturmathematik geprägt. Die Bände *Mathematik Neue Wege 5* und *Mathematik Neue Wege 8* stammen aus einer Schulbuchreihe des Schroedel Verlags. Sie sind beeinflusst durch die aktuelle „Neue Aufgabenkultur". Alle vier Schulbücher waren/sind für den Einsatz an Gymnasien gedacht.

[26] Zu beachten ist dabei, dass der Vernetzungspentagraph ein teilweise individuelles Werkzeugt ist. Als didaktische Brille kann er den Blick seines Nutzers auf zentrale Aspekte des Mathematikunterrichts und deren Vorhandensein oder Fehlen in Schulbüchern lenken. Damit bleibt die (unvermeidliche und nicht nachteilige) Subjektivität des Blickes aber erhalten und kann zu teilweise unterschiedlichen Ergebnissen führen. Ob nun eine Kante als „fett" markiert wird, hängt neben der reichhaltigen Füllung der Knoten auch vom subjektiven Empfinden des didaktisch gebildeten Nutzers ab. Daher ist die nun folgende Analyse als (subjektiver) Diskussionsbeitrag zu verstehen, dessen Ziel die Demonstration des Anwendungspotentials des Vernetzungspentagraphen ist.

> Der Lehrstoff der Grundschule wird wiederholt, vertieft und ergänzt. Der Zahlbegriff wir auf den Mengenbegriff, die Zahlgesetze werden auf die Mengengesetze gegründet [...] Von der Methode her besteht ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Grundschule. Die Darbietung erfolgt jetzt aus voralgebraischer Sicht. Dies bedeutet, daß die Phase des am Spiel orientierten und modellgebundenen Begreifens allmählich abgelöst wird durch ein vorsichtig einsetzendes, der Altersstufe angepaßtes Hinführen des Schülers zum formallogischen Denken, wobei gleichzeitig die Begriffsbildung verschärft und die Symbolik behutsam erweitert wird.
>
> (Wörle 1980, Vorwort)

Der Schwerpunkt des Lehrwerks liegt auf einer „reichhaltige[n], entwickelnd aufgebaut[en] Sammlung von Übungsaufgaben [...] die in enger Verbindung zum Lehrtext stehen“ (Wörle 1980, Vorwort). Die Aufgaben sind je nach Schwierigkeitsgrad farblich gekennzeichnet und durch fakultative „gelegentlich eingestreute ‚Tüfftelecken’“ ergänzt, die der „Auflockerung des Unterrichts“ dienen. Jedem neuen Abschnitt geht eine „Vorüberlegung“ in Form einer einführenden Aufgabe voraus, deren Lösung inhaltlich auf den neuen Lernstoff abzielt.

Die ersten beiden Kapitel „Mengen, Zahlen, Größen“ und „Die vier Grundrechenarten“ bilden eine Einheit und dienen der im Vorwort erwähnten mengentheoretischen Fundierung des Grundschulwissens. In diesen Kapiteln finden sich noch spielerische Aspekte und außermathematische Bezüge, wie beispielsweise farbige Bilder (Illustrationen der Menge $\mathbb{N}_0$ durch Kinder bzw. des Kreuzproduktes durch Kugelschreiber, S. 47 bzw. S. 61) und eingekleidete Aufgaben (Fußball-Aufgabe, S. 80), die zur Einbettung von mathematischen Inhalten in Alltagsvorstellungen dienen.[27] Auch die „Tüfftelecken“ sind zahlreich und umfassen zwischen drei und sieben Aufgaben. Sie enthalten Rätsel (Zauberquadrate auf S. 57 oder Irrgärten auf S. 71), Exkurse in die Geschichte der Mathematik (S. 75) oder überraschende Eigenschaften von Zahlen (Quadrieren der Zahlen 11, 111 usw. S. 75). Zum Ende dieser Anfangskapitel wird der Charakter des Lehrwerks als Aufgabensammlung durch längere Aufgabensequenzen bei gleichzeitiger Reduktion des Lehrtextes deutlich. Diese Entwicklung setzt sich im dritten Kapitel „Teilbarkeitslehre“, welches nun mithilfe des Vernetzungspentagraphen genauer analysiert werden soll, fort.

[27] Sofern nicht anders gekennzeichnet beziehen sich die angegebenen Seitenzahlen immer auf das im jeweiligen Abschnitt analysierte Schulbuch.

Inhaltlich geht es in diesem Kapitel zunächst um die Begriffe „Teiler" bzw. „Teilermenge", die als Lösung einer Aussageform in ℕ bzw. als Erfüllungsmenge einer Aussageform definiert werden (S. 93). Das Symbol $a|b$ wird als Aussageform mit zwei Variablen gedeutet, die wahr, falsch oder sinnlos in ℕ sein kann.[28] Der sich hier andeutende große Begriffsapparat und das formal-algebraisch Vorgehen werden in den nächsten Unterkapiteln, in denen „Grundregeln der Teilbarkeit"[29] und „Kennzeichenregeln der Teilbarkeit" eingeführt und teils deduktiv bewiesen werden, noch deutlicher.

Die Aufgaben der sich anschließenden Aufgabensammlung sind alle innermathematisch. Bezüge zur Lebenswelt der Schüler[30] fehlen. Die Schüler sollen entscheiden, ob Teilbarkeitsaussagen wahr oder falsch (S. 98, Nr. 1, 6, 11 u. a.) und Gleichungen lösbar sind, Teilermengen angeben (S. 98, Nr. 2, 7), neue Teilbarkeitsregeln[31] mithilfe der bekannten „Grundregeln der Teilbarkeit" begründen (S. 98, Nr. 5; S. 99. Nr. 9, 17).[32]

Im nächsten Unterkapitel folgt eine Einführung der Primzahlen als jene „natürliche[n] Zahl[en], die genau zwei Teiler" haben (S. 99). Zur Gewinnung von Primzahlen wird das „Sieb des Eratosthenes" in einer Vorüberlegung für die Zahlen 1 bis 100 beschrieben und begründet, warum nur Vielfache der Primzahlen bis $7(\leq \sqrt{100})$ gestrichen werden müssen (S. 100). Mithilfe der nun an ei-

---

[28] Die Definition als Aussageform ist für ein Schulbuch der 5. Klasse aus heutiger Sicht sehr formal. Sie dient allerdings einer Vernetzung und Weiterführbarkeit von Inhalten im Sinne eines Spiralcurriculums, da der Mittelstufenband *Algebra 1* von HELMUT TITZE, HARALD WALTER und RAINER FEUERLEIN bei der algebraischen Einführung von Aussagen und Aussagenformen auf Beispiele aus der Teilbarkeitslehre zurückgreift (Titze/Walter/Feuerlein 1975, S. 7-9).

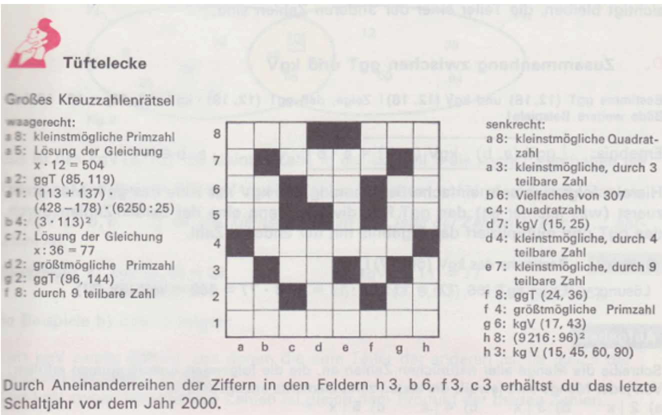
[29] Die drei im Buch genannten Grundregeln sind zwei Teilbarkeitseigenschaften von Summen und die Transitivität der Division (S. 93-94).

[30] Zur besseren Lesbarkeit wird im Sinne des generischen maskulinum stets nur ein Geschlecht genannt. Die Autorin weist darauf hin, dass an den jeweiligen Stellen stets an beide Geschlechter gedacht wurde.

[31] Die Teilbarkeitsregeln sind als Äquivalenzaussage formuliert und müssen daher mit Hin- und Rückrichtung begründet werden. Die als Zusatzaufgabe markierte Aufgabe 17, fordert den Beweis der allgemeinen Aussage „Der Wert einer Summe ist *dann und nur dann* durch eine Zahl teilbar, wenn jeder Summand durch die Zahl teilbar ist" (S. 99).

[32] Da sich die weiteren Aufgabenblöcke des Kapitels methodisch kaum unterscheiden, wird (außer es treten neue wichtige Aspekte hinzu) nichtmehr gesondert auf diese eingegangen.

nem Beispiel dargestellten Primfaktorzerlegung werden dann (nach der Einführung der Begriffe „gemeinsamer Teiler“ und „gemeinsames Vielfaches“ als Schnittmenge von Teilermengen und Vielfachenmengen) der größte gemeinsame Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen mittels Primfaktorzerlegung bestimmt (ggT auf S. 102-103 und danach kgV auf S. 104-105). Ein Zusammenhang zwischen ggT und kgV wird durch die Gleichung $ggT(a,b) \cdot kgV(a,b) = a \cdot b$ für $a, b \in \mathbb{N}$, die zur Berechnung von kgV(a,b) genutzt wird, hergestellt (S. 105). Obwohl Vorübungen und Präsentation des neuen Lehrstoffes wieder auf einer eher formalen Ebene erfolgen, sind die zugehörigen Übungsaufgaben anders gestaltet als zuvor. Es gibt zwar auch wieder innermathematische Aufgaben zur Bestimmung des ggT und kgV, diese sind allerdings nicht so zahlreich und werden (erstmals im gesamten Kapitel) durch eingekleidete Aufgaben, mit teils längeren Aufgabentexten, ergänzt.[33] Die einzige „Tüfftelecke“ des Kapitels befindet sich an dessen Ende und ist ein „Kreuzzahlrätsel“.


Tüftelecke

Großes Kreuzzahlenrätsel

waagerecht:
a 8: kleinstmögliche Primzahl
a 5: Lösung der Gleichung $x \cdot 12 = 504$
a 2: ggT (85, 119)
a 1: $(113 + 137) \cdot (428 - 178) \cdot (6250 : 25)$
b 4: $(3 \cdot 113)^2$
c 7: Lösung der Gleichung $x : 36 = 77$
d 2: größtmögliche Primzahl
g 2: ggT (96, 144)
f 8: durch 9 teilbare Zahl

senkrecht:
a 8: kleinstmögliche Quadratzahl
a 3: kleinstmögliche, durch 3 teilbare Zahl
b 6: Vielfaches von 307
c 4: Quadratzahl
d 7: kgV (15, 25)
d 4: kleinstmögliche, durch 4 teilbare Zahl
e 7: kleinstmögliche, durch 9 teilbare Zahl
f 8: ggT (24, 36)
f 4: größtmögliche Primzahl
g 6: kgV (17, 43)
h 8: $(9216 : 96)^2$
h 3: kg V (15, 45, 60, 90)

Durch Aneinanderreihen der Ziffern in den Feldern h 3, b 6, f 3, c 3 erhältst du das letzte Schaltjahr vor dem Jahr 2000.

Abb. 6.: „Tüfftelecke“ des Kapitels „Teilbarkeitslehre“ (S. 106)

[33] Beispielsweise S. 103, Nr. 4. Hier sind zwei Seiten eines Gartens mit bekannten Längen einzuzäunen. Die dafür benutzten Pfosten sollen im gleichen und möglichst großen Abstand angebracht werden. Dieser Abstand und die Anzahl der benötigten Pfosten sind zu ermitteln. Die Aufgabe kann durch die extremale Bedingung (möglichst großer Abstand) auch als Optimierungsproblem behandelt werden.

Die Bestimmung des ggT mittels Euklidischem Algorithmus wird an keiner Stelle des Lehrwerks präsentiert. Vor dem Hintergrund der Entstehungszeit des Schulbuches mag es zunächst verwundern, dass dieses algebraisch-algorithmische Verfahren nicht behandelt wird. Das Fehlen des Euklidischen Algorithmus ist aber wahrscheinlich gerade diesem damals üblichen formal-algebraische Vorgehen geschuldet, da zur formalen Angabe des Algorithmus entweder Division mit Rest oder der Betrag einer Zahl benötigt wird. Beides wurde vom Lehrwerk noch nicht bereitgestellt, was die Einführung des Euklidischen Algorithmus verhindert, obwohl er den Schülern auf einem präformaleren Niveau schon zugänglich wäre.

Ausgehend von der inhaltlichen und methodischen Beschreibung des Kapitels, nun zur Analyse der Vernetzungsmöglichkeiten mithilfe des Vernetzungspentagraphen. Die oben beschriebenen Inhalte umfassen die Begriffsideen Relationen zwischen Zahlen und deren Charakterisierung und Beweise mittels Teilbarkeitseigenschaften. Diese Ideen enthält der Knoten <u>Inhalte</u> des Vernetzungspentagraphen. Unterschiedliche Darstellungen der Inhalte schaffen Vernetzungen zum Knoten <u>Repräsentationen</u>. Insbesondere werden hier Teilbarkeitseigenschaften zum einen durch Terme und Gleichungen mit Variablen und zum anderen durch Mengen und Mengendiagramme dargestellt. Geometrische Darstellungen und auch andere Aspekte von Begriffsbildung, wie zum Beispiel die Berücksichtigung verschiedener Zugänge zur Mathematik[34] oder unterschiedlicher Darstellungsebenen (E-I-S), fehlen.[35] Unterschiedliche Repräsentationen der Inhalte finden sich auch in den Vorübungen und Aufgabenblöcken. Da diese Aufgaben zur selbstständigen Bearbeitung durch Schüler konzipiert sind, werden so Vernetzungen zwischen Inhalten, Repräsentationen und <u>Tätigkeiten</u> angeregt. Durch die Einseitigkeit der Aufgabenstellungen sind die durch sie angeregten Tätigkeiten nicht so reichhaltig wie im Vorwort angekündigt. Der Knoten Tätigkeiten umfasst die innermathematischen Tätigkeitsideen Deduzieren, Formalisieren und Verallgemeinern. Schnittstellenideen und Anwenden von Heuristiken spielen keine Rolle.[36] Vernetzungen zu den Knoten <u>Genese</u> und „<u>Nicht-</u>

[34] Vgl. (Lambert 2003).

[35] Dadurch findet in diesem Schulbuch auch keine Vernetzung von Gebieten der Schulmathematik statt.

[36] Einige Beweisaufgaben (beispielsweise S. 99, Nr. 17, s. o.) eignen sich prinzipiell zur Entwicklung und Umsetzung heuristischer Strategien, da sie komplexere Probleme dar-

kognitive“ Ziele sind im gesamten Kapitel nicht zu erkennen. Dabei hätte sich das Unterkapitel über Primzahlen und das „Sieb des Eratosthenes“ für einen historischen Exkurs angeboten.[37] Durch diese Auslassungen von (möglicherweise interessanten?) geschichtlichen Aspekten, das formale Vorgehen und die Einseitigkeit der Darstellungsformen und geforderten Tätigkeiten der Schüler, scheint ein Erreichen von „Nichtkognitiven“ Zielen durch das Lehrwerk unwahrscheinlich. Da WÖRLE mit der „Tüfftelecke“ aber zumindest an solche Ziele von Unterricht gedacht hat, enthält der Vernetzungspentagraph eine Kante von den Repräsentationen zu „Nichtkognitiven“ Zielen.[38]

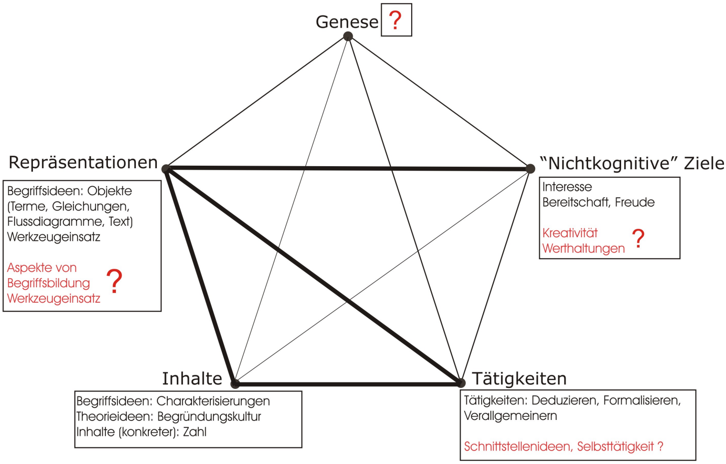


Abb. 7: Vernetzungspentagraph des Kapitels „Teilbarkeitslehre“ in *Arithmetik 1 mit Geometrie*

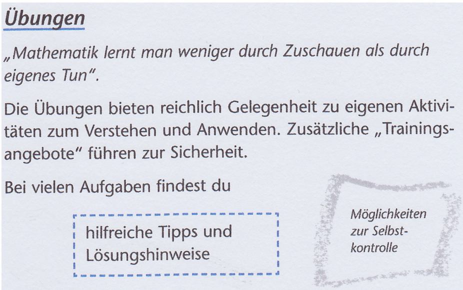
---

stellen. Diese Aufgaben sind meist als „Zusatzaufgaben“ gekennzeichnet, die „ohne Schaden für den Gesamtlehrgang grundsätzlich übergangen werden“ können (Wörle 1979, Vorwort). Es ist daher nicht davon auszugehen, dass es dem Autor in dem analysierten Kapitel um die Schulung von Heuristiken und anderen Problemlösestrategien ging.

[37] Im Buch befindet sich lediglich die Anmerkung, dass Eratosthenes ein „griechischer Gelehrter [war], der im 3. Jahrhundert v. Chr. lebte“ (Wörle 1979, S. 100).

[38] Zu beachten ist bei der Untersuchung von „Nichtkognitiven“ Zielen, dass diese evtl. vom Autor mit diesem Schulbuch gar nicht primär angestrebt wurden. Es ist durch aus denkbar, dass WÖRLE eine Förderung von beispielsweise Interesse, Kreativität und Werthaltungen nicht als Aufgabe des Schulbuches sah, sondern vorrangig als Aufgabe des durch den Lehrer zu gestaltenden Unterrichtsklimas.

So wie das Lehrwerk (Wörle 1980) durch den damaligen (strukturmathematischen) Zeitgeist geprägt ist, finden sich auch im Gymnasialwerk *Mathematik Neue Wege 5* von ARNO LERGENMÜLLER und GÜNTER SCHMIDT zahlreiche Aspekte, die sich von heute aktuellen Einflüssen und Überzeugungen im Bezug auf Unterricht ableiten. Das Schulbuch ist für einen schülerzentrierten Unterricht konzipiert, der Selbsttätigkeit und eigenverantwortliches Lernen in den Vordergrund stellt (S. 6-7). Dies wird schon im, den allgemeinen Aufbau der Buchkapitel erklärenden, Vorwort deutlich. Es ist in der „Du-Form" geschrieben und betont die Wichtigkeit von selbstständigem Lernen.


Übungen

„Mathematik lernt man weniger durch Zuschauen als durch eigenes Tun".

Die Übungen bieten reichlich Gelegenheit zu eigenen Aktivitäten zum Verstehen und Anwenden. Zusätzliche „Trainingsangebote" führen zur Sicherheit.

Bei vielen Aufgaben findest du

hilfreiche Tipps und Lösungshinweise

Möglichkeiten zur Selbstkontrolle

Abb. 8: Ausschnitt des Vorwortes von *Mathematik Neue Wege 5* (S. 6)

Der inhaltliche Aufbau ähnelt dem von *Arithmetik 1 mit Geometrie*. In den Anfangskapiteln werden Vorkenntnisse aus der Grundschule bezüglich des Rechnens mit natürlichen Zahlen aufgegriffen und vertieft (Kap. 1 - Kap. 4). Daran schließt sich eine propädeutische, konstruktiv-geometrische Behandlung der Bruchrechnung an, die sich (zumindest inhaltlich) ebenfalls in (Wörle 1980) findet. Ein Unterschied in der Gliederung der Schulbücher, der auch Auswirkungen auf das mithilfe des Vernetzungspentagraphen untersuchte Kapitel „Teilbarkeit der natürlichen Zahlen" hat, stellen die nun folgenden Kapitel zur Geometrie, in denen Kreise, Winkel und Rechtecke behandelt werden, dar. Darauf aufbauend sind die Begriffe „Teiler" bzw. „Vielfaches" (vor einer algebraischen Beschreibung) geometrisch als Seitenlängen verschiedener Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt (S. 197, Nr. 1) bzw. als Sprungweite (Landepunkte) von Flöhen auf einer Zahlengeraden (S. 198, Nr. 2) motiviert.[39] Die Endstellen-

[39] Solche Vernetzungen zwischen algebraischen und geometrischen Darstellungen finden sich im gesamten Kapitel. Beispielsweise bei der Begründung der Teilbarkeitsquersum-

regeln und Quersummenregeln für die Teilbarkeit durch die Zahlen 2, 5, 4, 3, 6, 8, 9, 15, 25 und 100 werden nicht in Form eines Lehrtextes beschrieben, sondern können (mit den im Vorwort angekündigten Lösungshinweisen) selbstständig entdeckt und erarbeitet werden (S. 200, Nr. 11, 12).[40] Im Schulbuch folgt eine Einführung der Primzahlen als unteilbare „Diamanten im Zahlenreich“ (S. 203), die mithilfe des „Siebs des Eratosthenes“ ermittelt werden können. Eine Implementierung des Verfahrens mit einem Tabellenkalkulationsprogramm findet sich nicht, obwohl das Buch bei anderen Themen Hinweise zum Computereinsatz gibt (S. 8). Primfaktorzerlegungen werden durch Rechenbäume visualisiert und, als eindeutiger „Fingerabdruck einer Zahl“ (S. 205), ebenfalls mit außermathematischen Vorstellungen verknüpft. Der Einführung und Berechnung von Primzahlen und Primzahlzerlegungen schließt sich ein (historischer) Exkurs in die Zahlentheorie an (S. 206-208). Darin geht es um Primzahlzwillinge, Perfekte Zahlen, die „Goldbach-Vermutung“ und um die Jagd nach einer größten bekannten Primzahl. Der Abschnitt über diese Jagd integriert auch deren historischen Werdegang. Er beinhaltet die Aussage „EUKLID aus Alexandria hat schon vor mehr als 2300 Jahren bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt“ (S. 208),[41] die mittelalterlichen Überlegungen von MERSENNE zur Gestalt von Primzahlen und den 1903 von NELSON COLE erbrachten Beweis, dass $2^{67} - 1$ keine Primzahl ist. Zudem wird der mathematische „Sport, die größte bekannte Primzahl zu übertreffen“ (S. 208) beschrieben, bei dem noch heute die Primzahl-Formel von MERSENNE bedeutsam ist. Dieser Exkurs gibt exemplarisch Einblicke in die mathematische Forschungsgeschichte und zeigt, dass Mathematik (immer noch) eine lebendige Wissenschaft ist.

Nach diesem zahlentheoretischen Einschub über Primzahlen folgt die Bestimmung des ggT und kgV. Dies geschieht zunächst durch systematisches Probieren (Aufschreiben aller Teiler bzw. Vielfachen) und wird erst nach einigen Übungsaufgaben mittels Primzahlzerlegung systematisiert (S. 212, Nr. 12).

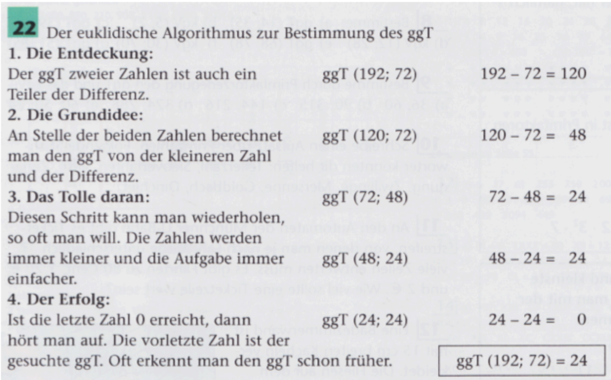
---

menregel für 9 (S. 202, Nr. 25) und bei der Einführung des ggT als Seitenlänge des kleinstens Quadrates, das durch Falten aus einem Rechteck entsteht (S. 209, Nr. 2).

[40] Dabei werden die Regeln zur (Nicht-)Teilbarkeit einer Summe schon implizit benutzt. Ihre Begründung wird erst danach gefordert (S. 201, Nr. 20).

[41] Aus dieser Aussage wird dann gefolgert, dass es keine größte Primzahl gibt. Unberücksichtigt bleibt, dass die Kausalität eigentlich andersrum war. EUKLID bewies, dass es keine größte Primzahl gibt und daraus folgt, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss.

Dazu soll das Verfahren, welches anhand eines Zahlenbeispiels dargestellt ist, von Schülern beschrieben werden. Die hierbei teilweise vorgegebenen Formulierungen leiten die Schüler zu einer verbal-begrifflichen Algorithmisierung. Ein solches Nebeneinander von verbal-begrifflicher Beschreibung des Algorithmus und seiner Durchführung am Zahlenbeispiel findet sich auch beim Euklidischen Algorithmus, der das Kapitel über Teilbarkeit abschließt.[42]



22 Der euklidische Algorithmus zur Bestimmung des ggT

1. Die Entdeckung: Der ggT zweier Zahlen ist auch ein Teiler der Differenz.	ggT (192; 72)	192 – 72 = 120
2. Die Grundidee: An Stelle der beiden Zahlen berechnet man den ggT von der kleineren Zahl und der Differenz.	ggT (120; 72)	120 – 72 = 48
3. Das Tolle daran:	ggT (72; 48)	72 – 48 = 24
Diesen Schritt kann man wiederholen, so oft man will. Die Zahlen werden immer kleiner und die Aufgabe immer einfacher.	ggT (48; 24)	48 – 24 = 24
4. Der Erfolg: Ist die letzte Zahl 0 erreicht, dann hört man auf. Die vorletzte Zahl ist der gesuchte ggT. Oft erkennt man den ggT schon früher.	ggT (24; 24)	24 – 24 = 0
		ggT (192; 72) = 24

Abb. 7: Euklidischer-Algorithmus in (Lergenmüller/Schmidt 2009, S. 213)

Bei der begrifflichen Beschreibung des Algorithmus zielen Ausdrücke wie „Das Tolle“, „die Aufgabe [wird] immer einfacher“, und „Der Erfolg“ auf affektive Aspekte von Unterricht, wie Interesse und (Lern-)Bereitschaft ab. Auch steckt in der Formulierung „Diesen Schritt kann man wiederholen, so oft man will“ die Idee der Iteration. Damit bietet das Schulbuch an dieser Stelle, obwohl auch hier nicht explizit auf einen möglichen Computereinsatz hingewiesen wird, eine Möglichkeit mathematische und informatische Inhalte zu vernetzen.

Die nun schon angedeuteten Vernetzungsmöglichkeiten sollen wieder genauer analysiert werden. Der Knoten Inhalte des Vernetzungspentagraphen beinhaltet (ähnlich wie bei der Analyse von (Wörle 1980)) Charakterisierungen von Zahlen mittels Teilbarkeitsaussagen. Zu den algebraischen Inhalten kommen sowohl

[42] Der Euklidische Algorithmus wird zwar erst am Ende des Kapitels beschrieben, die ihm immanente Idee der Wechselwegnahme spielt allerdings schon bei der Einführung des Begriffs „gemeinsamer Teiler“ eine Rolle (S. 213). Zudem finden sich im ganzen Kapitel Hinweise auf das Leben und Wirken EUKLIDS (vgl. S. 206, Nr. 20, S. 208, S. 212, Nr. 18, S. 213).

geometrische Aspekte (Teiler als Seiten eines Rechtecks) als auch analytische Aspekte (Beschreibung von Algorithmen). Auch Möglichkeiten zur Thematisierung diskreter Inhalte finden sich im Kapitel, wenn auch nur implizit. Die Darstellung des kgV als Treffpunkte auf einer kontinuierlich skalierten Zahlengeraden (S. 210), der historische Exkurs in die Zahlentheorie und der Euklidische Algorithmus sind Beispiele hierfür. Das Kapitel vernetzt also die mathematischen Gebiete Algebra (Zahlentheorie), Analysis, Geometrie und (implizit) Diskrete Mathematik. Die geometrischen Inhalte bieten hierbei reichhaltigere Darstellungen von Lerngegenständen. Der Knoten Repräsentationen des Vernetzungspentagraphen enthält die oben beschriebenen Darstellungen der Inhalte. Konkret sind diese: Rechtecke, Mengen(-diagramme), Rechenbäume, Tabellen und verbal-begriffliche Beschreibungen von Algorithmen. Zusätzlich zu dieser Darstellungsvielfalt werden auch andere für die Begriffsbildung wichtige Aspekte wie beispielsweise der intermodale Transfer zwischen enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene berücksichtigt (vgl. S. 209, Nr. 2). Das Schulbuch regt (wie im Vorwort angekündigt) im Umgang mit verschiedenen Inhalten und deren Repräsentationen unterschiedliche Tätigkeiten an. Im Vordergrund stehen Heuristiken (beim Finden der Teilbarkeitsregeln) als Prozessidee, Fragen und Argumentieren (besonders beim zahlentheoretischen Exkurs)[43] als Schnittstellenideen sowie Algorithmisieren, Strukturieren und Formalisieren (bei der Beschreibung der Algorithmen zur Bestimmung des ggT und kgV durch Primfaktorzerlegung) als innermathematische Tätigkeitsideen. Zusätzlich zur Vernetzung von Inhalten, Repräsentationen und Tätigkeiten bietet das Schulbuch durch Bezüge zum Leben und Werk EUKLIDs und insbesondere durch den Exkurs in die Zahlentheorie Verbindungen von Inhalten und deren historischer Genese. Eine Vernetzung zwischen Genese und Repräsentation findet nicht statt. Als Besonderheit sei noch auf S. 208, Nr. 27 hingewiesen. Es soll berechnet werden, wie viele Seiten des Schulbuches (78 Ziffern pro Zeile und 53 Zeilen pro Seite) mit der Mersenne-Zahl $2^{216091} - 1$, die 1985 von einem Mathematiker als 65050-stellige Primzahl berechnet wurde, gefüllt werden könnten, wenn die Zahl lückenlos im Schulbuch abgedruckt wäre. Die Aufgabe stellt einen Versuch dar, eine gewisse Werthaltung der Schüler gegenüber den (historischen) Errungenschaften von Mathematik zu vermitteln und zielt somit auf

[43] Da im historischen Exkurs Tätigkeiten angeregt werden, die im restlichen Kapitel nicht im Vordergrund stehen, ergeben sich Vernetzungen zwischen den Knoten Genese und Tätigkeiten.

„Nichtkognitive“ Ziele von Unterricht ab. Eine Vernetzung zu solchen Zielen wird zusätzlich über die vielfältigen Tätigkeiten, die häufig spielerisch sind (S. 206, Nr. 19), und Repräsentationen der Inhalte (vgl. Formulierung des Euklidischen Algorithmus) ermöglicht. Zusammenfassend macht der Vernetzungspentagraph folgenden Vernetzungsmöglichkeiten deutlich.

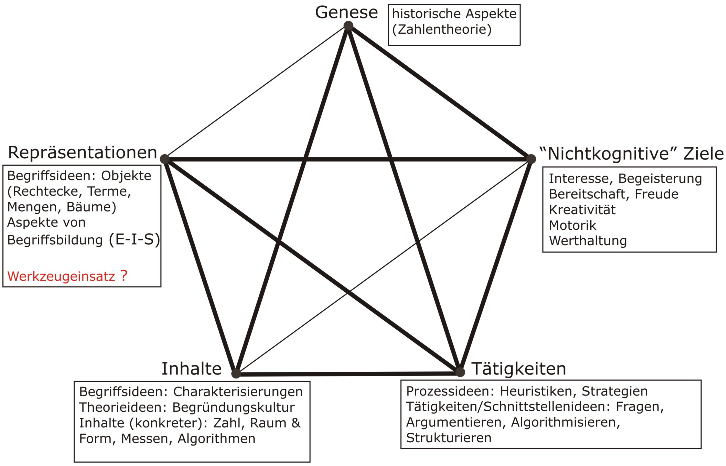


Abb. 8: Vernetzungspentagraph des Kapitels „Teilbarkeit der natürlichen Zahlen“ in *Mathematik Neue Wege 5*

Das Heron(?)-Verfahren

Ein Blick in das (sehr knappe) Vorwort des Mittelstufenbandes *Algebra 2* von TITZE, WALTER und FEUERLEIN zeigt, dass der Schwerpunkt des Buchs wieder auf den Aufgabenteilen liegt. Die Aufgaben sind nach zeitlichem Umfang und Schwierigkeitsgrad differenziert. Methodische Hinweise zum Vorgehen des Buchs gibt es keine.[44] Ebenfalls fehlen die im Unterstufenband zur „methodischen Einstimmung“ dienenden Vorübungen (Wörle 1980, Vorwort) vor den jeweiligen Kapiteln. Das Lehrwerk besteht also aus einem Lehrtext, der durch Aufgabenblöcke unterbrochen ist.

Dem zu untersuchenden Abschnitt „Näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln“ gehen inhaltlich die Einführung von Quadratwurzeln als (eindeutige)

[44] Auch im ersten Teil der Mittelstufenbände *Algebra 1* finden sich keine methodischen Hinweise im Vorwort (vgl. (Titze, Walter, Feuerlein 1974, S. 3)).

Lösungen von reinquadratischen Gleichungen und deren Berechnung mittels Lösungsverfahren für Gleichungen (binomische Formeln) und Intervallschachtelungen voraus.[45] Zudem wird der Körper der reellen Zahlen, als notwendige Erweiterung des bisherigen Zahlenbereichs, axiomatisch eingeführt (S. 184-186). Daran schließt sich ein Lehrtext „Zur Geschichte der reellen Zahlen“ an, der knapp auf die historischen Entwicklungen des Zahlbegriffs von den Babyloniern bis zur Neuzeit eingeht (S. 189). Ausgehend von dieser historischen Darstellung wird nun ein Verfahren der numerischen Mathematik zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln entwickelt, dessen Rechenaufwand geringer als bei der Intervallschachtelung ist (S. 189).

B. Iterationsverfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln

Berechne nach dem Vorbild in Abschnitt A für $\sqrt{5}$ zwei Verbesserungen, beginnend mit dem Näherungswert 2!

Soll zu einer beliebigen rationalen Zahl² $a > 0$ die Quadratwurzel berechnet werden und ist ein Näherungswert x_0 bekannt, so lautet der Ansatz:

$$x_1 = x_0 + d_1$$

Es soll gelten:

$$(x_0 + d_1)^2 = a$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 d_1 + d_1^2 = a$$

Gilt $d_1^2 \ll 2x_0 d_1$, d.h. ist d_1^2 gegenüber $2x_0 d_1$ vernachlässigbar klein, so gilt näherungsweise

$$d_1 = \frac{a - x_0^2}{2x_0},$$

und wegen $x_1 = x_0 + d_1$ ist dann $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right)$.

Abb. 9: Schematische Darstellung des Näherungsverfahrens zur Berechnung von Quadratwurzeln. Entnommen aus (Titze 1975, S. 190).

Die Idee des Verfahrens ist, ausgehend von einer bekannten Näherung x_0 für die zu berechnende Quadratwurzel eine bessere Näherung zu berechnen, indem der Fehler d_1, der bei dieser Näherung gemacht wurde, immer kleiner gemacht wird. Die schematische Darstellung des Iterationsverfahrens zeigt, dass es sich um das Heron-Verfahren handelt. Der Bezeichner „Heron-Verfahren“ und die eigentlich mit dem Verfahren verbundenen geometrischen Aspekte spielen im Lehrwerk allerdings keine Rolle. Dafür werden die Begriffe „Rekursionsformel“ (S. 190), „Genauigkeitsbedingung“ (S. 191) und „Flussdiagramm“ (fakultativer Abschnitt S. 191-193)[46] eingeführt, die aus dem Bereich der diskreten Mathema-

---

[45] Dabei werden der Eindeutigkeitssatz für die Lösung einer reinquadratischen Gleichung und die Eindeutigkeit der irrationalen Zahl, die in allen Intervallen einer Intervallschachtelung liegt, deduktiv bewiesen (S. 174, S. 179).

[46] Dass Flussdiagramme als fakultativ gekennzeichnet sind, sagt nichts über deren inhaltliche Verzichtbarkeit aus. Es ist der zur damaligen Zeit noch nicht standardmäßigen

tik stammen und eine Vernetzung von mathematischen und informatischen Inhalten ermöglichen. Auch der sich anschließende Abschnitt über „Genauigkeit und Fehler“ (S. 195-198) beim Rechnen mit Näherungswerten, der absolute und relative Fehler und deren Fortpflanzung beim Rechnen behandelt, stellt einen Berührungspunkt von Mathematik und Informatik dar.[47]

Eine Zusammenfassung mithilfe des Vernetzungspentagraphen liefert für den Knoten Inhalte folglich Begriffsideen wie Charakterisierung von Zahlen und (konkretere) Inhaltsideen wie die Ausarbeitung eines algorithmischen Verfahrens. Die mathematischen Gebiete Algebra, Analysis (Fehlerabschätzung) und diskrete Mathematik werden untereinander und mit informatischen Inhalten vernetzt. Der Knoten Repräsentationen beinhaltet verschiedene Darstellungen der Inhalte als Terme, Gleichungen, Flussdiagramme und die algebraischen und begrifflichen Beschreibungen von Algorithmen. Zudem ist der Werkzeugeinsatz gefordert. Weitere Aspekte von Begriffsbildung bleiben unberücksichtigt. Die im Buch angeregten Tätigkeiten gehen im untersuchten Abschnitt über reines Berechnen und Nachvollziehen des Lehrtextes kaum hinaus. In den Abschnitten zu Quadratwurzeln und der Intervallschachtelung sind auch einige Beweise zu führen. Dort werden also Tätigkeitsideen wie Deduzieren und Formalisieren angesprochen. Schnittstellenideen spielen auch dort keine Rolle. Vernetzungen zur Genese sind im Einschub „Zur Geschichte der reellen Zahlen“ angedeutet, werden aber im untersuchten Abschnitt nicht ernsthaft verfolgt.[48] Der Exkurs ist der einzige längere Lehrtext im Kapitel. Somit ergeben sich aus der speziellen Wahl der Darstellungsform Vernetzungen zwischen den Knoten Repräsentationen und Genese. Der historische Exkurs kann Interesse bei Schülern anregen und damit ein Erreichen von „Nichtkognitiven“ Zielen des Unterrichts zumindest andeuten.[49] Eine stärkere Vernetzung zu den Zielen im affektiven Bereich

---

Verfügbarkeit von Computern geschuldet. Daher sind auch alle Aufgaben, zu deren Bearbeitung ein Computer nötig wäre als fakultativ gekennzeichnet (vgl. S. 194, Nr. 2).

[47] Die Überlegungen zu Fehlern werden allerdings nicht auf das vorher vorgestellte Iterationsverfahren übertragen. Damit wird die Chance zu einer, in der Informatik sehr wichtigen, Verfahrensanalyse ausgelassen. Beispiele aus der Physik mit ungenauen Eingangsdaten dienen stattdessen als Anwendung der Fehlerrechnung (S. 197).

[48] Beleg dafür auch ist die Interpretation des (historisch gesehen geometrisch motivierten) Heron-Verfahrens als rein numerisches Verfahren.

[49] Tätigkeiten und Repräsentationen sind insgesamt zu einseitig, um zum Erreichen „Nichtkognitiver“ Ziele beizutragen.

schafft das Lehrwerk jedoch über andere dargebotene Inhalte. Durch die ausführliche Thematisierung von Fehlern bei Näherungswerten kann Schülern eine gewisse Werthaltung im Umgang mit der meist exakt erscheinenden Mathematik vermittelt werden. Die Anwendung der Fehlerrechnung auf physikalische Inhalte dient einer Förderung von Interesse und Bereitschaft. Defizite aufseiten der „Nichtkognitiven“ Ziele liegen im Bereich von Kreativität.

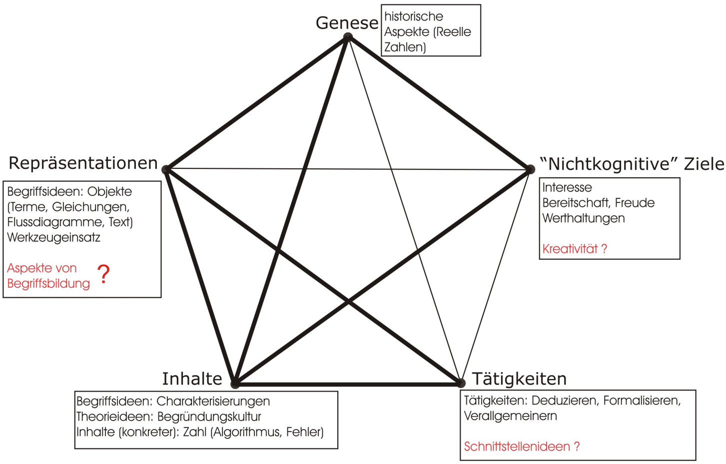


Abb. 10: Vernetzungspentagraph des Kapitels „Näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln“ in *Algebra 2*

Der Band für die Klassenstufe 8 der Mathematikschulbuchreihe „Mathematik Neue Wege“ knüpft im methodischen Vorgehen an den Unterstufenband für die 5. Klasse an und transportiert die gleiche Überzeugung von Lernen als aktivem selbstgesteuerten Prozess. Dies zeigt sich im Vorwort, das sich wortwörtlich schon im Band für die 5. Klasse findet. Somit ergeben sich für einen Vergleich der Methodik der Bände *Algebra 2* und *Mathematik Neue Wege 8* die gleichen Unterschiede wie beim Vergleich der Bände *Arithmetik 1 mit Geometrie* und *Mathematik Neue Wege 5*. Doch auch im inhaltlichen Aufbau geht *Mathematik Neue Wege 8* diesmal einen anderen Weg als *Algebra 2*. Das Schulbuchkapitel „Reelle Zahlen“ (welches das Heron-Verfahren enthält) gliedert sich in eine Einführung des Wurzelbegriffs und Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln. Erst danach kommen die Erweiterung des bekannten

Zahlbereichs[50] (S. 110 ff.) und Rechenregeln für Wurzelterme mit und ohne Variablen (S. 118 ff.). Aus dem unterschiedlichen inhaltlichen Aufbau der beiden Schulbücher allein ergeben sich jedoch keine Konsequenzen für den Aufbau des Unterkapitels zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln, da in (Titze/Walter/Feuerlein 1974) die vorher bereitgestellten Inhalte, wie Rechenregeln für Wurzelterme, dort nicht benutzt wurden. Unterschiede resultieren eher aus den verwendeten Darstellungen, die in *Neue Wege 8* reichhaltiger sind als in *Algebra 2*. Das zeigt sich schon im Einführungskapitel, das Wurzeln algebraisch als Lösungen von quadratischen Gleichungen und geometrisch als Seitenlängen von Quadraten einführt. Zunächst sind Quadratwurzeln nur durch systematisches Ausprobieren bzw. Überschlagsrechnungen bestimmbar (S. 97, Nr. 5 bzw. S. 99, Nr. 9). Diese Verfahren werden dann zur Intervallschachtelung (als Folge von „Lupen“ auf der Zahlengeraden) systematisiert (S. 100).[51] Das Zusammenspiel von algebraischen und geometrischen Darstellungen (und darüber hinaus die Berücksichtigung von verschiedenen Darstellungsebenen) bleibt auch bei der sich anschließenden Einführung des Heron-Verfahrens erhalten. Hierzu wird, ausgehend vom (außermathematischen) Beispiel eines Pizzabäckers, der einen Pizzateig rotierend in die Luft wirft, um ihn zu vergrößern, bis er in die Pizzaform passt, die Annäherung eines Rechtecks an ein flächengleiches Quadrat demonstriert (S. 103). Dieses (zunächst rein) geometrische Verfahren wird dann über eine verbal-begriffliche Beschreibung anhand eines Zahlenbeispiels zu seiner formal-algebraischen Darstellung überführt.

---

[50] Das Unterkapitel zur Erweiterung des Zahlenbereichs dient auch der systematischen Einführung und Behandlung verschiedener Beweisverfahren. Teilweise werden die Beweistechniken an historischen Beispielen demonstriert (S. 116, Bsp. E, EUKLIDs Beweis für die Irrationalität $\sqrt{2}$ von bzw. S. 117, Nr. 22, Beweis der Irrationalität des Verhältnis von Seitenlänge und Diagonale im Quadrat).

[51] Mithilfe von Intervallschachtelungen werden Werte der Wurzelfunktion berechnet und der zugehörige Graph gezeichnet (S. 101, Nr. 17). Die Richtigkeit der Formel für den Euklidische Abstand eines Punktes zum Ursprung soll anhand von Berechnungen und Messen in einer Zeichnung überprüft werden (S. 101, Nr. 19).

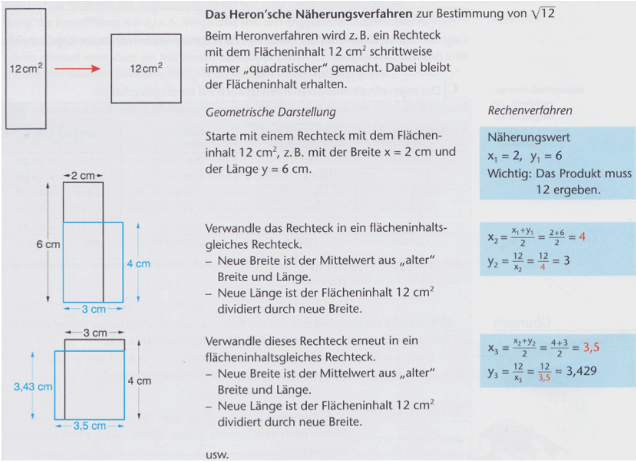


Abb. 11: Heron-Verfahren (Lergenmüller/Schmidt 2010, S. 105)

In diesem Abschnitt steht allerdings nicht das Heron-Verfahren im Mittelpunkt, sondern es geht allgemeiner um Iterationsverfahren (zur Wurzelbestimmung).[52] Dem Heron-Verfahren kommt dabei, durch seine schnelle Konvergenzgeschwindigkeit (S. 106, Bsp. B und C), eine Stellung als „Primus inter Pares" zu. Es werden aber auch das Intervallhalbierungsverfahren in Form eines Flussdiagramms bzw. einer formal-algebraischen Beschreibung (S. 104, Nr 2) und zwei weitere Iterationsverfahren, die eigenständig erarbeitet werden sollen, eingeführt (S. 107, Nr. 9 bzw. S. 109, Nr. 16). Neben reinen Übungsaufgaben zu den Verfahren (beispielsweise S. 106, Nr. 5, 6) kommen viele Aufgaben vor, die zur Analyse der Algorithmen anleiten. Beispielsweise werden der Einfluss des Startwerts auf die Konvergenzgeschwindigkeit des Heron-Verfahrens (S. 106, Bsp. B und S. 108, Nr. 12) und der Zusammenhang zwischen Intervallhalbierungsverfahren und Intervallschachtelung (S. 106, Nr.7) untersucht. Diese Stelle bietet Vernetzungsmöglichkeiten zu informatischen Inhalten.

Von der inhaltlichen Beschreibung des Kapitels „Reelle Zahlen" und seines Unterkapitels „Wurzeln und Näherungsverfahren" lässt sich ableiten, welche Aspekte der Knoten Inhalte des Vernetzungspentagraphen enthält. Auf einer übergeordneten Ebene geht es wiederum um die Begriffsidee „Charakterisie-

[52] Vgl. den blauen Kasten auf S. 107, in dem wichtige Begriffe (Iterationsvorschrift, Startwert, Index) im Zusammenhang mit Iteration eigeführt werden.

rung“ (von Zahlen). Die mathematischen Gebiete Algebra, Analysis, Geometrie und Diskrete Mathematik werden vernetzt. Gleichzeitig steht wieder eine durch aktuelle Überzeugungen von Unterricht und Lernen geprägte Begründungskultur im Vordergrund. Als Beweise sind formal-algebraische und verbal-begriffliche Argumentationen zugelassen, was zeigt, dass nicht ein streng deduktives Vorgehen im Vordergrund steht, sondern der Fokus eher auf dem Verstehen und Durchdringen von Beweisideen und –verfahren liegt. Verschiedene Darstellungen von Beweisen und anderen Inhalten schaffen Vernetzungen zum Knoten Repräsentationen. Er enthält aus der Kategorie der Begriffsideen Objekte wie Seitenlängen von Rechtecken und Quadraten, Terme und Gleichungen, Tabellen und verschiedene Beschreibungen von Algorithmen. Tabellenkalkulationsprogramme und der grafische Taschenrechner sollen als Werkzeuge zur Implementierung des Heron-Verfahrens eingesetzt werden (S. 108, Nr. 10, 11).[53] Zudem werden auch andere für Begriffsbildung wichtige Aspekte berücksichtigt. Das Einführungsbeispiel zum Heron-Verfahren fordert von den Schülern die Regelhaftigkeit, die in der (hier noch ikonischen) geometrischen Darstellung steckt, herauszufinden und so bewusst den Übergang zwischen ikonischer und symbolischer Darstellungsebene zu vollziehen.[54] Konkret spielen dabei Tätigkeitsideen wie beispielsweise Fragen, Argumentieren, Deduzieren und Verallgemeinern eine Rolle.[55] Gerade beim Erkunden und Beweisen des Konvergenzverhaltens der Iterationsverfahren ist auch das Aktivieren von Heuristiken gefördert. Diese Ideen beinhaltet der Knoten Tätigkeiten des Vernetzungspentagraphen. Vernetzungen zur Genese der Inhalte sind im Abschnitt zum Heron-Verfahren eher weniger vorhanden und beschränken sich auf Aus-

---

[53] Um das Nebeneinander von algebraischen und geometrischen Darstellungen des Heron-Verfahrens beizubehalten, wäre das Programm „GeoGebra“ geeignet. Hierfür bietet sich eine Datei von Matthias Hornof an, die beide Darstellungen enthält und darüber hinaus noch zur Thematisierung von pixelbedingter Diskretisierung bei Computerdarstellungen genutzt werden kann (Hornof 2013). Wählt man dort beispielsweise den Startwert 2 für die Berechnung von $\sqrt{10}$, so verändern sich nach der 3. Iteration zwar noch die angegebenen Dezimalstellen der Zahlenwerte nicht jedoch die grafische Darstellung des approximierten Quadrats. Eine Konsequenz der im Computer nötigen Diskretisierung und Pixelung. Andere Beispiele und deren mögliche Thematisierung im Mathematikunterricht, für durch Diskretisierung und Pixelung hervorrufbare Fehldarstellungen des Computers, finden sich in (Lambert/Selzer 2005).

[54] Die enaktive Ebene findet im Kapitel allerdings keine Berücksichtigung.

[55] Da diese Tätigkeiten auch durch den Darstellungswechsel angeregt werden, resultieren daraus Vernetzungen zwischen den Knoten Repräsentationen und Tätigkeiten.

sagen wie „schon seit mehreren tausend Jahren ist den Menschen bekannt, dass man nur in besonderen Fällen Wurzeln exakt mit Dezimalzahlen angeben kann" (S. 105) und eine Aufgabe zu einer Näherung für $\sqrt{3}$ von ARCHIMEDES (S. 108, Nr. 13).[56] Ein Erreichen von „Nichtkognitiven" Zielen des Unterrichts wird in diesem Abschnitt besonders über die verschiedenen Tätigkeiten und Repräsentationen angestrebt. Beim Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen sollen die Schüler beispielsweise als „Experten" agieren und an vielen anderen Stellen zu eigenständigen Forschern werden (S. 108, Nr. 12). Die Formulierungen der Arbeitsaufträge und die vielseitigen Tätigkeiten zielen somit auf Interesse, Bereitschaft, Freude und Kreativität aus dem Bereich der „Nichtkognitiven" Ideen ab.

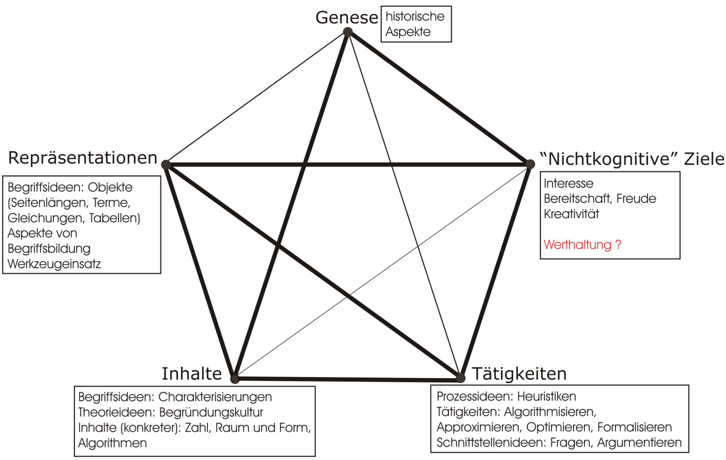


Abb. 12: Vernetzungspentagraph des Kapitels „Wurzeln und Näherungsverfahren" in *Mathematik Neue Wege 8*

4. Fazit und Ausblick

Mithilfe des aus der Theorie Fundamentaler Ideen hergeleiteten Vernetzungspentagraphen wurden Inhalte in Schulbüchern auf die dort vorhandenen Vernetzungsmöglichkeiten zwischen wichtigen Aspekten von Unterricht untersucht.

[56] Reichhaltigere Vernetzungen zu historischen Aspekten finden sich im Unterkapitel „Irrationale Zahlen".

Die jeweils vorangestellte inhaltliche und methodische Beschreibung der untersuchten Schulbuchkapitel ermöglichte eine Herleitung von (impliziten und expliziten) Vernetzungen zwischen Inhalten, Repräsentationen, Tätigkeiten, Genese und „Nichtkognitiven“ Zielen. Auf inhaltlicher Seite wurde dabei besonders auf Vernetzungen zwischen den klassischen Gebieten der Schulmathematik und Diskreter Mathematik geachtet und untersucht, ob Vernetzungen zu informatischen Inhalten zumindest implizit enthalten sind. Die Analyse zeigte, dass trotz inhaltlich ähnlichem Aufbau der sich entsprechenden Kapitel, unterschiedliche Vernetzungspotentiale entstehen können. Ein Vergleich der zwei Bände der gleichen Schulbuchreihe macht deutlich, dass sich auch im Zuge eines Spiralcurriculums angestrebte Vernetzungen ändern. Beispielsweise werden in *Algebra 2* Vernetzungen zur Genese von Inhalten und den „Nichtkognitiven“ Zielen von Unterricht angestrebt, die im Unterstufenband *Arithmetik 1 mit Geometrie* fehlen. In beiden Schulbuchreihen sind Vernetzungen zwischen Mathematik und Informatik in den Mittelstufenbänden deutlicher als in den Unterstufenbänden.

Insgesamt kann der Vernetzungspentagraph als Analysewerkzeug aufseiten von Lehrpersonen verstanden werden, der die Existenz oder eben Auslassung von Vernetzungsmöglichkeiten, erkennen lässt. Auf dieser Basis bleibt es Aufgabe jedes Nutzers stimmige Entscheidungen für die Aufbereitung und Durchführung seines Unterrichts zu treffen und umzusetzen. Weiterhin ist zu beachten, dass die Kanten des Vernetzungspentagraphen keine Aussage darüber machen, ob Vernetzungen zwischen Knoten paarweise sind oder ein Zusammenspiel von mehreren Vernetzungen stattfindet. Auch eine Unterscheidung der Kanten nach explizit oder implizit auftretenden Vernetzungsmöglichkeiten und danach, ob Vernetzungen zwischen Knoten nur an einzelnen Stellen (z. B. bei einer Übungsaufgabe) vorkommen oder sich wie ein roter Faden durch das gesamte Schulbuchkapitel ziehen, wurde (noch) nicht vorgenommen. Eine solche Ausdifferenzierung steht noch aus und kann zum Thema weiterer Forschungsarbeiten werden.

Literatur

Baumann, R. (1996). Didaktik der Informatik. Stuttgart.

Bender, P. (1994). Wo im Fächer-Kanon der allgemeinbildenden Schule soll die Informatik angesiedelt werde?. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen. Zur Zielsetzung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ von 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Hildesheim. S. 8- 17.

Bender, P. (2004). Die etwas andere Sicht auf den mathematischen Teil der internationalen Vergleichsuntersuchung PISA sowie TIMSS und IGLU. In: DMV-Mitteilungen 12-2/2004, S. 60-67.

Bender, P., Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie. Wien.

Bruner, J. (1960). The Process of Education. Cambridge Massachusetts.

Bruner, J. (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin.

Danckwert, R. (1983). Anmerkungen zur Kombinatorik. In: Der Mathematikunterricht 29(5), S. 7-16.

Dörfler, W. (1984). Fundamentale Ideen der Informatik und Mathematikunterricht. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hg.). Symposion über Schulmathematik. Didaktik Reihe Nr. 10. Salzburg, S. 19-40.

Fischer, R. (1976). Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8, S. 185-192.

Fischer, R., Malle, G. (1985). Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim.

Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport. BBS (Hg.) (2007). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan achtstufiges Gymnasium Sekundarstufe I. http://www.hamburg.de/contentblob/2536224/data/mathematik-gy8-sek-i.pdf Abruf vom 20.10.2012.

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts. Göttingen.

Führer, L. (2007). Was könnte zeitgemäßer Mathematikunterricht zu naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung beitragen? In: Ludwig, M., Oldenburg, R., Roth, J. (Hg.). Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. Bericht über die 24. und 25. Arbeitskreistagung des Arbeitskreises „Geometrie". Hildesheim, S. 11-52.

Gesellschaft für Informatik. GI (2008). Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule. Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I. http://www.sn.schule.de/~istandard/docs/bildungsstandards_2008.pdf?PHPSESSID=msnibchbtkdai4e8o2hicf8bs3 Abruf am 17.10.2013.

Heitele, D. (1976). Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. Dortmund.

Hischer, H. (1998). Fundamentale Ideen und Historische Verankerung dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: mathematica didactica 21, S. 3-21.

Hornof, M. (2013). GeoGebra-Datei zum Heronverfahren. Annäherung von Quadratwurzeln. Klasse 8. http://www.geogebratube.org/material/show/id/33272 Abruf vom 25.10.2013.

Humenberger, J, Reichel, H.-C. (1995). Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim (u. a.).

Knöß, P. (1989). Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Kultusministerkonferenz. KMK (2003). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss vom 4.12.2003. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2004). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss vom 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf Abruf vom 10.09.2012.

Kulturministerkonferenz. KMK (2012). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf Abruf vom 26.10.12.

Kuntze, S., Kurz-Milcke, E. (2011). Professionelles Wissen von Lehrkräften zu mathematikbezogenen „großen Ideen". In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 507- 510.

Lambert, A. (2003). Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: Bender, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" vom 27. bis 29. September 2003 in Soest. Hildesheim, S. 91-104.

Lambert, A. (2011). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Vernetzung und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Bericht über die 28. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie" vom 9. bis 11. September 2011 in Marktbreit. Hildesheim, S. 5-32.

Lambert, A. (2012). Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-) Unterricht. Eingangsstatements zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes. http://www.uni-saarland.de/fileadmin/user_upload/Einrichtungen/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_f%C3%BCr_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf Abruf vom 06.11.12.

Lambert, A., Selzer, P. (2005). Schillernde Diskretisierung - eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik. In: Kortenkamp, U., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Informatische Ideen und Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen an der Donau. Hildesheim, S. 87-100.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hg.) (2009). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Saarland 5. Schuljahr. Braunschweig.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hg.) (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Saarland 8. Schuljahr. Braunschweig.

Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation. http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf Abruf vom 12.09.13.

Schreiber, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 2(3), 165-171.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica 6, S. 65-76.

Schweiger, F. (1982). Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 103-111.

Schweiger, F. (1988). Mathematik als Wissenschaft „interessanter Objekte". In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 295-298.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: Journal für Mathematik-Didaktik 13(2/3), S. 199-214.

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In: Maasz, J., Schoeglmann, W. (Hg.). New Mathematical Research and Practice, S. 63-73

Schweiger, F. (2010). Fundamentale Ideen. Aachen.

Schubert, S., Schwill, A. (2004). Didaktik der Informatik. München.

Schupp, H. (1992). Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Mannheim (u. a.).

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. http://www.wipsce.org/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf Abruf vom 01.01.14.

Schwill, A. (1994). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen. Zur Zielsetzung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" von 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Hildesheim. S. 18-25.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.-H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1, Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig.

Titze, H., Walter, H., Feuerlein, R. (Hg.) (1974). Algebra 1. Ein Lehr- und Arbeitsbuch. 4. verbesserte Auflage. München.

Titze, H., Walter, H., Feuerlein, R. (Hg.) (1975). Algebra 2. Ein Lehr- und Arbeitsbuch. 2. Auflage. München.

Vohns, A. (2007). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Norderstedt.

Vollrath, H. J. (1978). Rettet die Ideen! In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 31, S. 449-455.

Vollrath, H. J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg.

von der Bank, M.-C. (2012). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie“ vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken. Hildesheim. S. 83-124.

Winter, H. (1971). Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht 17(5), S. 40-66.

Wörle, K. (1980). Arithmetik 1 mit Geometrie. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für die 5. Klassen der weiterführenden Schulen. Ausgabe G. München.

Adresse der Autorin:
Marie-Christine von der Bank
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Fachrichtung 6.1 Mathematik
Universität des Saarlandes
Campus
D-66123 Saarbrücken
mcvdb@t-online.de