UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Begriffsbilder und –konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?

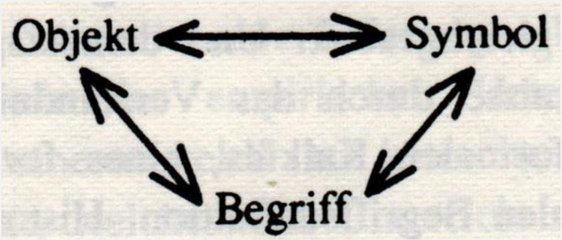
Marktbreit, den 14.09.2013

Übersicht

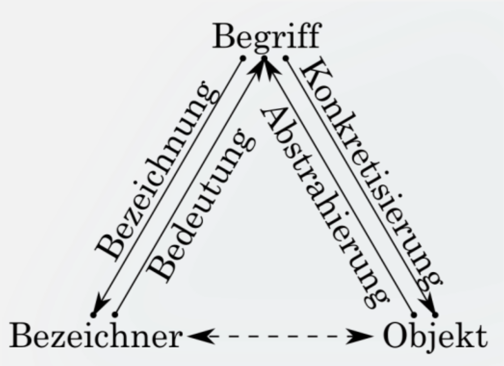
- Begriffsklärung
- Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck
  - Würfel
  - allgemein
  - Begriffsfeld
- Begriffsfeld psychologisch deskriptiv betrachtet
  - Würfel empirisch
  - TALL & VINNER, Philosophie & Psychologie, Fachmathematik
  - Fazit
- Begriffsbild und Begriffskonvention im Begriffsfeld
- Begriff psychologisch normativ betrachtet
  - Grundvorstellungen?!
  - zurück zum Würfel

Begriffsklärung

- Begriff, Bezeichner, Objekt
- Relationen dazwischen:
  Bezeichnung, Bedeutung, Konkretisierung, Abstrahierung
- Visualisierung ist durch ein semiotisches Dreieck möglich:

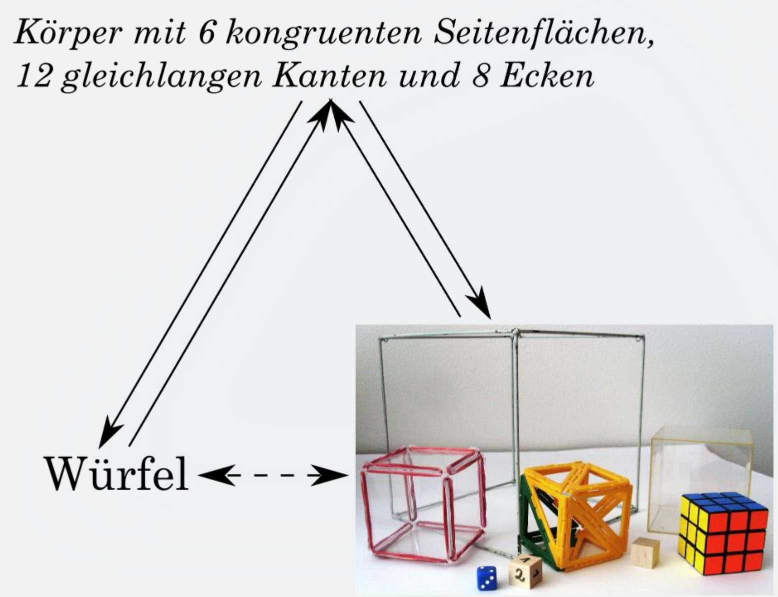


(Bromme & Steinbring 1990, S. 160)

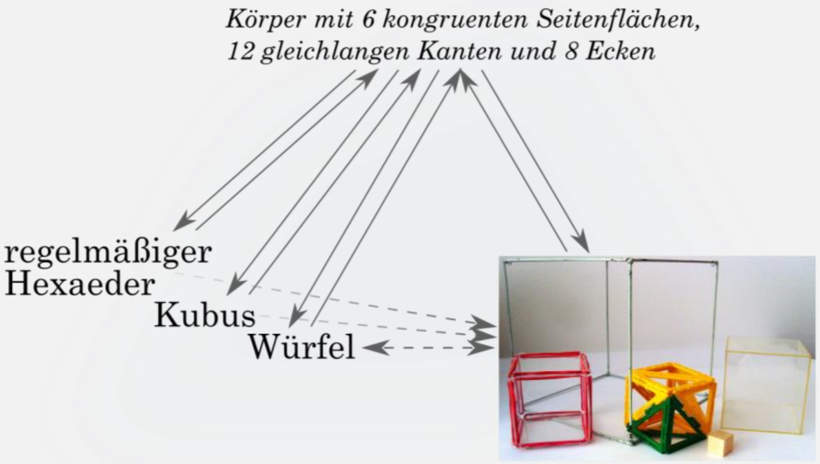


(vgl. Lambert 2012)

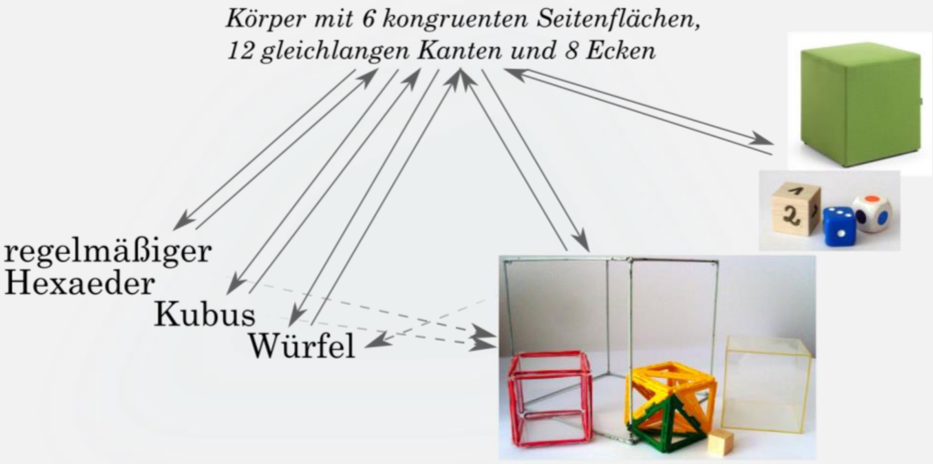
Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: Würfel



Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: Würfel

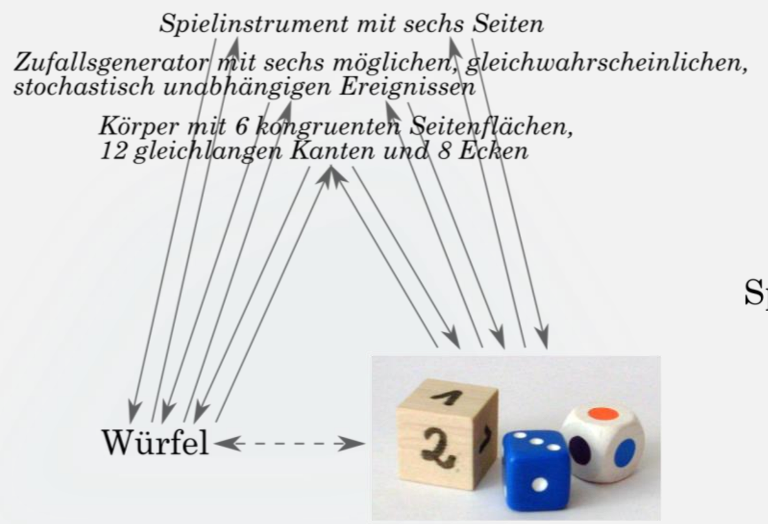


Fall 1

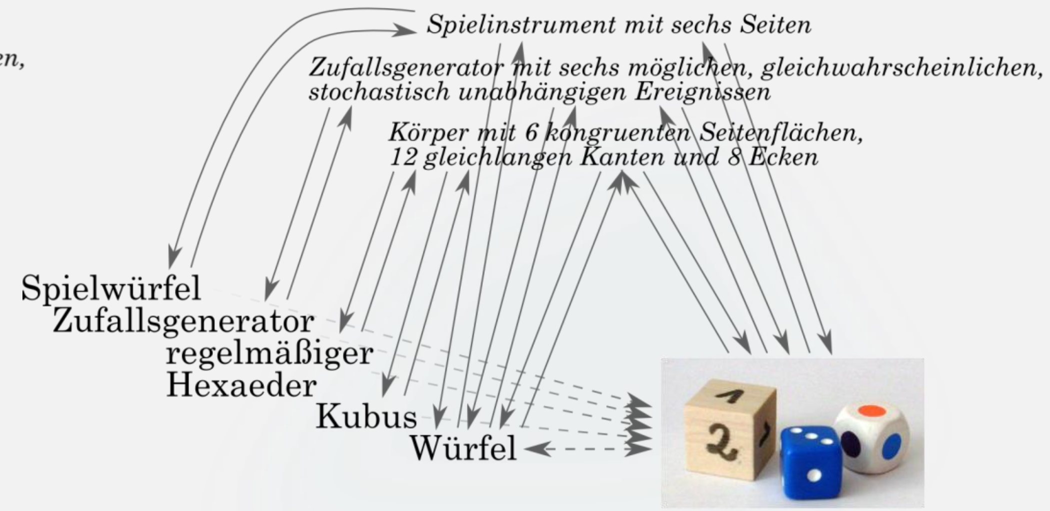


Fall 2

Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: Würfel

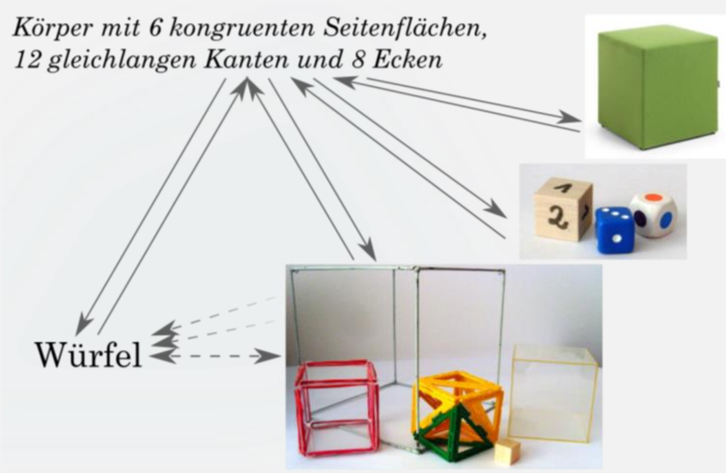


Fall 3



Fall 4

Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: Würfel



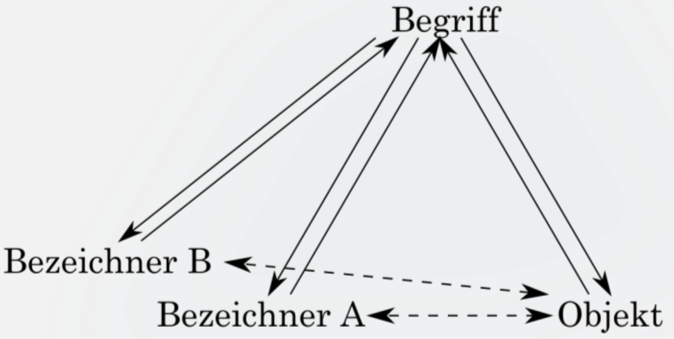
Fall 5

Fall 6

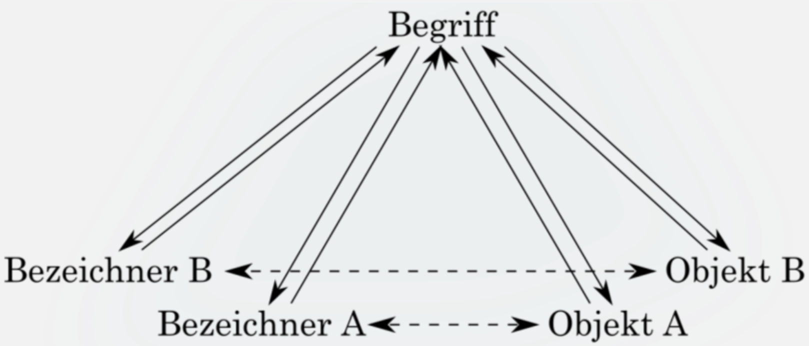
Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: allgemein

- Begriff, Bezeichner oder Objekt können Bestandteil mehrerer (im Folgenden der Übersichtlichkeit wegen zweier) semiotischer Dreiecke sein, die sich überlagern.

- Zwei semiotische Dreiecke können nach insgesamt $2^3 = 8$ verschiedenen Fällen verknüpft sein. (Davon sind zwei Fälle trivial)

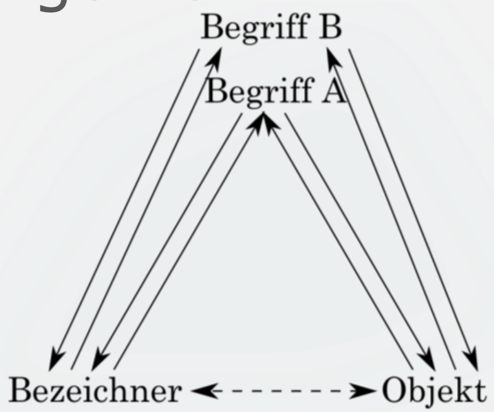


Fall 1

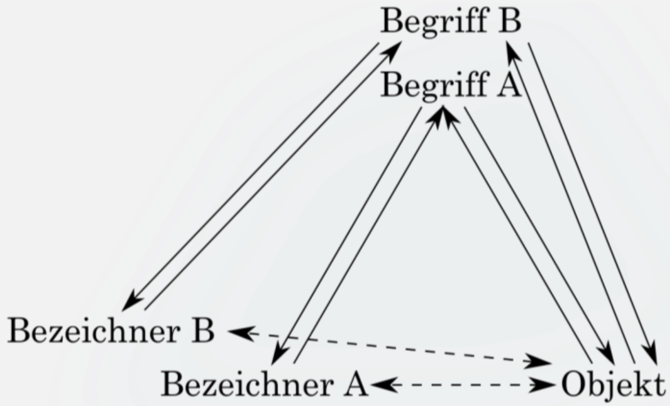


Fall 2

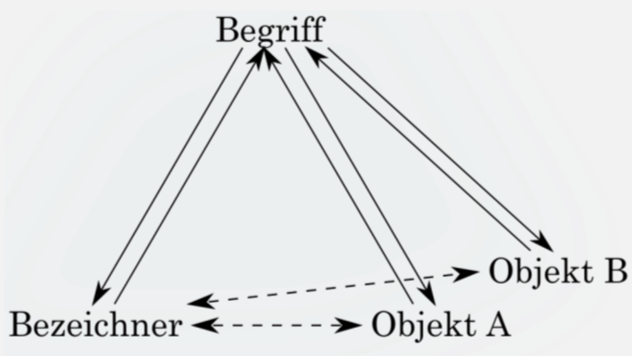
Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: allgemein



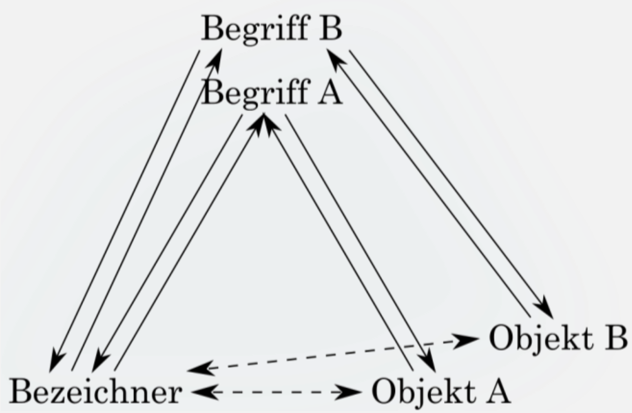
Fall 3



Fall 4



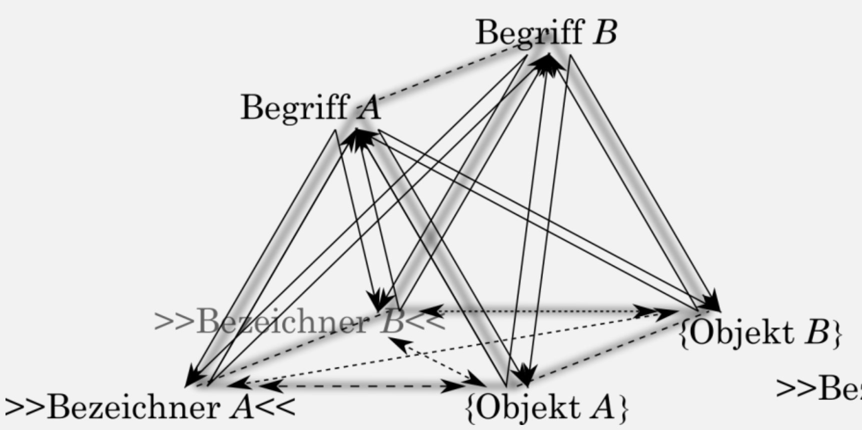
Fall 5

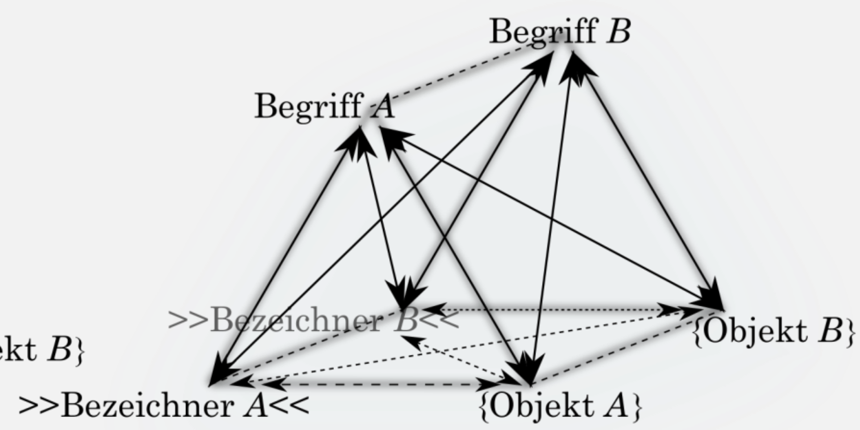


Fall 6

Mehrdeutigkeiten im semiotischen Dreieck: Begriffsfeld

- Die sich überlagernden und wechselwirkenden semiotischen Dreiecke sollen hier als Begriffsfeld bezeichnet (und in Form eines semiotischen Dreiecksprismas visualisiert) werden:





Begriff psychologisch deskriptiv betrachtet: Würfel empirisch

Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik

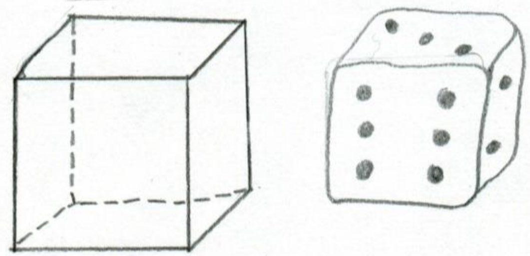
UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu „Würfel" einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

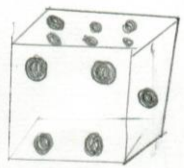
Begriffsbilder und –konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?



Ein Spielwürfel für Menschergere dich nicht.
Ein ganz normahler würfel wo nichts ~~[illegible]~~ drauf ist.
Mit 12 Kanten und 8 Ecken:
6 Quadrate. Und ein schön symetrischer Würfel.

Begriffsbilder und –konventionen
in Begriffsfeldern:
Was ist ein Würfel?

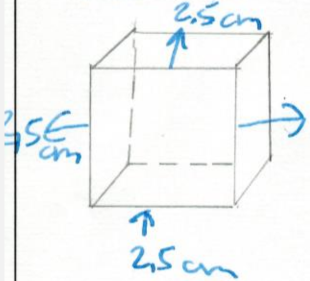
Einen Würfel kann man zum spielen benutzen! Ein Würfel sieht so aus:



(so sieht ein Spielwürfel aus!)

Ein Würfel geht nur bis zur Zahl Sechs (von 1-6)

Man kann einen Würfel auch so zeichnen. Würfel Müssen immer gleich große Seiten.

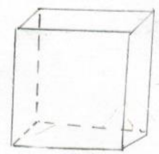


Man kann ihn für verschiedene Sache, gebrauchen zum Malen, Spielen, lernen. e.t.w.

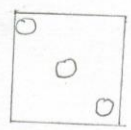
Wichtig: → Man muss immer mit Lineal zeichnen und Bleistift.

8 Ecken, 12 Kanten, 6 Flächen

Es gibt auch Würfel die eine andere
Form haben! Die haben dann eine
Diamanten Form. Dadurch sind dann
auch mehr Zahlen drauf.
zmB. 9-12 Würfel.



Würfel

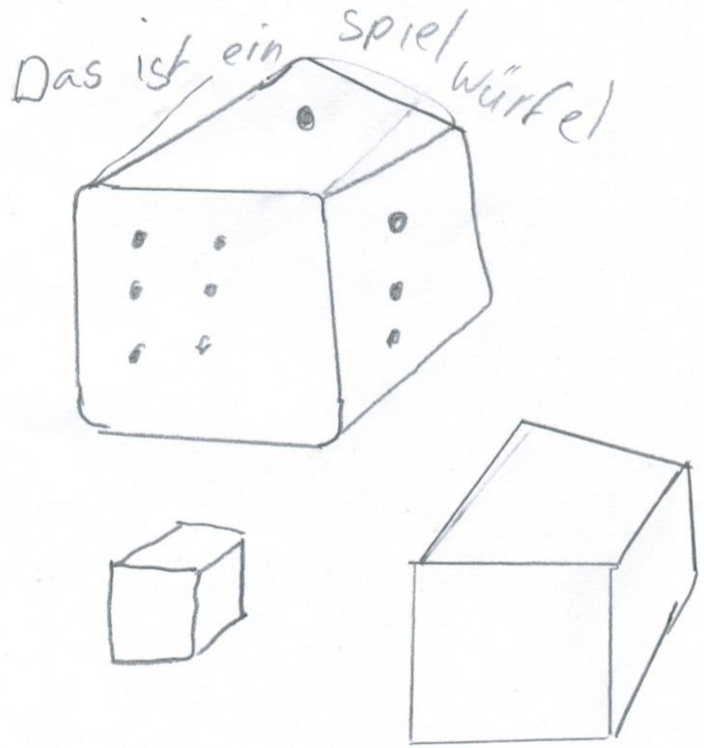


Spielwürfel

Ein Würfel hat gleich
lange Seiten die zu-
einander Parallel sind.
Klassenraume oder andere
Räume haben ein Würfel
vorm. Es gibt auch Lampen
oder Schuhkatongs die ein Würfel vorm haben.

Begriffsbilder und –konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?

Der würfel wird sehr oft bei Mensch arger dich nicht benutzt und bei Knifel und der Würfel hat gleich große seiten und ist beiden spielen die kanten abgerandet. Der Würfel kann mann in 3D malen.

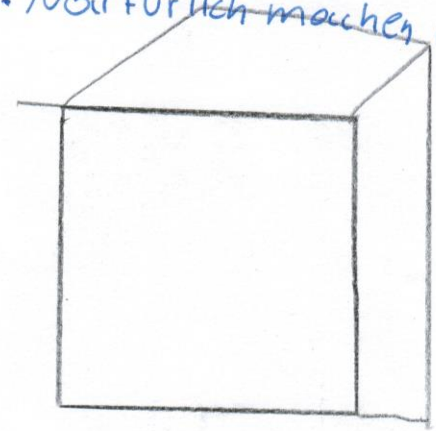


Er hat 6 seiten mit 6 zahlen, man braucht ihn führ
manche spiele: Monopolie, mensch ärger dich nicht...
Es gibt auch würfel mit 10 mehr oder wehinger
seiten.

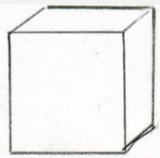
Begriffsbilder und –konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel?

Der würfel: Er hat 8 ecken, 6 flächen, 12 kanten
der würfel ist der perfekteste Körper und
alles gute daran ist er ist zum spielen
gedacht

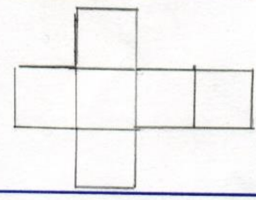
Mit einem Würfel kann man brett spiele Spielen,
Und es gibt auch ein Würfel denn nennt man meisten
Quader oder manche nennen den Würfel auch
So nomal würfel aber es ist besser wenn man
ein Würfel zum spielen also für brett spiele Würfel
nennt und den Würfel für Mathematik Quader
nennen würde. Natürlich machen es auch viele.



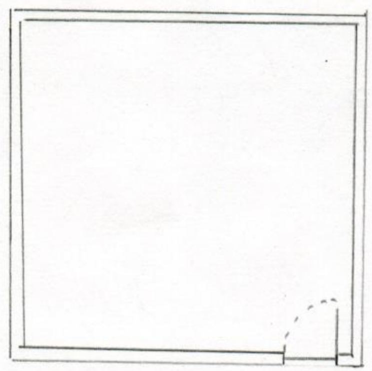
Und so sieht einiger
maßen ein würfel aus.



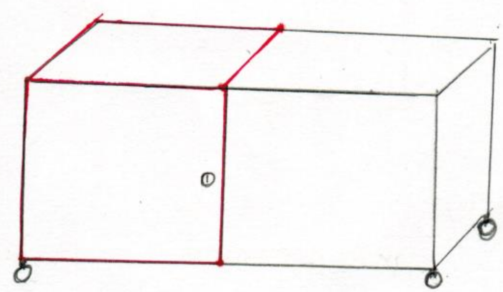
Der Würfel ist vür mich die Einfachste Form der Geometrie und ist trotzdem sehr oft zu sehen, ~~wie~~ ~~X~~ ~~da~~ in der ~~Industrie~~ Architektur oder vür Verpakungen



~~Es~~ Es gibt auch sehr fiele Würfelnetze, die konn man leicht zusammen fügen und sind leicht zu verstehen



Fiele Heuser sind Würfel, zumindest ist das die Grund idee. Fiele Mobel kan man in Wurfel zerlegen. Sie ist die Einfachste form, und gleich zeitich sehr Preziese zum bauen

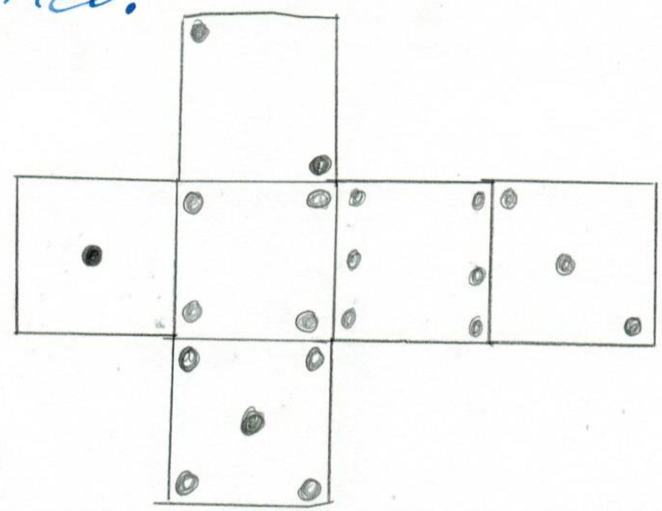


Er hat 21 Augen. Und 6 Seiten!

Mit dem Würfel kann man Spiele spielen.
Und Leute abschmeißen die einen nerven.

Da der Würfel meißtens klein ist kann
man ihn gut transportieren

Der Würfel:



Klassenstufe: 6

Begriff psychologisch deskriptiv betrachtet: TALL & VINNER

- TALL und VINNER: Concept Image (vs. Concept Definition)
- >>Concept Image<<: „the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures”
  (Tall & Vinner 1981, S. 152)
- >>Concept Definition<<: „a form of words used to specify [a] concept”
  (Tall & Vinner 1981, S. 152)

Begriff psychologisch deskriptiv betrachtet: Philosophie & Psychologie

- Vorläufer von Concept Image (vs. Concept Definition):
  - In der Philosophie bei: KANT; FREGE; CASSIRER; WITTGENSTEIN
  - In der Psychologie bei: PIAGET; BRUNER, GOODNOW und AUSTIN; ROSCH

- Entsprechend KANT, CASSIRER, FREGE und der klassischen Theorie der Begriffsbildung aus der Psychologie (PIAGET sowie BRUNER, GOODNOW und AUSTIN) ist im Zuge einer natürlichen Begriffsbildung ein logisch deskriptiver – und damit intersubjektiver, definierbarer – Begriff erreichbar.

- Entsprechend WITTGENSTEIN und der Prototypentheorie (ROSCH) können natürlich gebildete Begriffe nicht definiert werden.

(vgl. Rembowski 2013)

Begriff psychologisch deskriptiv betrachtet: Fachmathematik

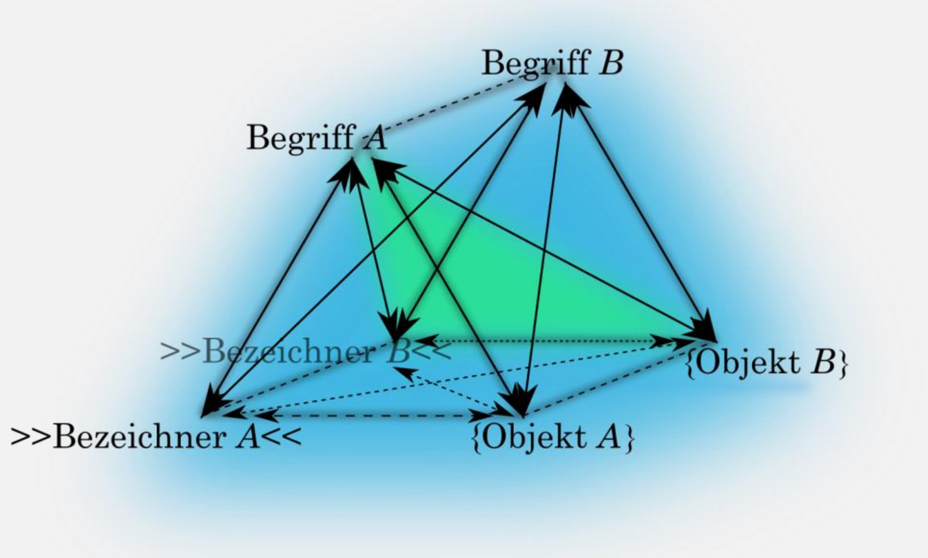
- Begriffsbildung ist intuitiv, induktiv, von Konstruktionen gekennzeichnet.
- Mathematische Begriffe sind zunächst unscharf, sich selbst weiterentwickelnd und in ihren Konkretisierungen subjektiv.
- Damit mathematische Begriffe als Grundlage für weitere Arbeiten dienen können, werden sie bewusst geordnet, mittels Definitionen präzisiert und damit in ihren Konkretisierungen intersubjektiv.

(vgl. Freudenthal 1983; Hadamard 1945; Poincaré 1913; Wittenberg 1957)

Begriff psychologisch deskriptiv betrachtet: Fazit

>>(psychologisches) Begriffsbild<<	>>(logische) Begriffskonvention<<
• subjektiv	• intersubjektiv
• synthetisch, induktiv gebildet	• analytisch, deduktiv gebildet
• gebunden an Repräsentanten	• unabhängig von Repräsentanten
• Repräsentanten sind lebensweltlich	• Repräsentanten sind ideal
• unscharf	• eindeutig (in Oberklasse und spezifischen Merkmalen)
• unbegrenzt	• klar begrenzt
• kann auch Handlungen beinhalten, kann affektiv geprägt sein	• blendet den Menschen aus

Begriffsbild und Begriffskonvention im Begriffsfeld



Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Begriffsbildung soll nicht (ausschließlich) auf Definitionen beruhen.

- Der epistemologische Kern von Begriffen besteht „aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, daß in einem langen und verwickelten didaktischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß für das Lernen aufbereitet wird […]. Dieser Prozeß hat eigentlich nie ein Ende. Er ist zwar primär stofforientiert, muß aber auch Vermittlungsfragen beachten und hat daher eine ausgeprägt hermeneutische Natur. Insbesondere führt er (schon von seiten des Stoffes her!) nicht zu einem eindeutigen Begriff."

  (Bender 1991, S. 49)

- Nach Bender sollen Grundvorstellungen und Verständnisse auf dem epistemologischen Kern der Begriffe basieren.

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- „Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:
  - Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
  - Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen', die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
  - Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur."

(vom Hofe 1995, S. 97f)

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Zu einem mathematischen Begriff gibt es mehrere Grundvorstellungen.
- Primäre Grundvorstellungen aus der Vorschulzeit können von sekundären Grundvorstellungen aus der Zeit des Mathematikunterrichts unterschieden werden.
- Grundvorstellungen entwickeln sich gemeinsam zu einem immer tragfähigeren System mentaler mathematischer Modelle.

(vgl. vom Hofe 2003)

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Grundvorstellungen sollen intersubjektiv sein und auf einer didaktischen Reflexion basieren.
- Grundvorstellungen sollen eine vielseitige Darstellung unterschiedlicher Facetten des Begriffsinhalts und gegebenenfalls des Spannungsfelds unterschiedlicher Konkretisierungen sein.
- Grundvorstellungen sollen auf im Mathematikunterricht vermittelten Denk- und Handlungsmustern beruhen, und sich zu einem System mentaler mathematischer Modelle zusammenfügen.

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Einige Kritikpunkte:
  - Grundvorstellungen dürfen nicht nur normativ, sondern müssen auch deskriptiv betrachtet werden.
  - ➢ Grundvorstellungen sollen hier normativ, das Begriffsbild im Gegensatz deskriptiv, betrachtet werden.
  - Fehlvorstellungen müssen stärker berücksichtigt werden.
  - ➢ Dies impliziert schon die Unterscheidung von Grundvorstellungen und Begriffsbild.
  - Grundvorstellungen dürfen nicht nur lokal betrachtet werden.
  - ➢ Grundvorstellungen können einer globaleren Ebene entstammen, müssen aber vor allem lokal tragfähig sein.

(vgl. Vohns 2005; Vohns 2010)

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Neuer Bezeichner??
  - Begriffskern
  - Begriffskonstitution
  - Begriffsdarstellung
  - Begriffsstruktur
- Doch Grundvorstellungen?!

Begriff psychologisch normativ betrachtet: Grundvorstellungen?!

- Anmerkungen:
  - Grundvorstellungen wurden bisher kaum für geometrische Begriffe ausgearbeitet.
  - Grundvorstellungen wurden bisher kaum für Objektbegriffe (im Gegensatz zu Relationsbegriffen) ausgearbeitet.
  - ➢ Was sind Grundvorstellungen für geometrische Objektbegriffe?

Begriff psychologisch normativ betrachtet: zurück zum Würfel

- Ein Würfel ist ein platonischer Körper mit
  - 6 kongruenten Seitenflächen,
  - 12 gleichlangen Kanten
  - und 8 Ecken.

??

Begriff psychologisch normativ betrachtet: zurück zum Würfel

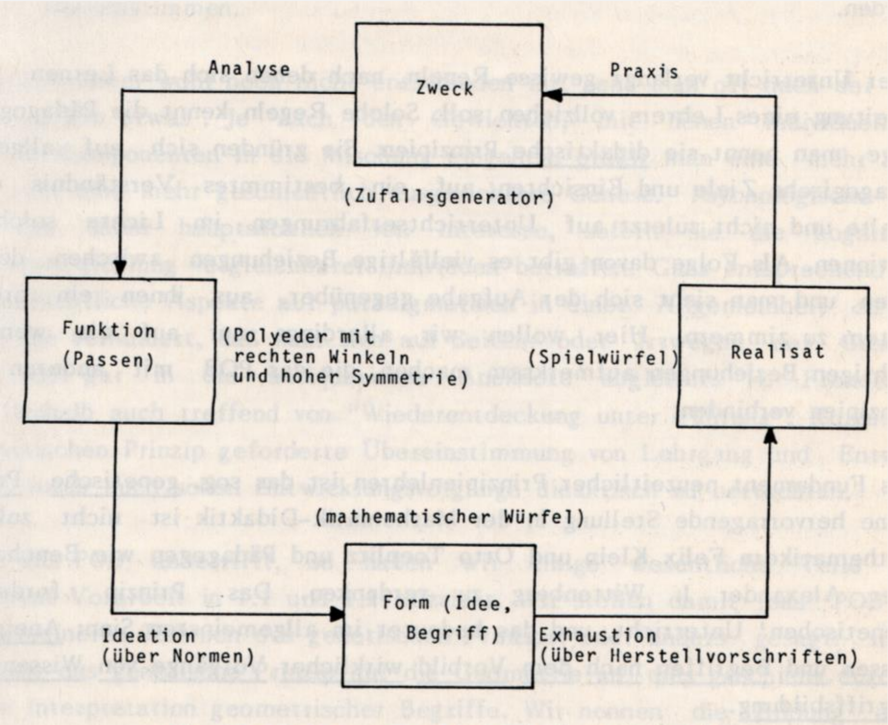
- „Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen"
  - Gebrauch des Würfels im Alltag:
    Spielwürfel
    Sitzwürfel
    Eiswürfel
  - Herstellung des Würfels
  - Operationen mit dem Würfel:
    Unterteilung (in Würfel)
    Raumparkettierung (auch zum Messen)
    Strukturerhaltende Abbildungen
    Scherung

Begriff psychologisch normativ betrachtet: zurück zum Würfel

- „visuelle Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen' "
  - Schrägbild
  - perspektivische Darstellung
  - drehbare Darstellung mit 3D-Plotter

- „Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit, Modellieren von Sachproblemen"
  - Gebrauch des Würfels im Alltag:
    Spielwürfel
    Sitzwürfel
    Eiswürfel

Begriff psychologisch normativ betrachtet: zurück zum Würfel



Schema zum POB (am Beispiel des Würfels)

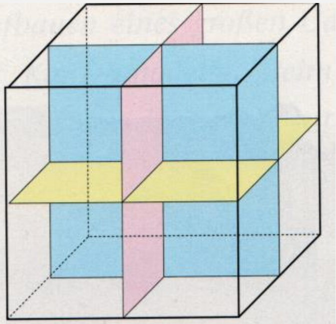
(Bender & Schreiber 1985, S. 27)

Begriff psychologisch normativ betrachtet: zurück zum Würfel

1. Nenne Beispiele für Würfel.
2. Baue einen Würfel aus Trinkhalmen und Knetkügelchen.
3. Sabine besitzt Würfel, deren Kanten alle 2 cm lang sind.
   a) Wie viele dieser Würfel braucht sie, um einen Würfel mit 4 cm Kantenlänge zusammenzusetzen?
   b) Reichen 25 Würfel aus, um damit einen Würfel mit 6 cm Kantenlänge zu bauen?
   c) Wie viele Würfel wären nötig, um einen 20 cm langen Würfel zu bauen?
4. Schneide aus einer großen Kartoffel einen Würfel.

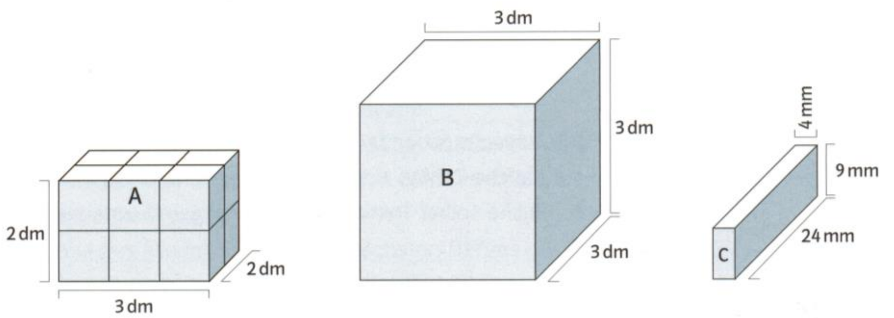
(Schupp 1981, S. 25)

22 Ein Knete-Würfel wird durch drei „Mittenschnitte“ in kleine Würfel zerlegt. Wie viele Würfel entstehen? Wir können den Würfel auch ohne Rest in 27 kleine Würfel zerlegen. Wie viele Schnitte braucht man dafür mindestens und wie muss man diese ausführen?



(Lergenmüller et al 2009, S. 141)

3 Welches Volumen haben diese Quader?



(Affolter et al 2008, S. 90)

Literatur

Affolter, W. et al (2008) *Das Mathematikbuch 5. Lernumgebungen*. Stuttgart: Klett.

Bender, P. (1991) Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel.

Bender, P. & Schreiber, A. (1985) *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 16. Operative Genese der Geometrie.* Stuttgart: Teubner.

Bromme, R. & Steinbring, H. (1990) Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. In: R. Bromme, F. Seeger & H. Steinbring (Hrsg.): *IDM-Band 14. Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 160-229). Köln: Aulis.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Hadamard, J. (1945) *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* New York: Dover Publications.

Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 28. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. Bis 11. September 2011 in Marktbreit* (S. 5-32). Hildesheim: Franzbecker.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg.) (2009*) Mathematik Neue Wege 6. Arbeitsbuch für Gymnasien.* Braunschweig: Schroedel.

Poincaré, H. (1913) *The Foundations of Science. Science and Hypothesis. The Value of Science. Science and Method.* Lancaster: The Science Press.

Rembowski, V. (2013) Concept Image und Concept Definition der Mathematikdidaktik von „Concept Image and Concept Definition in Mathematics". In U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.): *Verfügbare digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht richtig nutzen. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 23.- 25.09.2011 in Soest* (to appear). Hildesheim: Franzbecker.

Schupp, H. (1981) *Plus 5. Mathematisches Unterrichtswerk*. Paderborn: Schöningh.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vohns, A. (2005) Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematikdidaktik*, 26, 52-79.

Vohns, A. (2010) Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. *Journal für Mathematikdidaktik*, 31, 227-255.

Vom Hofe, R. (1995) *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, R. (2003) Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren*, 118, 4-8.

Wittenberg, A. (1957) *Vom Denken in Begriffen.* Basel: Birkhäuser.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.
©