Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

Zur Geschichte des Funktionsbegriffs

Horst Hischer

Preprint No. 54

Saarbrücken 2002

Diese Abhandlung fand modifiziert und deutlich erweitert Eingang in mein Buch:

Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2012.

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Zur Geschichte des Funktionsbegriffs

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: February 24, 2002

Preprint No. 54
Saarbrücken 2002

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D–66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 (0) 681 302 4443
E-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW : http://www.math.uni-sb.de/

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Zur Geschichte des Funktionsbegriffs

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: February 24, 2002

Preprint No. 54
Saarbrücken 2002

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D–66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 (0) 681 302 4443
E-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW : http://www.math.uni-sb.de/

Zur Geschichte des Funktionsbegriffs *

Horst Hischer, Universität des Saarlandes

Der Begriff „Funktion" nimmt in der Mathematik die zentrale Stellung eines nicht mehr weg zu denkenden Grundbegriffs ein. Wie und wann kam es zur Entwicklung und Entstehung dieses Begriffs? Wo stehen wir heute?

1 Einleitung

Abb.1: Werbeplakat der Allianz [1]

Mit diesem Plakat warb die Allianz-Gruppe im Herbst 2001 für die sog. „Mathematikertage" und versprach dabei:

> Karrieren, die funktionieren: [...]
> Absolventinnen und Young Professionals erleben in zwei hochinteressanten Tagen die Zukunft der Mathematik [...]

Und von ferne schon erkennbar das Symbol:

$$f(x)$$

Diesem Symbol, das alle Abiturientinnen und Abiturienten von der Schule her kennen, trauen die Werbemanager der Allianz offenbar ***die*** entscheidende Signalwirkung zu: Es soll einerseits junge Mathematikerinnen und Mathematiker ansprechen und andererseits auch für die „*Zukunft der Mathematik*" stehen!

Ist denn $f(x)$ die „Zukunft der Mathematik"?

Was ist denn nun mit diesem Symbol $f(x)$ gemeint? „Natürlich eine *Funktion*!", werden viele sofort sagen. „*O nein*," werden andere sagen, „*$f(x)$ ist doch keine Funktion, sondern ein Funktions**wert**!*", und wiederum andere werden korrigieren und sagen, „*$f(x)$ ist der Term der Funktion f*" etc. ...

☞ Haben wir ein einheitliches Verständnis davon, was eine *Funktion ist*, oder nicht?

Manche werden vielleicht geneigt sein, diese Frage sofort mit einer entsprechenden Definition dessen, was eine Funktion sei, zu beantworten, jedoch zeigt die Fachliteratur aus Hochschule und Schule: Wir finden recht unterschiedliche Formulierungen des Funktionsbegriffs — nehmen wir beispielsweise nur die derzeit verwendeten Sprech- bzw. Schreibweisen:

- *die Funktion* $y = f(x)$ *...*
- *die Funktion* $f(x)$ *...*
- *die Funktion* f *...*
- *die Funktion* $y = y(x)$
- *die Funktion* $x \mapsto f(x)$
- *der Weg ist eine Funktion der Zeit ...*
- oder es wird eine *Parabel* einfach als „*quadratische Funktion*" bezeichnet ...
- oder es wird eine *Wertetabelle* als *Funktion* bezeichnet
- ...

Ich könnte nun diese Verwirrung sofort aus der Welt schaffen, indem ich eine mir sympathische Definition wähle, etwa eine ***Funktion als rechtseindeutige Relation*** definiere, und damit einige der o. g. Sprechweisen als unzulässig erkläre. Im Sinne der Informatik würde dann also der Begriff „Funktion" als „*Objekt*" aufgefasst werden!

---

* Basierend auf einem Vortrag in der Universität des Saarlandes am 25.01.2002 in der „Ringvorlesung zur Geschichte der Mathematik".

1 Dieses Allianz-Plakat (hier aus drucktechnischen Gründen etwas gestaucht) hing im Herbst 2001 zumindest in Deutschlands Hochschulen aus. Es ist ferner auf S. 71 der DMV-Mitteilungen 4–2001 abgedruckt.

Möglicherweise würde ich damit aber nicht nur Zustimmung ernten. So würden mir grundlagentheoretisch orientierte Mathematiker und Informatiker wohl zustimmen, aber etwa für Anwender ist selbstverständlich $f(x)$ die Funktion, und zumindest Physiker werden es sich nicht nehmen lassen, $\Psi(x,t)$ als *„Wellenfunktion"* zu bezeichnen und beispielsweise die Formulierung $U = U(t)$ zu verwenden, um damit auszudrücken, dass die „*Spannung eine Funktion der Zeit*" sei. Und andere sagen vielleicht, eine *„Funktion"* habe immer reelle oder komplexe Funktionswerte.

- Also: Was *ist* nun eine *Funktion*?

Dies ist für mich als Didaktiker eine zugleich wichtige und spannende Frage, geht es doch sowohl im Mathematik*unterricht* als auch im Mathematik*studium* u. a. wesentlich um *Begriffsentwicklung*! Also muss ich mir doch die Frage stellen, welches Verständnis des Funktionsbegriffs ich vermitteln möchte bzw. wie sich dieses bei meinen Adressaten, den Schülerinnen und Schülern bzw. den Studentinnen und Studenten, entwickeln soll!

Ein Blick in die gegenwärtige Fachliteratur führt uns zunächst zu der Feststellung, dass es in der Mathematik, diesem Prototyp der exakten Wissenschaften, offensichtlich noch immer *keine einheitliche Definition dessen* gibt, was eine *Funktion* ist. Dies lässt sich durch diverse Beispiele belegen.

Und dennoch behaupte ich, dass „Funktion" ein *wesentlicher Grundbegriff der Mathematik* ist, der in nahezu allen Teilgebieten und auch in den Anwendungen der Mathematik vorkommt. — Das Allianz-Plakat führt uns dies eindringlich vor Augen!

Ein Widerspruch? — Nein, gerade wegen dieser Uneinheitlichkeit liegt hier ein wesentlicher Grundbegriff der Mathematik vor. Genauer: Ich möchte darlegen, dass sich im **Funktionsbegriff** wegen dieser *Begriffsweite* eine sog. „**fundamentale Idee**" der Mathematik zeigt, wie man dies in der Didaktik der Mathematik formulieren würde. Denn die bereits skizzierten Formulierungen, die einen unterschiedlichen Gebrauch des *Wortes* „Funktion" aufzeigen, verweisen dennoch auf einen *gemeinsamen Kern von Eigenschaften*, die den mathematischen *Begriff* „Funktion" ausmachen — und zugleich gilt: „*Funktionen haben viele Gesichter*", in denen sie uns begegnen. [2]

Ich möchte nun im Folgenden anhand wichtiger historischer Stationen aufzeigen, wie der mathematische Funktionsbegriff entstanden ist. Denn:

> Mathematische Begriffe sind [...] weder absolut noch starr, sondern sowohl in kulturgeschichtlicher und wissenschaftsgeschichtlicher als auch in anwendungs- und kontextbezogener Hinsicht dynamisch und vielfältig. Daher ist eine Kenntnis der historischen Entwicklung mathematischer Begriffe im Sinne einer „Historischen Verankerung" förderlich für das Verständnis mathematischer Ideen — und zwar sowohl für Lernende als auch für Lehrende. [3]

Wie gehen wir dabei vor?

Naheliegend wäre es, in der mathematikhistorischen Literatur zu stöbern und danach zu suchen, wer das Wort „Funktion" in die Mathematik eingebracht hat. Dann würde man darauf stoßen, dass es LEIBNIZ im Jahre 1673 war, der das Wort, zwar noch nicht ganz im heutigen Sinn, *erstmals* im mathematischen Kontext verwendet hat, dass in der Folgezeit eine zunehmende definitorische Ausschärfung durch EULER, DIRICHLET und andere stattgefunden hat, bis es in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts unter dem Einfluss der mengentheoretisch orientierten Sicht der Mathematik die formal strenge Begriffsdefinition als *rechtseindeutige Relation* gegeben hat, die in den 1970er Jahren dann auch Eingang in den Mathematikunterricht der Schulen gefunden hatte und die wir auch heute noch in der Mathematik finden.

Leider führt dieser Weg nicht weiter, denn wir können uns *nicht* an dem *Wort* „Funktion" orientieren, wenn wir nach der historischen Entwicklung des damit bezeichneten *Begriffs* suchen, sondern wir müssen vielmehr die mit diesem Begriff intendierten *Inhalte* in den Blick nehmen.

☞ Wir merken an dieser Stelle bereits an, dass wir nicht der Gefahr erliegen dürfen den *Begriff* mit dem *Bezeichner* für diesen Begriff zu verwechseln! Oder anders: Wir müssen sorgsam **Begriffs*inhalt* und Begriffs*namen* unterscheiden**!

Konkret entsteht hier die Frage: Wenn denn „Funktion" nur der Name eines Begriffs ist, was ist denn dann der Begriff bzw. der Inhalt dieses Begriffs? Dies ist ein philosophischer Aspekt, den insbesondere GOTTLOB FREGE Ende des 19. Jahrhunderts aufgegriffen und subtil analysiert hat. Dies wäre eine eigene Abhandlung wert. Vorläufig gehen wir hiermit intuitiv um, indem wir danach suchen, was denn *für uns* mit der *Bezeichnung* „Funktion" *inhaltlich* verbunden ist.

Nun wäre es naheliegend, eine mathematische Theorie, die diesen Namen trägt, zu befragen: die **Funktionentheorie**!

---

2 Vgl. den Titel von [Herget & Malitte & Richter 2000].

3 Vgl. das Vorwort und den Umschlagtext von [Hischer & Scheid 1995].

Leider führt auch dieser Ansatz nicht weiter, weil es dort nur um die *Theorie differenzierbarer und integrierbarer Funktionen in der Menge der komplexen Zahlen* geht. Diese Ende des 18. Jahrhunderts entstandene Theorie ist also eine „*Theorie der komplexen Funktionen*" und trifft das *damalige Verständnis* des Funktionsbegriffs. Heute – 200 Jahre danach – wäre es viel sinnvoller, die entsprechende Theorie als „*Komplexe Analysis*" zu bezeichnen, wie es im Angloamerikanischen üblich ist.

Wie kommen wir weiter?

Etwas für Funktionen Typisches finden wir bereits in dem Allianz-Plakat: Die Verantwortlichen haben sicherlich mit Hintersinn die Formulierung gewählt:

„Karrieren, die *funktionieren*"

Wann „funktioniert" denn etwas in unserem Sprachverständnis? Wenn der Vorgang so abläuft, „wie es sein soll" oder „wie es geplant ist"!

Anders herum: Ein Gerät *funktioniert nicht*, wenn etwa beim Betätigen einer Taste gar nichts oder nicht das Gewünschte geschieht, etwa die falsche Lampe aufleuchtet.

Wir erwarten also wie bei einer Maschine auf eine bestimmte *Eingabe* eine *eindeutig bestimmte Ausgabe*, und damit ist dann schon etwas Typisches des Funktionsbegriffs angesprochen: die *eindeutige Zuordnung*.

Dies ist aber nicht die einzige typische Eigenschaft! Vielmehr zeigt eine *Analyse der heute üblichen Verwendungszusammenhänge*, in denen Mathematiker und Anwender vom Funktionsbegriff Gebrauch machen, eine erstaunliche Vielfalt im Umgang mit Funktionen auf, die in ihrer Gesamtheit als „**Funktionales Denken**" gekennzeichnet werden kann.

Bereits in dem sog. „Meraner Lehrplan" von 1905 zur Neugestaltung des gymnasialen Mathematikunterrichts, an dem FELIX KLEIN maßgeblich mitgewirkt hat, wurde gefordert, dass der Mathematikunterricht *„der Erziehung zum funktionalen Denken"* dienen und die *„Gewohnheit des funktionalen Denkens"* pflegen solle. [4]

VOLLRATH analysierte dieses sog. „funktionale Denken" 1989 in einer umfangreichen Arbeit, wobei er eingangs begründet, dass es sich hierbei um einen *„offenen didaktischen Begriff"* handelt, der für ihn wie folgt zu verstehen sei: [5]

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.

[4] Vgl. [Vollrath 1989, 3] und [Krüger 2000].

[5] [Vollrath 1989, 6]

Und hierzu zählen vor allem bereits die eingangs genannten Aspekte, die wir etwa wie folgt zusammenfassen können:

- *eindeutige Zuordnung,*
- *Abhängigkeit einer Größe* („abhängige Variable") *von einer anderen* („unabhängige Variable"), speziell auch *zeitabhängige Größen,*
- *(empirische) Wertetabellen,*
- „*Kurven*", *Graphen, Datendiagramme,*

und dazu gehören dann übrigens

- *Formeln*.

Denn jegliche „Formeln", wie wir sie insbesondere in Mathematik und Physik kennen, können wir als Funktionsterme begreifen, und zwar häufig als Terme mit mehreren Variablen, also im Sinne von sog. „*Funktionen mit mehreren Veränderlichen*".

Dies alles müssen wir bei der historischen Betrachtung der Entwicklung des Funktionsbegriffs mit im Blick haben, obwohl es in der Mathematik trotz der Kennzeichnung einer Funktion als „*eindeutiger Zuordnung*" kurioserweise auch im 20. Jh. teilweise noch „*mehrdeutige Funktionen*" gab. [6]

Ich komme nun zu einem *Abriss der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs*, indem ich schwerpunktmäßig mir wesentlich erscheinende „Meilensteine" beschreibe:

19. Jh. v. Chr.	**Babylonier** (*Tabellierung von Funktionen*)
ab 5. Jh. v. Chr.	**Antike** (*Kurven* in kinematischer Darstellung)
14. Jh. n. Chr.	**Mittelalter,** insbes. **ORESME** (*graphische Darstellung* zeitabhängiger Größen)
17. Jh.	**NEWTON** (*Fluxionen, Fluenten*), **LEIBNIZ,** JAKOB **I BERNOULLI** (erstmalig das Wort „*Funktion*"), JOHANN **I BERNOULLI** (*Ordinaten*)
18. Jh.	JOHANN **I BERNOULLI**, **EULER** (Funktion als „*analytischer Ausdruck*", d. h. als „*Term*"), **EULER** (Funktion als *freihändig gezeichnete Kurve*), **LAMBERT** (empirische Zusammenhänge)
19. Jh.	**FOURIER**, **DIRICHLET** (Funktion als *eindeutige Zuordnung*) **PEANO, PEIRCE, SCHRÖDER** (Funktion als *Relation*)
Anfang 20. Jht.:	**HAUSDORFF** (Funktion als *zweistellige rechtseindeutige Relation*)
21. Jh.	... ?

[6] z. B. [Duschek 1960, 59]

Natürlich gehören in diesen Zusammenhang auch synonyme oder verwandte Bezeichnungen wie *Abbildung*, *Operation, Verknüpfung*, *Operator*, *Funktional* und *Funktor*, auf die aber hier nicht weiter eingegangen werden soll und kann.

2 Historische Meilensteine

2.1 Babylonier: Tabellierung von Funktionen

Bekannt sind sicherlich die sog. „Keilschrifttafeln" der Babylonier, und manche kennen vielleicht auch sogar die berühmte Tafel mit dem Namen „Plimpton 322" (Abb. 2.1). [7]

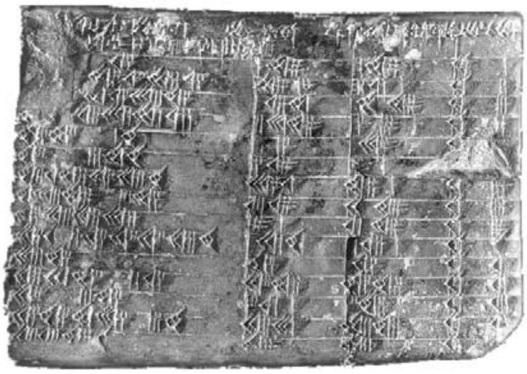


Abb. 2.1: Keilschrifttafel „Plimpton 322"; 12,7 cm x 8,8 cm

Dazu sind einige historische Hintergrundinformationen angebracht: [8]

Die „Babylonier" lebten in *Mesopotamien* (was griechisch „Zwischenstromland" bedeutet), also in dem Gebiet zwischen Euphrat und Tigris (Abb. 2.2) im heutigen Irak.

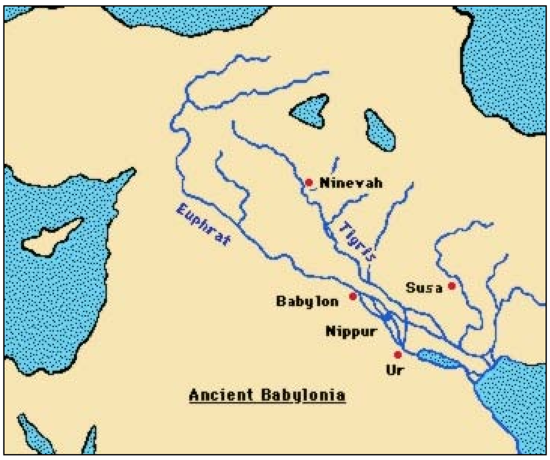


Abb. 2.2: Mesopotamien (heutiger Irak)
(abgewandelte Darstellung aus URL 2a im Anhang)

Abb. 2.3:
Entstehung von Mesopotamien ca. 8000 – 3000 v. Chr.
(Windrose um 180° gedreht, Süden ist oben)

Mesopotamien entstand in der Zeit von 8000 bis 3000 v. Chr. dadurch, dass der Getreideanbau aus den natürlichen Vorkommen der regenreichen Bergregionen im heutigen Iran durch Kolonisation in die Tiefebene des Schwemmlandgebiets von Euphrat und Tigris verlagerte wurde (Abb. 2.3). Diese Phase war verbunden

> mit der Herausbildung von Bewässerungstechniken, die eine Ansiedlung jenseits der regenabhängigen Zone ermöglichte, indem sie die Flüsse ausnutzte, die durch sonst halbwüstenartiges Gebiet strömten. [...]
>
> Dadurch entstanden zahlreiche kleine Siedlungen, deren Versorgung mit wichtigen Rohstoffen aus dem fernen Hochland gesichert, deren Produkte getauscht und deren Wasserbedarf einer Organisation unterworfen werden mußten. Die Religion stellte die Verbindung zwischen diesen Funktionen her, und die regionalen Tempelzentren wurden zu Verwaltungseinheiten. Aus solchen Siedlungen [...] entstanden im späten 4. und 3. Jahrtausend die schriftkundigen Stadtkulturen; damit war das klassische Modell der Zivilisation des Vorderen Orients geboren. [9]

So wurde hier die wirtschaftliche Grundlage für eine der ersten Hochkulturen geschaffen, was durch zahlreiche Kupfervorkommen in den umgebenden Zonen und durch intensiven Handel im Hinterland verstärkt wurde. Die archäologische Forschung geht heute davon aus, dass etwa um 3000 v. Chr. hier in Mesopotamien aus dieser Notwendigkeit der wirtschaftlichen Organisation und Verwaltung

---

7 Vielfach in der Literatur abgebildet, z. B. in [Resnikoff & Wells 1983, 62]; diese Abbildung stammt aus URL 1, siehe Anhang.

8 Vgl. dazu diverse Quellen in URL 2, siehe Anhang.

9 [Barraclough 1979, 40]

heraus die *erste Schrift* entstanden ist, und zwar zunächst als *Bilderschrift*, indem für bestimmte Wörter und Vorstellungen *Symbole* benutzt wurden. Diese erste Schrift verbreitete sich dann vermutlich nach Ägypten und Indien mit je eigenen Ausprägungen. In Mesopotamien hingegen entwickelte sich aus diesen Anfängen bald eine besondere Schrift, nämlich die sog. *Keilschrift*, die zuerst von den *Sumerern* übernommen wurde (daher auch oft „*sumerische Keilschrift*"), dann u. a. von den Akkadern, den Assyrern, den Babyloniern und den Hethitern. Diese Keilschrift wurde übrigens etwa gegen 1500 v. Chr. bis hin zu einer *alphabetischen Keilschrift* weiter entwickelt, dem sog. *Ugaritisch*, das zum Vorläufer des griechischen und lateinischen Alphabets wurde. [10]

Da in dem Überschwemmungsland genügend frischer Lehm oder Ton zur Verfügung stand, der sich an der Sonne und in Öfen gut trocknen ließ, ist es nur natürlich, dass Tonplatten geformt und verwendet wurden, in die mit einem Keil leicht Symbole „eingraviert" werden konnten (Abb. 2.4).

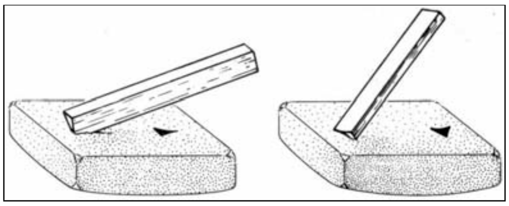


Abb. 2.4: Keilgravur bei der sumerischen Keilschrift (aus [Resnikoff & Wells 1983, S. 18], dort wiedergegeben aus [Neugebauer 1935])

Die Sumerer wurden gegen 2000 v. Chr. von den Babylonieren vertrieben, einem semitischen Volk, das gegen 1900 v. Chr. seinen Hauptsitz in Babylon errichtete. [11]

Die Babylonier entwickelten bekanntlich mit ihrem *Sexagesimalsystem* ein Stellenwertsystem zur Zahldarstellung, das in gewisser Hinsicht unserem Dezimalsystem überlegen ist, weil die Basiszahl 60 eine besonders hohe Anzahl echter Teiler hat, nämlich 10. Sie benutzten zur Zahldarstellung zwei verschiedene Keilsymbole, eines für die 1 (senkrecht) und eines für die 10 (waagerecht), und bündelten diese, etwa wie in Abb. 2.5.

10 [Barraclough 1979, 53]

11 Gemäß URL 2a, siehe Anhang.

12 Abb. 2.5 zeigt übrigens die hervorragende Approximation der Babylonier von $\sqrt{2}$. (Hierauf werden wir hier nicht weiter eingehen, weil dies ein eigenes Thema wäre.) Ferner sei am Rande erwähnt, dass wir dem Sexagesimalsystem der Babylonier bekanntlich unsere Zeiteinteilung des Tages in 24 Stunden, der Stunde in 60 Minuten und der Minute in 60 Sekunden verdanken.

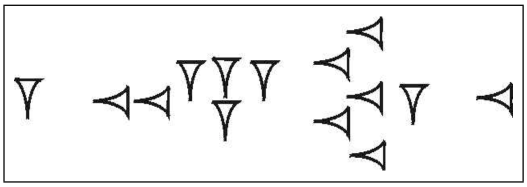


Abb. 2.5: Keilschriftdarstellung (ca. 2500 v. Chr.)[12] von $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$

Nun aber wieder zum Thema:

Seit der ersten Hälfte des 19. Jhts. wurden im heutigen Irak etwa *eine halbe Million babylonischer Keilschrifttafeln* ausgegraben bzw. in Bibliotheken gefunden. [13] Wir können dankbar sein, dass dieses kulturelle Erbe nahezu 4000 Jahre bis zu seiner Entdeckung überdauert hat.

Unter diesen Tafeln befinden sich etwa vierhundert, die mathematische Probleme oder mathematische Tabellen enthalten. Viele dieser Keilschrifttafeln kann man in Museen von Paris, Berlin und London und in archäologischen Sammlungen der Universitäten von Yale, Columbia und Pennsylvania bewundern. [14] Eine erste Interpretation dieser mathematischen Tafeln stammt von NEUGEBAUER (1935), eine spätere von NEUGEBAUER & SACHS (1945).

Besondere Berühmtheit haben die Tafeln „Yale YBC 7289" (Quadratwurzelapproximation gemäß Abb. 2.5) und „**Plimpton 322**" erlangt. Mit letzterer werden wir uns hier befassen. Es ist die Tafel Nr. 322 in der Sammlung von G. A. PLIMPTON in der Universität von Columbia. Sie wurde in den 1920er Jahren gefunden, wahrscheinlich in der Gegend von Senkereh. [15] Nach bis vor kurzem noch gültiger Auffassung stammt sie aus der Zeit von etwa 1900 bis 1600 v. Chr. [16]

Diese Tafel zeigt eine Tabelle, bestehend aus 15 Zeilen und 4 Spalten (vgl. Abb. 2.1). Sie ist zwar links oben und rechts in der Mitte beschädigt, konnte jedoch rekonstruiert werden. 1945 wurde sie erstmals von NEUGEBAUER & SACHS dechiffriert. [17] Die Tabelle in Abb. 2.6 (nächste Seite) gibt ihre aufschlussreiche Transliteration wieder.

Seither galt Plimpton 322 als *ältestes erhaltenes Dokument der Zahlentheorie*. [18]

13 Gemäß URL 2e, siehe.

14 Gemäß URL 2e.

15 Gemäß URL 2b; Senkereh ist das alte Larsa.

16 Vgl. etwa URL 2 c, URL 2 d, URL 2 f.

17 Gemäß [Resnikoff & Wells 1983, 63] und URL 2e.

18 Gemäß URL 2b.

1;59,0,15	(1.9834)	1,59	(119)	2,49	(169)	1
1;56,56,58,14,50,6,15	(1.9492)	56,7	(3367)	1,20,25	*(4825)	2
1;55,7,41,15,33,45	(1.9188)	1,16,41	(4601)	1,50,49	(6649)	3
1;53,10,29,32,52,16	(1.8862)	3,31,49	(12709)	5,9,1	(18541)	4
1;48,54,1,40	(1.8150)	1,5	(65)	1,37	(97)	5
1;47,6,41,40	(1.7852)	5,19	(319)	8,1	(481)	6
1;43,11,56,28,26,40	(1.7200)	38,11	(2291)	59,1	(3541)	7
1;41,33,59,3,45	(1.6928)	13,19	(799)	20,49	(1249)	8
1;38,33,36,36	(1.6427)	8,1	*(481)	12,49	(769)	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	(1.5861)	1,22,41	(4961)	2,16,1	(8161)	10
1;33,45	(1.5625)	45,0	(45)	1,15,0	(75)	11
1;29,21,54,2,15	(1.4894)	27,59	(1679)	48,49	(2929)	12
1;27,0,3,45	(1.4500)	2,41	*(161)	4,49	(289)	13
1;25,48,51,35,6,40	(1.4302)	29,31	(1771)	53,49	(3229)	14
1;23,13,46,40	(1.3872)	56	(56)	1,46	*(106)	15

Abb. 2.6: Transliteration von Plimpton 322 — jeweils in Klammern sind auch die dezimalen Werte angegeben (Zahlenangaben mit * waren gemäß URL 5 im Original falsch, sie sind hier wie in URL 5 korrigiert angegeben)

Die rechte Spalte enthält nur die Nummern der 15 Zeilen, während die ersten drei Spalten eigens interpretiert werden müssen.

Bis auf die nicht fixierte und jeweils zu interpretierende Kommastellung ist es eine gute Übung, diese Sexagesimalzahlen in die dezimale Darstellung umzurechnen. So bedeutet etwa der erste Wert links oben:

$$1;59,0,15 \quad = \quad 1+\frac{59}{60}+\frac{0}{60^2}+\frac{15}{60^3}$$

Die Dezimalbrüche in der linken Spalte sind Näherungswerte.

Auf den ersten Blick fällt auf, dass die Werte in der linken Spalte monoton fallen, während die mittlere und rechte Spalte spontan keine Gesetzmäßigkeit erkennen lassen.

Die Interpretation können wir nachvollziehen, indem wir die ursprüngliche Tabelle aus Abb. 2.6 wie in Abb. 2.7 erweitern:

Die zweite und dritte Spalte der ursprünglichen Tabelle (hier: Spalten 7, 8) sind als Kathete a bzw. Hypotenuse c des in Abb. 2.8 dargestellten rechtwinkligen Dreiecks aufzufassen. Man erkennt relativ leicht, dass diese beiden Zahlen jeweils Teil eines *pythagoreischen Zahlentripels* sind. Und zwar sind alle bis auf die in den Zeilen 11 und 15 relativ prim, sog. *„primitive pythagoreische Zahlentripel“*. Bekanntlich lassen sich solche Tripel mit Hilfe von zwei Zahlen p und q verschiedener Parität wie in den Formeln von Abb. 2.7 angegeben erzeugen.

Interessanterweise bestehen dabei alle Paare (p, q) aus *regulären Sexagesimalzahlen*, d. h., sie haben nur die Primteiler $2, 3$ oder 5 der Basiszahl 60.

Wählt man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p > q$ und beschränkt sich auf $p \le 125$, so enthält Plimpton 322 alle möglichen pythagoreischen Tripel, die sich mit regulären p und q erzeugen lassen — bis auf die zwischen den Zeilen 11 und 12 eingefügte Zeile. Diese Zeile scheint aufgrund eines Versehens vergessen worden zu sein, möglicherweise ein Abschreibfehler.

Nur die pythagoreischen Tripel in den Zeilen 11 und 15 sind nicht relativ prim, hier müssten eigentlich die Tripel $(3, 4, 5)$ und $(28, 45, 53)$ stehen. Ferner haben 5 und 9 (in Zeile 15) dieselbe Parität: Das Tripel $(28, 45, 53)$ würde zwar von $p = 7$ und $q = 2$ erzeugt, aber 7 hätte keine reguläre sexagesimale Darstellung. Und das Tripel $(45, 60, 75)$ wurde möglicherweise anstelle von $(3, 4, 5)$ genommen, weil letzteres aus dem Rahmen der Größenordnung der anderen fiel. Jedoch ist dies spekulativ, wenn auch plausibel.

In der ehemals ersten Spalte der Tabelle (hier: Spalte 5) stehen dann die Quadrate aus dem Quotienten der Hypotenuse c und der anderen Kathete b, also das Quadrat des *Sekans* das Winkels α, d. h. $\sec^2(\alpha)$. Die *Sekansfunktion* ist eine bei uns kaum mehr verwendete trigonometrische Funktion,

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)},$$

(vgl. Abb. 2.8), hingegen im angelsächsischen Bereich wird sie wohl noch durchweg benutzt

$\Delta\alpha^\circ$	α°	$\hat{\alpha}$	$\sec(\alpha)=\frac{c}{b}$	$\frac{c^2}{b^2}$	$b = 2pq$	$a = p^2 - q^2$	$c = p^2 + q^2$	p	q	Nr.
	44,76	0,7812	1,4083	1,9834	120	119	169	12	5	1
0,51	44,25	0,7724	1,3961	1,9492	3456	3367	4825	64	27	2
0,47	43,79	0,7642	1,3852	1,9188	4800	4601	6649	75	32	3
0,52	43,27	0,7552	1,3734	1,8862	13500	12709	18541	125	54	4
1,20	42,07	0,7343	1,3472	1,815	72	65	97	9	4	5
0,53	41,54	0,7251	1,3361	1,7852	360	319	481	20	9	6
1,23	40,32	0,7036	1,3115	1,72	2700	2291	3541	54	25	7
0,54	39,77	0,6942	1,3011	1,6928	960	799	1249	32	15	8
1,05	38,72	0,6758	1,2817	1,6427	600	481	769	25	12	9
1,28	37,44	0,6534	1,2594	1,5861	6480	4961	8161	81	40	10
0,57	36,87	0,6435	1,2500	1,5625	60	45	75	2	1	11
1,10	35,77	0,6244	1,2326	1,5192	16000	11529	19721	125	64	*
0,80	34,98	0,6104	1,2204	1,4894	2400	1679	2929	48	25	12
1,12	33,85	0,5909	1,2042	1,45	240	161	289	15	8	13
0,59	33,26	0,5805	1,1959	1,4302	2700	1771	3229	50	27	14
1,37	31,89	0,5566	1,1778	1,3872	90	56	106	9	5	15

Abb. 2.7: Erweiterung von Plimpton 322; original sind die Spalten 5, 7, 8, 11, korrigierte Fehler des Originals sind in Zeile2/Spalte8, Z9/S7, Z13/S7, Z15/S8; die Zeile * fehlt im Original; die Zahlen in Z11/S9, Z11/S10 wären korrekt, passen aber nicht zu den Werten 45 und 75 (15faches der „eigentlichen“ Werte).

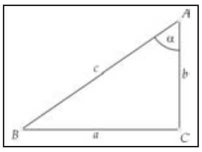


Abb. 2.8: Dreieck als Grundlage v. Plimpton 322

Z. T. wird behauptet, die aufeinander folgenden Sekans-Werte hätten eine Differenz von exakt $1/60$ ($\approx 0{,}0167$) und die Winkel würden von $45°$ bis $31°$ in Schritten zu $1°$ laufen. [19] Jedoch ist dies offensichtlich nur in ganz grober Näherung akzeptabel, keinesfalls „exakt“. Außerdem fehlt ja in der Tabelle eine Zeile zwischen den Zeilen 11 und 12 mit einem entsprechenden großen Sprung. [20]

Die Babylonier kannten noch keines der uns geläufigen Winkelmaße, weder das Bogenmaß der griechischen Antike noch unser Gradmaß. Statt dessen kennzeichneten sie einen konkreten Winkel mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Längen der gegenüber liegenden Kathete und der Hypotenuse wie in Abb. 2.8 — und dieses offenbar nur für den Fall, dass die drei Seiten ein pythagoreisches Tripel bildeten. Und nebenbei nehmen wir zur Kenntnis, dass der berühmte *Satz des Pythagoras* den Babyloniern schon mindestens 1300 Jahre vor Pythagoras bekannt war, die Namensgebung historisch also falsch ist — wie so vielfach in der Mathematik.

In einer Gesamtwürdigung von Plimpton 322 halten wir nun fest, dass hier vor knapp 4000 Jahren eine **trigonometrische Funktion tabelliert** worden ist, genauer sogar als sog. *zweistellige Funktion*, nämlich in heutiger Formulierung durch die *Formel*:

$$f(a,c) := \frac{c^2}{c^2 - a^2} \quad \left[= \sec^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \right]$$

Natürlich müssen wir uns fragen, welchem Zweck diese Tabelle diente! So wurde Plimpton 322 *bisher* wegen der pythagoreischen Tripel vor allem *als erstes bedeutendes Dokument der Zahlentheorie* angesehen. Eine solche Interpretation liegt auch nahe, wenn wir die in Abb. 2.7 vorgenommenen Ergänzungen hinzuziehen. Aber warum wurden dann nicht gerade diese von uns erkannten Eigenschaften offen gelegt? Warum wurden nicht alle drei Zahlen der pythagoreischen Tripel aufgeführt, warum fehlen die erzeugenden Zahlen p und q? Und wozu die Quadrate des Sekans? Was hat das mit Zahlentheorie zu tun?

Eine aktuelle Untersuchung im *American Mathematical Monthly* (Februar 2002) widerspricht denn auch der üblichen zahlentheoretischen Interpretation!

[19] Zum Beispiel URL 2 f und URL 2 g, siehe Anhang.

[20] Dies wird z. B. in URL 4 nachgewiesen.

So findet man in den Internet-Mitteilungen der AMS (*American Mathematical Society*) vom Februar 2001 unter der Überschrift [21]

> **Math in the Media** — Highlights of math news from science literature and the current media

u. a. folgende Nachricht: [22]

> **Rereading Plimpton 322**. Plimpton 322, the tiny dark star of Columbia University's Rare Book Library, is probably the world's best known piece of Mesopotamian mathematics. A clay tablet, about 5 inches long and 3.5 inches wide, with 4 columns and 15 rows of cuneiform hexadecimal numbers, it is usually dated 1900-1600 BC. Sir Christopher Zeeman lectured on it in San Antonio in 1995 AD, calls it *“the oldest preserved document on number theory,”* and gives a mathematical argument for its interpretation as a set of pythagorean triples. […] The January 27 2001 *Science News* has a piece by Ivars Peterson describing a recent reevaluation of the mathematical content of the tablet. The work is due to Eleanor Robson (Oriental Institute, Oxford) and is presented as an example of *“new scholarly approaches to Mesopotamian mathematics”* which *“combine historical, linguistic and mathematical techniques.”* Dr Robson pins down the date of the tablet to 1800 +/- 40 BC, and gives an alternative explanation of the tablet's purpose: it *“served as a guide for a teacher preparing exercises involving squares and reciprocals.”* Despite this downgrading from number theory to arithmetic, Robson considers Plimpton 322 *“the epitome of Mesopotamian mathematical* culture *at its best. ... It's a well-organized, well-executed, beautiful piece of mathematics.”*

„Plimpton 322“ wurde also „neu interpretiert“ und von der britischen Forscherin als „*Abriss der mesopotamischen mathematischen Kultur in ihrer besten Ausprägung*“ gekennzeichnet. Plimpton 322 ist nach ihrer Analyse also *nicht mehr als Dokument zahlentheoretischer Forschung* anzusehen, sondern diese Tafel diente Lehrenden zur Vorbereitung ihrer Übungsaufgaben. Man kann also davon ausgehen, dass die Tafel entsprechend mehrfach für diesen Gebrauch kopiert wurde.

Und trotz dieser „*Herabstufung von der Zahlentheorie zur Arithmetik*“ bleibt bestehen, dass nach heutiger Kenntnis **Plimpton 322 das älteste erhaltene Dokument einer tabellierten Funktion** ist — ohne hier der Frage nachzugehen, wozu das Quadrat des Sekans konkret benötigt wurde.

[21] Quelle: URL 3 im Anhang; vgl. auch URL 17 (Vortragshinweis: 3.2.1998 in Groningen); Originalartikel sind anschließend erschienen in [Robson 2001 & 2002].

[22] Hervorhebungen durch Unterstreichung und Kursivdruck nicht im Original.

2.2 Antike und Mittelalter: Kurven und zeitabhängige Größen

In der Einleitung hatte ich fest gestellt, dass uns Funktionen in unterschiedlicher Gestalt begegnen, und wir hatten im letzten Abschnitt *Wertetabellen* und *Formeln* als eine solche mögliche Gestalt kennen gelernt und dabei gesehen, dass hierin wohl das historisch erstmalige Auftreten von Funktionen zu erkennen ist: die *Tabellierung von Funktionen* — bedeutsam sowohl für die Numerische Mathematik als auch im Mathematikunterricht als eine wichtige Stütze beim Entwickeln des Funktionsbegriffs.

Auf zwei weitere Erscheinungen von Funktionen hatte ich bereits hingewiesen:

- graphische Darstellungen, insbesondere „Kurven“
- zeitabhängige Größen, insbesondere in der Physik

Hierbei wollen wir „Kurve“ naiv als *„durchgezogene Linie“* verstehen, nicht aber im modernen Sinne, bei dem es auch Fraktale wie die *Schneeflockenkurve* oder „flächenfüllende“ Kurven wie etwa die *Peanokurve* gibt.

Mehrheitlich wird in der historischen Literatur der Beginn der Entwicklung des Funktionsbegriffs im Mittelalter bei NICOLE D'ORESME angesetzt, von dem uns nämlich eine *graphische Methode zur Visualisierung zeitabhängiger Größen* überliefert ist, die wir noch kennen lernen werden.

Mit dieser Methode, die später GALILEI aufgegriffen hat, treten „Kurven“ somit unter einem zeitbezogenen, *kinematischen Aspekt* auf. Dann müssen wir aber deren Ursprung bereits in der griechischen Antike sehen, in der ja die kinematische Erzeugung von Kurven erfunden worden ist.

2.2.1 Antike: Kinematische Kurven

Abb. 2.9 zeigt die **Trisectrix**, die von HIPPIAS VON ELIS erfunden wurde, um das Problem der Dreiteilung eines beliebigen Winkels zu lösen. Sie entsteht *kinematisch* als Schnitt einer Rotations- und einer Translationsbewegung, die synchron mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bzw. konstanter geradliniger Geschwindigkeit ablaufen (siehe Schnittkurve).

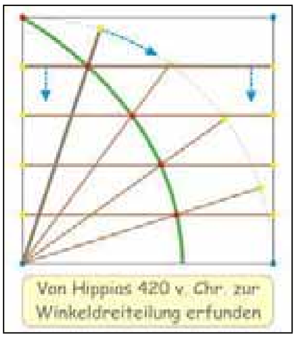


Abb. 2.9:
Trisectrix des HIPPIAS

Abb. 2.10 zeigt eine dreidimensionale Kurve, nämlich die **Hippopede** („Pferdefessel“) des EUDOXOS, die man sich wie eine gekrümmte Acht als Bahn eines Planeten an der „Himmelskugel“ vorstellen muss:

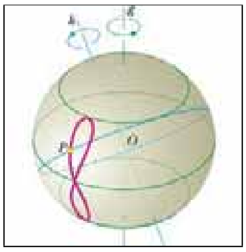


Abb. 2.10: Hippopede des EUDOXOS

Zwei konzentrische Kugeln gleichen Durchmessers bewegen sich gegenläufig um ihre Achsen, welche gegen einander geneigt sind. Ein auf einer Kugel fest gedachter Punkt beschreibt dabei die Hippopede.

Ein weiteres Beispiel: Auf einem Radialstrahl, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, bewegt sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit ein Punkt nach außen. Dieser beschreibt die **Archimedische Spirale**.

Abb. 2.11:
Archimedische Spirale

Solche Kurven pflegen wir heute mit Hilfe von sog. „Parameterfunktionen“ zu beschreiben, deren Parameter t wir uns als *Zeitvariable* vorstellen können.

Eine solch formal-symbolische Beschreibung gab es zwar damals noch nicht, aber auch heute „sehen“ wir in solchen Kurven Funktionen, so dass in diesem graphisch-visualisierenden Sinne bereits in der Antike der Funktionsbegriff angelegt war.

Neben der kinematischen Erzeugung von Kurven kannte man in der Antike noch diejenige durch Schnitt von zwei Flächen, so etwa die *Hippopede* als Schnitt einer Kugel mit einem durchstoßenden, tangierenden Zylinder (Abb. 2.12) oder die *Spiren des Perseus* (Abb. 2.13). Aber es wäre wohl recht gewagt, diese Kurvenerzeugung unter dem Aspekt des funktionalen Denkens sehen zu wollen.

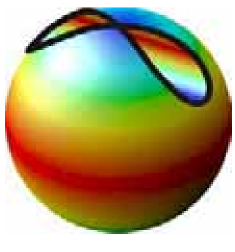


Abb. 2.12:
Hippopede

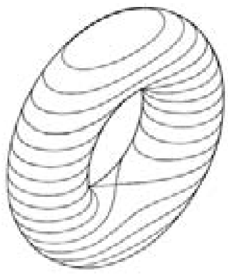


Abb. 2.13:
Spiren des Perseus [23]

[23] Aus [Brieskorn & Knörrer 1981, 20].

2.2.2 1000 n. Chr.: Der Beginn zeitachsenorientierter Darstellung

Von ARISTOTELES wissen wir, dass er sich in seiner „Physica“ u. a. auch mit der *Zeit* befasste und diese mit einer *nach rechts verlaufenden Linie* verglich! [24] Diese Vorstellung hat sich als maßgeblich bis in unsere Zeit erwiesen, und zwar in Verbindung mit der graphischen Darstellung zeitabhängiger Daten. Insbesondere ist offenbar die *zeitachsenorientierte Darstellung* die außerhalb der Mathematik *am meisten genutzte Methode zur Visualisierung von Daten*. Dies ist das Ergebnis einer viel beachteten Langzeitstudie des Amerikaners EDWARD R. TUFTE, die er 1983 veröffentlichte: [25]

So untersuchte TUFTE in den Jahren 1974 bis 1980 u. a. die 15 weltweit bedeutendsten Zeitungen und Nachrichtenmagazine daraufhin, auf welche Weise sie Daten visualisieren. Er zog dazu aus ihnen eine Stichprobe von insgesamt knapp 4000 Graphiken. [26] Eines der verblüffenden Ergebnisse seiner Hochrechnung war, dass ca. 75 % der verwendeten Graphiken zeitachsenorientiert sind. [27] Derartige Darstellungen haben also in unserem Alltagsverständnis offenbar eine besondere Bedeutung!

Table 1
Graphical Sophistication, World Press, 1974-1980

	Percentage of statistical graphics based on more than one variable, but not a time-series or a map	Number of graphics in sample
Akahata ("Red Flag") (Japan, daily, circulation 30,000)	9.3%	202
Asahi Shimbun (Japan, daily, 8,000,000)	7.6%	119
Der Spiegel (Germany, weekly, 1,000,000)	5.7%	454
The Economist (Britain, weekly, 170,000)	2.0%	342
Nihon Keizai Shimbun (Japan, daily financial paper, 1,700,000)	1.7%	297
Le Monde (French, daily, 440,000)	0.7%	144
Business Week (U.S., weekly, 800,000)	0.6%	726
New York Times (U.S., daily, 900,000; Sunday, 1,500,000)	0.5%	422
Pravda (USSR, daily, 10,500,000)	0.0%	54
Frankfurter Allgemeine (Germany, daily, 300,000)	0.0%	93
The Times (Britain, daily, 400,000)	0.0%	107
Washington Post (U.S., daily, 600,000; Sunday, 800,000)	0.0%	121
Time (U.S., weekly, 4,300,000)	0.0%	147
Die Zeit (Germany, weekly, 300,000)	0.0%	213
Wall Street Journal (U.S., daily, 2,000,000)	0.0%	449

Abb. 2.14: Untersuchung von TUFTE: Verwendung von Graphiken in der Presse. Hier dargestellt: Verwendung „relationaler Graphiken“ weltweit verschwindend gering!

Die historische Forschung dokumentiert zeitachsenorientierte Darstellungen erstmals für das Mittelalter um die Jahrtausendwende.

Vermutlich von 950 n. Chr., evtl. auch aus dem 11. Jht., stammt die in Abb. 2.15 wiedergegebene Zeichnung, die im 19. Jht. von SIGMUND GÜNTHER als Teil eines Manuskripts entdeckt wurde, das der Bayerischen Nationalbibliothek in München gehört. Er publizierte seine Entdeckung 1877. [28]

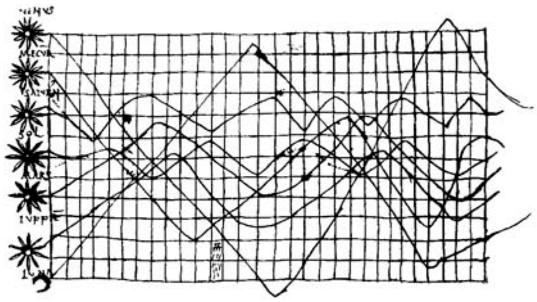


Abb. 2.15: Zodiac — Planetenbahnen über einer horizontalen Zeitachse, ca. 950 n. Chr.

FUNKHOUSER kommentierte 1936 diese von ihm für wichtig gehaltene Entdeckung in der archäologischen Zeitschrift *Osiris* aus der Sicht graphischer Darstellungen wie folgt: [29]

> Dieser Graph ist in der Geschichte graphischer Methoden bedeutsam und begegnet uns hier als ältestes vorhandenes Beispiel für den Versuch, veränderbare Werte in einer Weise darzustellen, die heute üblichen Methoden ähnelt: die Verwendung eines Koordinatengitters zum Zeichnen von Kurven als entscheidendes Merkmal.

Es handelt sich nach FUNKHOUSER bei dieser Quelle um einen etwa 400 n. Chr. geschriebenen zweibändigen Kommentar von MACROBIUS über ein Werk von CICERO, in dem MACROBIUS den damaligen Stand von Physik und Astronomie darstellt. Dieser Kommentar enthält in einer späteren Abschrift, die vermutlich im 10. Jht. angefertigt wurde, einen Anhang eines unbekannten Schreibers mit dem Titel „De cursu per zodiacum“, also: „Über den Tierkreis“. FUNKHOUSER schreibt weiter: [30]

> Dieser Anhang [...] ist eine kurze Beschreibung der Planetenbahnen durch den Zodiac (also: den Tierkreis). Die graphische Darstellung dient der Veranschaulichung dieser Beschreibung. Das gesamte Werk scheint eine Zusammenstellung für die Verwendung in Klosterschulen zu sein.

24 Vgl. z. B. URL 8 und URL 9, siehe Anhang.

25 [Tufte 1983]

26 Abb. 2.14, aus [Tufte 1983, 83]; es waren genau 3890 Graphiken.

27 [Tufte 1983, 28]

28 Vgl. [Funkhouser 1936, 260], der auf [Günther 1877] Bezug nimmt.

29 [Funkhouser 1936, 260], Übersetzung von mir.

30 [Funkhouser 1936, 260], Übersetzung von mir.

Es handelt sich offensichtlich um eine graphische Darstellung der Inklination der Planetenbahnen als Funktion der Zeit.

FUNKHOUSER versichert, dass er sich bei der Interpretation mit einem Wissenschaftler vom Observatorium des Harvard College beraten habe.

Damit liegt uns hier nach heutigem Kenntnisstand die **historisch erstmalige *graphische Darstellung einer zeitabhängigen Funktion*** vor, [31] und zwar die zeitabhängige Darstellung der *Inklination* der *Planetenbahnen* von Venus, Merkur, Saturn, Mars und Jupiter und der Bahnen von Mond und Sonne. [32] (Vergleiche hierzu auch Abb. 2.10.)

TUFTE führt mit Bezug auf FUNKHOUSER aus, dass der astronomische Inhalt dieser Graphik und des Begleittextes verworren sei und wenig in Einklang zu bringen sei mit den aktuellen Bewegungen der Planeten. Genauer weist FUNKHOUSER darauf hin, dass die horizontale Zeitachse in 30 Abschnitte unterteilt sei und dass für jeden der sieben Himmelskörper auf der Vertikalachse ein eigener Startpunkt zur Abtragung des Abstandes vom Zodiac, also vom Tierkreis, vorgesehen sei, dass aber zwischen den sieben Kurven keine zeitlicher Zusammenhang bestünde, wie man an den Perioden sehen würde, somit für jede Kurve die Zeitachse in eigener Weise zu interpretieren sei. [33]

FUNKHOUSER macht noch darauf aufmerksam, dass in der Mitte der Darstellung sowohl ein Fehler als auch eine Korrektur zu erkennen seien. Und wenn man weiterhin die damaligen beschränkten Mittel für zeitliche Beobachtungen und das Fehlen objektiver Daten berücksichtige, so sei diese graphische Darstellung kaum mehr als ein schematisches Diagramm, wie es heutzutage ein Lehrer an der Tafel zur Veranschaulichung skizzieren würden. [34]

Gleichwohl müssen wir hier die Absicht des damaligen Verfassers erkennen, *Messwerte einer zeitabhängigen Funktionen graphisch darzustellen*. Und faktisch wurde hier bereits ein *Koordinatensystem* benutzt — also rund 700 Jahre vor DÈSCARTES (1596 – 1650)! Auch spricht TUFTE von einem *geheimnisvollen und isolierten Wunder in der Geschichte der graphischen Datenpräsentation*, dass es rund 800 Jahre dauerte, bis die nächste zeitachsenorientierte Darstellung von Messdaten auftauchte, und zwar bei LAMBERT.[35] Allerdings irrt TUFTE hier, weil HUYGENS bereits 100 Jahre zuvor (1669) eine solche Darstellung angibt, was wir ebenfalls noch sehen werden.

Wir verweilen jedoch zunächst in der Jahrtausendwende des Mittelalters und lenken den Blick auf ein anderes frühes Phänomen zeitachsenorientierter Darstellung:

So ist auch die im Mittelalter aufkommende *Notenschrift* in diesem Sinne zu verstehen: Die Zeitachse verläuft von links nach rechts, und vertikal werden die Ton- und Notenwerte abgetragen. Wir können also nachträglich die *Notenschrift im Sinne dieses entstehenden funktionalen Denkens* verstehen. Und genau dieses geschieht ja heute bei der digitalen Darstellung der Notenschrift in einer sog. MIDI-Datei: [36] Jedem Zeitpunkt eines gegebenen abgeschlossenen Zeitintervalls wird ein Satz von Noten zugeordnet, und zwar bezüglich Tonhöhe, Tondauer und Instrumentzuordnung.

Erfunden wurde diese zeitachsenorientierte Notenschrift Anfang des 11. Jahrhunderts von dem Mönch GUIDO VON AREZZO (ca. 995 bis 1050, vgl. Abb. 2.16).

Abb. 2.16: GUIDO VON AREZZO

Abb. 2.17 zeigt ein Beispiel dieser Notenschrift mit den sog. „Neumen“, in der aber nur die Tonhöhe festgelegt ist und noch nicht deren Dauer.

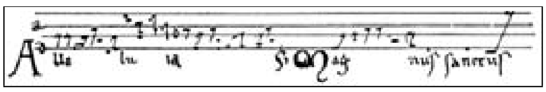


Abb. 2.17: Notentext von GUIDO VON AREZZO (sog. „Neumen“, begrenzt durch 4 Notenlinien): Nur die Tonhöhe wird fest gelegt, die Zeitdauer aber noch nicht.

[31] [Funkhouser 1936] berichtet erstmals darüber, und [Tufte 1936] greift dies auf. Abbildung aus [Funkhouser 1936] und [Tufte 1983, S. 28], ferner auch in URL 7, URL 9, siehe Anhang.

[32] Vgl. URL 7, URL 9, [Funkhouser 1936] und [Tufte 1983, 28].

[33] [Funkhouser 1936, S. 260, 262]

[34] [Funkhouser 1936, S. 262]

[35] [Tufte 1983, S. 28]

[36] Kurz für „Musical Instruments Digital Interface“. Der MIDI-Standard beinhaltet das Kommunikationsprotokoll sowie die Anschlüsse zum Übertragen von Noten- und Klanginformationen in Echtzeit. Es werden keine Audio-Daten (z. B. Gesang) über die MIDI-Schnittstelle übertragen. Der MIDI-Standard ist bereits ca. 20 Jahre alt und kann sich dementsprechend nicht mit modernen Übertragungsstandards wie Ethernet oder Firewire messen. Die Übertragung erfolgt seriell mit 31.250 Baud, d. h. es können pro Sekunde ca. 600 Noten über ein MIDI-Kabel übertragen werden. (Aus URL 10)

Abb. 2.18: Spanische Mensuralnotation (13. Jh.)

Später wurde dann auch die Zuordnung der Töne und ihrer Dauer zu den Zeitpunkten auf der Zeitachse präzisiert, so etwa in der aus dem 13. Jahrhundert stammenden spanischen „Mensuralnotation“ (Abb. 2.18). Hieraus entwickelt sich die heute übliche Notation, etwa wie in Abb. 2.19: Zu einer horizontalen Zeitachse gehören hier beispielsweise sieben übereinander liegende Liniensysteme aus jeweils 5 Notenlinien.

Abb. 2.19: Partiturauszug aus dem Adagietto von GUSTAV MAHLERs Sinfonie Nr. 5 (komponiert 1901)

Natürlich müssen wir berücksichtigen, dass es in der Notenschrift keine metrisch strenge zeitliche Zuordnung der Töne gibt, es ist eher eine „fuzzy“ Zuordnung. Anders ist dies hingegen bei MIDI-Dateien (s. o.).

2.2.3 NICOLE D'ORESME (1323? – 1382)

Wir bleiben im Mittelalter und machen einen Sprung zu ORESME (Aussprache französisch „Orème“), wie bereits angekündigt. Er tritt in der Literatur unter den Vornamen *Nikolaus* oder *Nicholas* auf, auch wird sein Familienname oft deutsch ausgesprochen, oder er wird latinisiert Oresmius genannt. [37] Da er in den älteren Schriften auch unter den Namen *Orem*, *Horem* und *Horen* vorkommt, [38] ist davon auszugehen, dass *Oresme* tatsächlich französisch auszusprechen ist.

ORESME gilt neben ALBERT VON SACHSEN als ein bedeutender Wissenschaftler, Philosoph, Ökonom, Theologe und Bischof des 14. Jahrhunderts. Sein genaues Geburtsdatum (oft wird 1323 genannt) ist nicht bekannt. Er ist vermutlich zwischen 1320 und 1330 in der Normandie geboren und starb am 11. Juli 1382 in Lisieux, wo er am 16. 11. 1377 Bischof wurde (Abb. 2.20).

[37] URL 13, URL 18, siehe Anhang.

[38] Vgl. [Cantor 1892, 116].

Abb. 2.20: Bischofsweihe von ORESME [39]

Über die uns hier interessierenden mathematischen Aktivitäten hinaus ist erwähnenswert, dass ORESME das *Rechnen mit gebrochenen Exponenten* eingeführt hat und *erstmalig die Divergenz der harmonischen Reihe bewiesen* hat! [40]

Ferner gilt er als

> Urahn jeder Geldtheorie [...]. In einer um 1350 erschienenen Schrift „De Moneta“ (vom Gelde) beklagte er die Münzverschlechterung, womit gute Ware und natürlicher Reichtum nicht mehr in das Königreich Frankreich gebracht würde. Oresme führt aus, dass die Kaufleute lieber an Orte mit guter und fester Münze gingen und dass auch der Binnenhandel leide, da Pachten, Renten und Zinsen nicht gut und gerecht festgesetzt werden könnten, Geld nicht sicher verliehen oder als Kredit vergeben werden könne [...]. Hiermit stellt Oresme erstmals eine argumentative Verbindung zwischen Geldwert im Inland und Außenhandel fest. [41]

Wir wenden uns nun seinen Arbeiten zu, die aus mathematikhistorischer Sicht den Funktionsbegriff betreffen. Dazu muss man wissen, dass es damals in der Wissenschaft eine Diskussion über die Zunahme bzw. Abnahme dessen gab, was wir in der Physik „Größen“ nennen. [42]

In Oxford gab es in den Jahren von 1328 bis 1350 das berühmte *Merton-College*, und hier wurde u. a. das Phänomen von Bewegung und Geschwindigkeit untersucht und diskutiert. So wurde beispielsweise für den Fall einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung die sog. *Merton-Regel* aufgestellt, die heutiger Darstellung besagt: [43]

[39] Aus URL 20, s. Anhang; Krönung durch König Charles V.

[40] Vgl. etwa URL 12, URL 15.

[41] Nach URL 14; sein damaliges Hauptwerk „Tractatus de mutatione monetarum“ ist übrigens sehr aktuell und in deutscher Übersetzung unter dem Titel „Traktat über die Geldabwertungen“ im Handel (vgl. URL 16)!

[42] Vgl. [Baron 1969, S. 81]. Dort steht u. a.: “The study of space and motion at Merton College arose from the mediaeval discussion of the intension and remission of forms, i. e. the increase and decrease of the intensity of qualities.” Aus dem Zusammenhang wird deutlich, dass sowohl “forms” als auch “quantities” gemeinsam zutreffend mit „Größen“ zu übersetzen sind.

[43] Vgl. [Baron 1969, S. 82], [Hischer & Scheid 1982, S. 53] und [Hischer & Scheid 1995, S. 60].

Merton-Regel:
Wird ein Körper in der Zeit t von der Anfangsgeschwindigkeit v_1 gleichmäßig auf die Endgeschwindigkeit v_2 beschleunigt, so gilt für seinen zurückgelegten Weg:

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} t$$

Hierfür wurden verschiedene numerische Beweise geliefert, z. T. unter Verwendung von unendlichen Reihen. ORESME muss von diesem Problem erfahren haben, denn er ging es grundsätzlich anders an, indem er eine (zweidimensionale) geometrische Darstellung wählte.

Vielfach wird ORESME in diesem Zusammenhang ein möglicherweise im Jahre 1364 geschriebenes Werk mit dem Titel „Tractatus de latitudinibus formarum“ zugeschrieben. [44] Inhaltlich geht es bei ORESME wie im Merton-College um die Untersuchung dessen, was wir heute – wie seit langem in der Physik – „Größen“ nennen, etwa *Länge*, *Zeit* und *Geschwindigkeit*. Das wird an einer späteren handschriftlich gebliebenen Ergänzung mit dem Titel „Tractatus de Uniformitate et difformitate intensionum“ deutlich, wozu [Cantor 1892, S. 117] schreibt:

> Der Anfang dieses erweiterten Werkes lautet: „Bei Ordnung der Erzeugnisse der Einbildungskraft der Alten oder meiner eigenen über Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der messbaren Naturerscheinungen begegnete mir Einiges andere, was ich mit hinzuzog.“

Diese „messbaren Naturerscheinungen“ nennen wir in der Physik „Größen“, und Größen spielten bei der Entstehung der Analysis eine große Rolle. Ich möchte daher den Titel seiner Arbeit aus heutiger Sicht übersetzen mit:

Über die zeitliche Veränderung von Größen

Die Echtheit dieser Abhandlung wird allerdings z. T. bestritten, und sie wird als das Werk des Italieners JACOBUS DE SANCTO MARTINO gekennzeichnet. [45] Auch scheint bereits GIOVANNI DI CASALO im Jahre 1346 entsprechende graphische Techniken benutzt zu haben. [46] Diesen Prioritätenstreit überlassen wir der historischen Forschung und wenden uns nun direkt den Inhalten zu.

ORESME beschreibt in der Abhandlung seinen Ansatz wie folgt: [47]

> Abgesehen von Zahlen ist jede messbare Größe als kontinuierlich anzusehen. Wir müssen uns daher Punkte, Linien und Flächen vorstellen, die die Messung solcher Größen darstellen.

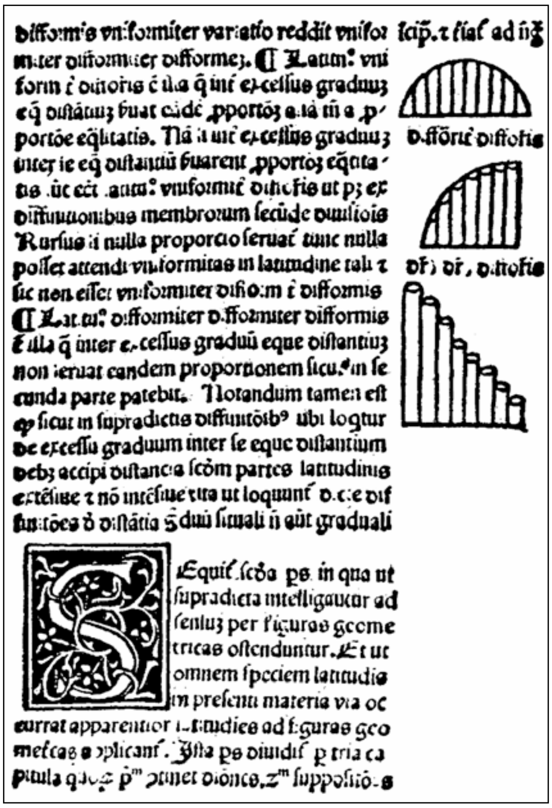


Abb. 2.21: Auszug aus
„De latitudinibus formarum“ von ORESME:
Wir sehen hier drei „**figurae**“.

Abb. 2.21 zeigt exemplarisch eine Seite aus der Abhandlung, in der ORESME seine Vorstellung auch visualisiert. [48] Sie ruft in uns sogleich Assoziationen zu Balken- und Säulendiagrammen hervor und vergegenwärtigt uns erneut, dass graphische *Datendarstellungen* auch im Sinne *funktionalen Denkens* zu betrachten sind.

Aber darum geht es bei ORESME nicht. Vielmehr befasst er sich aus unserer Sicht mit physikalischen *Größen* wie etwa der *Ge-*

[44] Ausführlicher Bericht in [Cantor 1892, 117 ff], ferner URL 19, vor allem auch die Inkunabel [Oresme 1486].

[45] So steht im Biographisch-Bibliographischen Kirchenlexikon (nachzulesen in URL 11):
„Der Tractatus de latitudinibus formarum ist sicher unecht; er stammt von Jacobus de Sancto Martino, einem Lehrer der Mathematik in Süd-Italien in der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts; Edition von Thomas Smith, Dissertation, Univ. of Wisconsin 1954, teilweise ediert von H. Wieleitner, Der Tractatus de latitudinibus formarum des Oresme, in: Bibliotheca Mathematica, 3. Folge, Bd. 13 (1912 – 1913) 114–145; teilweise engl. Übers. von C. G. Wallis, An Abstract of Nicholas Oresme's Treatise on the Breadths of Forms, Annapolis 1941.“

[46] [Baron 1969, 82]

[47] In Übersetzung von [Baron 1969, 82], vgl. auch [Hischer & Scheid 1985, 60]

[48] aus URL 9.

schwindigkeit, die sich zeitlich abhängig *verändern* — die *Veränderung* ist für ihn ein ganz wesentlicher Aspekt!

ORESME unterscheidet zwischen der zeitlichen *Extension* einerseits und der *Intension* der Größe andererseits. Dies müssen wir so verstehen, dass die *Extension* durch von links nach rechts verlaufende Punkte auf der horizontalen Zeitachse erfasst wird und über jedem Punkt die aktuelle *Intension* durch eine Strecke entsprechender Länge dargestellt wird. Diese Strecken können in beliebiger Richtung abgetragen werden, aber die senkrechte Abtragung ist die übliche. Die Extension nennt er „**longitudo**“, also „Länge“, und die nach oben abgetragene Intension nennt er „**latitudo**“, also „Weite“. Und damit ist festzuhalten, dass uns bei ORESME in dem Paar aus *logitudo* und *latitudo* wohl historisch *erstmalig zweidimensionale Koordinaten* begegnen, also das, was später „kartesische Koordinaten“ genannt wurde — knapp 300 Jahre vor DESCARTES! Das, was uns in dem Zeitdiagramm der Planetenbahnen von 950 (Abb. 2.15) erstmalig *qualitativ* als Koordinatensystem begegnete, erfährt hier bei ORESME eine *quantitative* Ausschärfung!

Hier ist marginal anzumerken, dass ORESME sogar die *Möglichkeit dreidimensionaler Koordinaten* diskutiert, um Größen darzustellen, die sowohl eine zeitliche als auch eine räumliche Extension haben. [49]

Zurück zur zweidimensionalen Darstellung: Die oberen Punkte der als kontinuierlich aufzufassenden Intensionen bilden für ihn eine *Kurve*, wodurch mit den Randwerten ein *Flächenstück* eingeschlossen wird, dessen Inhalt für ihn ein Maß für die *Quantität* einer weiteren Größe ist, in diesem Beispiel also für den zurück gelegten Weg! Oresme spricht in diesem Zusammenhang von **figura**, wie wir es auch auf einer Buchillustration erkennen können (Abb. 2.22).

Eine solche *figura* wird von zwei *latitudines* gebildet, also zwei senkrechten Größendarstellungen, dem Stück *longitudo*, das sich zwischen ihnen befindet, und der Verbindungslinie der Endpunkte aller umfassten latitudines. Solche *figurae* sehen wir in Abb. 2.21. Die *figurae* werden bei ORESME nicht nur von Strecken begrenzt, sondern auch von „Kurven“, wie wir es in Abb. 2.21 sehen, etwa Kreisbögen. [50]

So weist ORESME nach einer Schilderung von MORITZ CANTOR bereits auf ein *Extremwertverhalten* hin, wobei wir die oberste Figur von Abb. 2.21 in den Blick nehmen: [51]

> Wird die Figur durch einen Kreisabschnitt gebildet, [...] so wächst in ihr die latitudo vom Anfang bis zur Mitte und nimmt dann wieder bis zum Ende ab. Bei einer solchen Figur ist die Änderung der Geschwindigkeit des Wachsens und Fallens am obersten Punkte am langsamsten, dagegen ist die grösste Geschwindigkeit der Zunahme, beziehungsweise der Abnahme, am Anfang und am Ende der Figur vorhanden.

ORESME hat also mit seiner koordinatenorientierten Darstellung zeitabhängiger Größen das wesentliche Prinzip erkannt, dass eine reelle stetige Funktion einer Variablen durch eine „Kurve“ dargestellt werden kann. Er konnte dieses Prinzip jedoch nur im Falle einer „linearen“ Funktion effektiv anwenden, obwohl er es ja wie in Abb. 2.21 allgemeiner dargestellt hatte.

Fassen wir zusammen: Der Funktionsbegriff begegnet uns bei ORESME in der Verbindung zweier Konzepte: [53]

Abb. 2.22: NICOLE D’ORESME (ca. 1323 – 1382) [52]

[49] [Baron 1969, S. 82]

[50] [Cantor 1892, S. 119]

[51] [Cantor 1892, S. 119]

[52] Buchillustration aus URL 12 mit der Information: Auf dem Bild weist ihn in zeittypischer Weise eine *Armillarsphäre* (ein einfaches Modell des geozentrischen astronomischen Systems) als einen den mathematischen Wissenschaften zugeneigten Gelehrten aus.

[53] a. a. O.

- *Darstellung einer zeitabhängigen physikalischen Größe als Fläche* (über einer die Zeit darstellenden Strecke, der „Extension“)
- *Auffassung einer solchen Fläche als einer zeitabhängigen Bewegung einer in der Länge variablen Strecke* (der „Intension“) zu sich selbst (also in einem impliziten Koordinatenkonzept)

Es gibt jedoch keine Hinweise darauf, dass ORESME eine Kurve als „Summe ihrer Punkte“ bzw. eine Fläche als „Summe ihrer Linien“ ansah im Sinne von „Indivisibeln“. Dies wäre auch ein statischer Aspekt, während ORESME wohl eher eine kinematische bzw. dynamische Sichtweise hatte. [54]

Wir können übrigens in diesem Konzept von ORESME einen Vorläufer von NEWTONS *„Fluxionen“* erkennen, also jenen „fließenden“ Größen, mit denen dieser seinen Analysiskalkül aufbaute. Im Unterschied zu NEWTON war ORESME jedoch nur an der endgültigen Form der „Qualitäten“ interessiert, also den „Figuren“ wie z. B. an Dreiecken, Trapezen etc., nicht hingegen an momentanen Eigenschaften, die dann für die Differentialrechnung wesentlich wurden.

2.3 Neuzeit: Wege zur Begriffsentfaltung

Nach der ausführlichen Darstellung der Meilensteine auf dem Wege der Entwicklung des Funktionsbegriffs im Altertum und im Mittelalter möchte ich nun wesentliche Stationen der Neuzeit skizzieren.

ca. 1500: LEONARDO DA VINCI

LEONARDO DA VINCI verwendet um ca. 1500 rechtwinklige Koordinaten zur Untersuchung der Fallgeschwindigkeit. [55]

1550: GEORG J. V. LAUCHEN, gen. **RHAETICUS**

RHAETICUS berechnet die ersten trigonometrischen Tafeln, die posthum 1596 veröffentlicht werden. [56] Funktionen erscheinen hiermit in der Tradition der Babylonier.

1614: JOHN NAPIER

JOHN NAPIER erfindet die Logarithmen und berechnet die erste Logarithmentafel. [57]

1636: RENÉ DESCARTES

RENÉ DESCARTES führt in seinem *Discours de la méthode* das Koordinatensystem (wieder [58]) in die Mathematik ein (für den Zusammenhang zwischen Kurve und Gleichung). [59]

1646: FRANÇOIS VIÈTE (1540 – 1603)

VIÈTE zeigt in seiner Abhandlung *„In artem analyticam isagoge“* (*Einführung in die Kunst der Analyse*) die Nützlichkeit von Symbolen auf, indem er Buchstaben für „Unbekannte“ einführt. Er schlägt vor, Buchstaben sowohl für bekannte als auch für unbekannte Größen zu verwenden. Er verwendet zunächst Vokale für die unbekannten und Konsonanten für die bekannten Größen. Später führte Descartes dann in seinem Werk *„La Géometrie“* die Vereinbarung ein, Buchstaben vom Anfang des Alphabets für bekannte und vom Ende des Alphabets für unbekannte Größen zu verwenden. [60]

Diese heute noch vielfach übliche Konvention ist zwar in manchen Situationen nützlich, sie ist jedoch grundsätzlich sowohl unter didaktischen als auch strukturellen Aspekten recht problematisch.

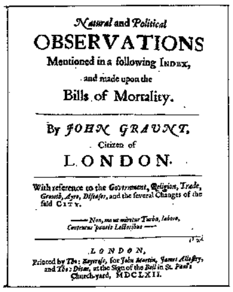

Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.
By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.
With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Ayre, Diseases, and the several Changes of the said CITY.
——Non, me ut miretur Turba, laboro, Contentus paucis Lectoribus——
LONDON,
Printed by Tho: Roycroft, for John Martin, James Allestry, and Tho: Dicas, at the Sign of the Bell in St. Paul's Church-yard, MDCLXII.

Abb. 2.23: Titelblatt der „Beobachtungen“ von JOHN GRAUNT

1662: JOHN GRAUNT (1620– 1674)

JOHN GRAUNT entdeckt die *demographische Statistik* für die Entwicklung von Lebenserwartungstabellen. [61]

1669: CHRISTIAAN HUYGENS (1629 – 1695)

1669 schrieb CHRISTIAAN HUYGENS (Abb. 2.24) einen Brief an seinen Bruder LUDWIG, indem er über den o. g. Zusammenhang berichtete, den JOHN GRAUNT einige Jahre zuvor entdeckt hatte:

Abb. 2.24: CHRISTIAAN HUYGENS

GRAUNT hatte aufgrund empirischer Sterbetabellen festgestellt, dass von 100 Neugeborenen nach 6 Jahren noch 64 leben, nach 16 Jahren noch 40 usw.

[54] [Baron 1969, S. 86]
[55] [Friendly & Denis 2002, S. 4]
[56] [Friendly & Denis 2002, S. 4]
[57] [Friendly & Denis 2002, S. 5]
[58] Vgl. S. 13 oben links!
[59] [Friendly & Denis 2002, S. 5]
[60] URL 24
[61] [Friendly & Denis 2002, S. 6]

HUYGENS stellte diese dann in einer Graphik dar und illustrierte damit seine Berechnungen zur Lebenserwartung (Abb. 2.25). [62]

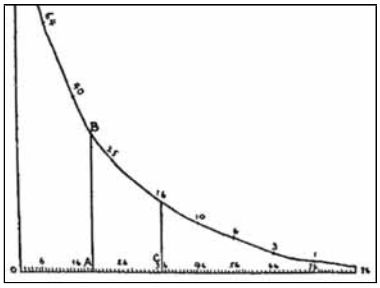


Abb. 2.25:
Lebenserwartungskurve von HUYGENS

Auch dies ist eine *zeitachsenorientierte Darstellung*, und wir sehen damit eine der ersten Zerfallskurven. Ob HUYGENS hier schon eine Gesetzmäßigkeit im Sinne einer exponentiellen Abnahme erkannte, ist nicht bekannt. Solche Gesetzmäßigkeiten im propädeutischen Sinne kannten allerdings bereits im 14. Jht. THOMAS BRADWARDINE vom MERTON-College und auch ORESME. [63]

1671: Isaac Newton (1643 – 1727)

Abb. 2.25: ISAAC NEWTON

ISAAC NEWTON behandelte 1671 in seinem Werk *„De Methodis Serierum et Fluxionum"* erstmals systematisch die von ihm so genannten *Fluxionen* und *Fluenten*, veröffentlichte dieses jedoch nicht. Es wurde erst posthum 1736 in englischer Übersetzung von JOHN COLSON gedruckt.

In diesem Werk entwickelte Newton seinen Analysiskalkül. Ist x die gegebene zeitabhängige Größe, so bezeichnet er (in unserem heutigen Verständnis) die zeitliche Ableitung als „erzeugte Größe" mit $\dot{x}$ und nennt diese die *„Fluxion"* (den „Fluss") von x, entsprechend bildet er $\ddot{x}$ als *Fluxion der Fluxion* — eine Schreibweise, die noch heute bei Physikern üblich ist. In Umkehrung dessen sucht er zu x eine neue „erzeugte Größe", so dass x deren Fluxion ist, und nennt diese neue Größe *„Fluente"*, die in unserem Sinne dann eine Stammfunktion darstellt.

Newtons Terminologie der „erzeugten Größe" ist der Kinematik entlehnt. [64]

62 Nach URL 9, Abbildung aus URL 2, siehe Anhang..

63 [Baron 1969, 88 f]

64 Nach [Felgner 2002].

1673: GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716)

Abb. 2.26:
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Erstmals bei Leibniz finden wir die dokumentierte Verwendung des Worts „Funktion" im mathematischen Kontext, und zwar 1673 in seiner (unpublizierten) [65] Abhandlung *„Methodus tangentium inversa, seu de functionibus"*, [66] was etwa wie folgt übersetzt werden könnte: *„Eine Methode, Tangenten umzukehren — oder: über Funktionen"*.

[Krüger 2000] schreibt hierzu: [67]

> Das Wort „Funktion" hatte bei Leibniz noch nicht die heutige mathematische Bedeutung, vielmehr wird es im Sinne von „funktionell" als Aufgabe, Stellung oder Wirkungsweise eines Glieds innerhalb eines Organismus bzw. einer Maschine verstanden [...]

Bei diesem *„inversen Tangentenproblem"* (das also „funktioniert"), geht es darum,

> von einer Eigenschaft der Tangente einer Kurve deren Koordinaten zu bestimmen, nach einer Stammfunktion zu suchen. [68]

1686: EDMOND HALLEY (1656 – 1742)

Abb. 2.27:
EDMOND HALLEY

EDMOND HALLEY (Abb. 2.27), bekannt durch den nach ihm benannten Kometen, berichtete 1686 über Beobachtungen, die er mit einem Barometer in verschiedenen Höhen gemacht hatte. Dabei interpretierte er seine Messwertpaare aus Höhe und Luftdruck als Punkte, die auf einer *Hyperbel* liegen (Abb. 2.28). [69]

65 [Felgner 2002]

66 [Krüger 2000, 44]; gemäß [Cantor 1898, 438] bestand noch die Meinung, dass LEIBNIZ dieses Wort erstmals 1694 benutzt habe.

67 [Krüger 2000, 44]

68 [Krüger 2000, 44]; [Volkert 1988, 103 f] skizziert hierzu ein Beispiel, wenn auch nicht verständlich.
Anmerkung: Die Bestimmung der „Koordinaten" einer Kurve heißt ja für uns heute, die Funktionsgleichung dieser Kurve zu ermitteln!

69 Nach URL 9 und URL 22, siehe Anhang.

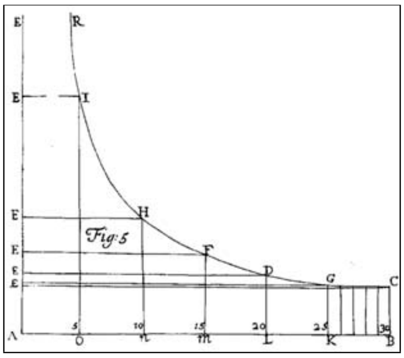


Abb. 2.28: Luftdruckkurve von HALLEY

Hier erscheint also eine *Hyperbel* nicht mehr wie bisher im geometrischen Zusammenhang, sondern *als Funktionsgraph*. Die Punkte auf einer Hyperbel anzunehmen, war zwar eine Fehldeutung; aber konnte er wissen, dass es eigentlich eine Exponentialfunktion ist? Diese war damals wohl – zumindest ihm – noch nicht bekannt.

1691: JAKOB I BERNOULLI (1654 – 1705)

Jakob I Bernoulli verwendet erstmalig die Funktionszeichen **sin.**, **tang.** und **sec.** [70]

1694: LEIBNIZ

LEIBNIZ *publiziert* im Juni-Heft der Fachzeitschrift *Acta Eruditorum* (etwa: „Gelehrtenzeitschrift") erstmals das Wort „Funktion" für die Subtangente einer Kurve. [71]

1694: JAKOB I BERNOULLI

JAKOB I BERNOULLI nimmt im Oktoberheft der *Acta Eruditorum* Bezug auf den Aufsatz von LEIBNIZ und bedient sich desselben Wortes im gleichen Sinn. [72]

1698: JOHANN I BERNOULLI (1667 – 1748)

Im Jahre 1698 entwickelt sich ein berühmter Briefwechsel zwischen LEIBNIZ und JOHANN I BERNOULLI, und

> schon im Juni 1698 spricht Bernoulli von irgend welchen Functionen beim isoperimetrischen Problem. Leibniz antwortet Ende Juli, er sei entzückt, dass Bernoulli das Wort grade so gebrauche wie er selbst. Im August schlägt Bernoulli vor, eine Function von x durch X oder durch ξ zu bezeichnen. Leibniz billigt diesen Vorschlag, meint aber zugleich, man könne Verschiedenheiten der vorkommenden Functionen dadurch andeuten, dass man den Buchstaben ξ mit einem Zahlenindex versehe [...] [73]

70 [v. Braunmühl 1900]

71 [Cantor 1898, 438]

72 [Cantor 1898, 438]

73 [Cantor 1898, 438]

1701: EDMOND HALLEY

EDMOND HALLEY stellt 1701 eine *Isobarendarstellung der magnetischen Inklination* vor. [74]

1706: JOHANN I BERNOULLI

JOHANN I BERNOULLI verwendet in den Abhandlungen der Pariser *Académie des Sciences* erstmals öffentlich das Wort „Funktion":

> Gleich im Wortlaute der ersten Aufgabe sprach er von den *fonctions quelquonque de ces appliquées* [...] [75]

Also: „... *irgendwelche Funktionen von diesen Anwendungen* ...".

- Anmerkung

Es lässt sich erahnen, dass Funktionen hier *noch keine eigenständigen Objekte* sind, sondern *Mittel für andere Zwecke*!

1718: JOHANN I BERNOULLI

JOHANN I BERNOULLI präsentiert in den Abhandlungen der Pariser *Académie des Sciences* die historisch erste *Definition* des Wortes „Funktion":

> Dort heisst es, er verstehe unter Function einer veränderlichen Größe einen Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Grösse und Constanten zusammengesetzt sei. Erst von da an war der neue Kunstausdruck der Wissenschaft erworben, und noch zwölf Jahre später, in den Abhandlungen der Académie des Sciences für 1730, unterschied wieder Johann Bernoulli zwischen algebraischen und transcendenten Functionen, wenn er auch mit letzterem Namen nicht den weiten Sinn verband, der ihm nachmals beigelegt wurde, sondern ihn nur auf die Integrale algebraischer Functionen bezog. [76]

- Anmerkung

1. In BERNOULLIS Definition erscheint zum einen Funktion als „Term", wie wir heute sagen würden, und das korrespondiert dann mit der vielfach noch heute oder heute wieder anzutreffenden Sprechweise „die Funktion $f(x)$". [77]
2. Weiterhin spricht BERNOULLI von *„Funktion einer veränderlichen Größe"*. Hier geht es also wie bei ORESME um „Größen" und deren „Veränderung", aber die verursachende veränderliche Größe muss nicht mehr explizit die Zeit sein!

74 [Friendly & Denis 2002, 7]

75 [Cantor 1898, 439]

76 [Cantor 1898, 439]; Hervorhebung nicht im Original.

77 vgl. [Hischer & Scheid 1982, 55] und [Hischer & Scheid 1995, 63].

Somit liegt hier also *einerseits eine deutliche Erweiterung des bisherigen Funktionsbegriffs* vor, weil nicht mehr nur die Zeitabhängigkeit untersucht wird. *Andererseits* findet durch die Notwendigkeit der Darstellbarkeit durch Terme nicht nur eine sehr nützliche Konkretion statt, sondern *aus unserer heutigen Sicht* zugleich *auch eine Einschränkung*, die erst wieder DIRICHLET aufbrach.

Gleichwohl liegt BERNOULLI mit seiner Betonung der *Veränderung* in der Tradition seiner Vorgänger seit ORESME.

1741: Johann PETER SÜSSMILCH (1707 – 1767)

SÜßMILCH gilt in Deutschland

> als geistiger Vater der Statistik und Demographie. Seine empirischen Studien auf der Grundlage von Kirchenbüchern – so zur Berechnung der Sexualproportionen bei Geburt, zur Säuglingssterblichkeit und sein Versuch mittels Mortalitätsstatistik die Population einer Stadt oder Region zu ermitteln – legen ein beredtes Zeugnis vom Werden einer neuen Wissenschaftsdisziplin ab. [...] <u>Kooperationen mit [...] dem Mathematiker Leonhard Euler</u> [...] bezeugen eindrucksvoll die internationalen Forschungsansätze, um die demographischen und sozialmedizinischen Fragen im 18. Jahrhundert (Pockenschutzimpfung, Gründung von Hebammenschulen, Verbesserung der Schulbildung etc.) zu klären. [78]

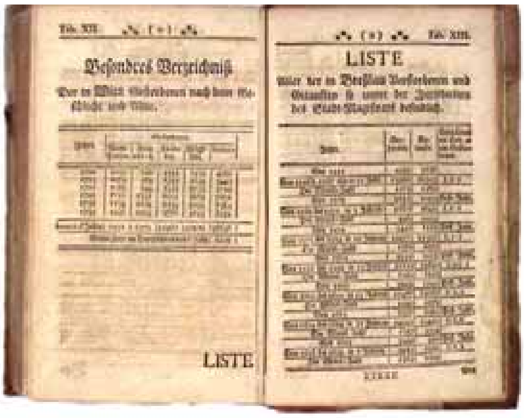


Abb. 2.29: Aus Peter Süßmilchs Buch *„Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflantzung"*

Interessant im Zusammenhang mit der Entwicklung des Funktionsbegriffs sind seine Untersuchungen von Bevölkerungsstatistiken in seinem Werk *„Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflantzung"*. [79] (Abb. 2.29 [80])

[78] URL 25, siehe Anlage; Hervorhebung nicht im Original.

[79] [Friendly & Denis 2002, 7]

1748: LEONHARD EULER (1707 – 1783)

Während für LEIBNIZ das Differential der Grundbegriff seiner Analysis war und er wie BERNOULLI Funktionen *benutzte*, wird bei EULER erstmalig die *Funktion zum grundlegenden Begriff* seiner Analysis, und zwar in dem berühmten zweibändigen Werk *„Analysin in infinitorum"*. [81] In Band 1, Kapitel 1, S. 18, definiert EULER gemäß BERNOULLI: [82]

> Eine Funktion einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgröße und aus eigentlichen Zahlen oder aus konstanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist.

Seine Präzisierung gegenüber BERNOULLI besteht darin, dass er zuvor definiert, was veränderliche und konstante Größen sind. Seine Definition bleibt jedoch unbefriedigend, weil er nicht erklärt, was ein „analytischer Ausdruck" ist. Zum Teil sieht EULER den *Funktionsbegriff auch als <u>Beziehung zwischen den Koordinaten der Punkte einer freihändig in der Ebene gezeichneten Kurve</u>*. Somit verquickt er eine rechnerische mit einer geometrischen Funktionsauffassung. [83]

1760: JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 – 1777)

JOHANN HEINRICH LAMBERT erfindet 1760 *Ausgleichskurven* zur *Interpolation empirischer Daten*. [84]

Abb. 2.30: JOHANN HEINRICH LAMBERT

1779: LAMBERT

1779 führt LAMBERT Langzeitmessungen der Veränderung der Erdtemperatur durch und stellt die Ergebnisse in einer *zeitachsenorientierten Graphik* dar (Abb. 2.31), wodurch der Charakter periodischer Funktionen offenbart wird. [85] LAMBERT knüpft damit an die 800 Jahre zurück liegende mittelalterliche Methode zeitachsenorientierter Darstellungen an, was vor ihm nur rund 100 Jahre vorher HUYGENS gemacht hatte (Abb. 2.25). Heutige Messergebnisse differieren trotz größerer Datenbasis nur wenig vom LAMBERTS Messungen! [86]

[80] Aus [Friendly & Denis 2002] unter Jahreszahl „1741".

[81] Vgl. den Nachdruck [Euler 1988].

[82] In deutscher Übersetzung bei [Felgner 2002].

[83] [Steiner 1969]

[84] [Friendly & Denis 2002, 7]

[85] [Friendly & Denis 2002, 7]

[86] Gemäß [Tufte 1983, 29].

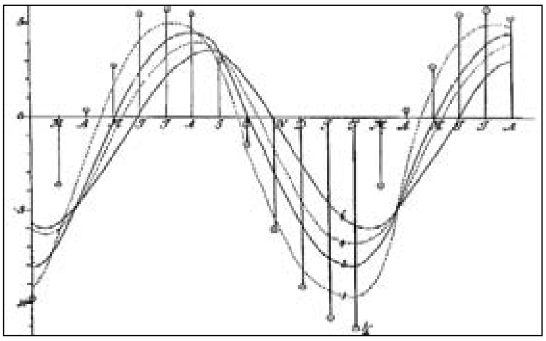


Abb. 2.31: Langzeittemperaturmessung („Pyrometrie“) im Erdboden durch LAMBERT 1779

Anmerkung

Wir erkennen hieran, dass parallel zur Entwicklung des mathematischen Funktionsbegriffs (aus den Bedürfnissen der Analysis heraus!) *empirische Funktionen* eine immer stärkere Bedeutung erlangen. Das machen die folgenden Beispiele um so mehr deutlich:

1786: WILLIAM PLAYFAIRE (1759 – 1823)

Statistische Daten werden zunächst in Tabellen erfasst und nicht nur mit numerischen Methoden analysiert, sondern auch graphisch visualisiert. Die wichtigsten hierfür noch heute verwendeten Visualisierungsformen wie z. B. Balkengraphik und Kreisdiagramm gehen alle auf den Engländer WILLIAM PLAYFAIRE zurück, der hierfür seine *„Lineare Arithmetik“* entwickelte. Auch solche Graphiken müssen wir heute unter dem Aspekt des funktionalen Denkens sehen — auch hierin zeigt sich die Entwicklung des Funktionsbegriffs.

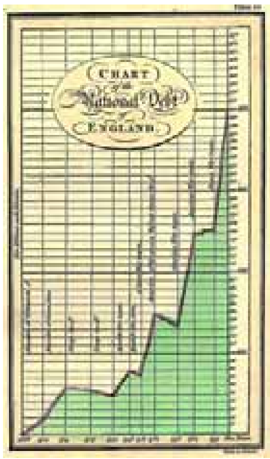


Abb. 2.32: Liniendiagramm von PLAYFAIRE (Staatsschulden)

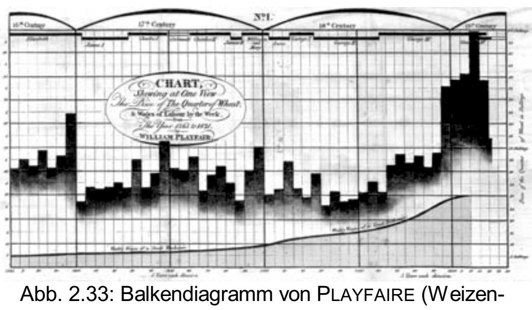


Abb. 2.33: Balkendiagramm von PLAYFAIRE (Weizenpreise, kombiniert mit Wochenlohn und Regierungen)

1786 veröffentlichte PLAYFAIRE Darstellungen ökonomischer Daten mittels Balken- und Liniendiagrammen (Abb. 2.33 und 2.33). [87]

[87] Siehe [Tufte 1983, S. 34 und 44], ferner: Abb. 2.30 aus URL 26, Abb. 2.31 aus URL 27, beide auch in URL 28.

1795: LOUIS ÉZECHIEL POUCHET (1748 –1809)

1795 erfand LOUIS ÉZÉCHIEL POUCHET *Nomogramme* zur einfachen Ausführung von Multiplikationen (Abb. 2.34). [88]

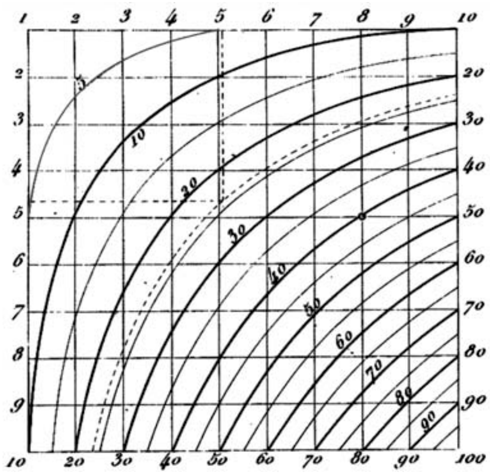


Abb. 2.34: Nomogramm von POUCHET zur Multiplikation

Nomogramme können wir als Niveaulinien von zweistelligen Funktionen auffassen, im obigen Beispiel: Alle Zahlenpaare, die auf einer Kurve liegen, sind *produktgleich*.

Wichtige Beispiele für Nomogramme sind *Netztafeln* und *Fluchtlinientafeln*.

Nomogramme werden auch im Zeitalter der Computer in der Labor- und Ingenieurpraxis verwendet, z. B. zur Gewinnung von Näherungswerten, die für den Start genauerer Berechnungen benötigt werden. [89]

1796: JOHN SOUTHERN und JAMES WATT

JOHN SOUTHERN und JAMES WATT führen in England die *erste automatische Aufzeichnung von Messwertdaten-Paaren* durch, und zwar für die Aufzeichnung von Druck und Volumen bei Dampfmaschinen (sog. „Watt-Indikator“, bis 1822 geheim gehalten).

Abb. 2.35 zeigt ein Foto dieses Watt-Indikators. [90] Wir erkennen deutlich, dass dieses *„funktionierende“* Gerät eine geschlossene Linie zeichnet: Hier wird also ein thermodynamischer „Kreisprozess“ erfasst!

Das Studium und Verständnis dieser Kurve, die ja einen *funktionalen Zusammenhang* zwischen Druck und Volumen darstellt, ist zugleich ein Schlüssel zum Verständnis der *„Funktion“* der Dampfmaschine!

[88] [Friendly & Denis 2002, 8]

[89] [Bronstein et al. 2000, 127]

[90] [Friendly & Denis 2002, 8]

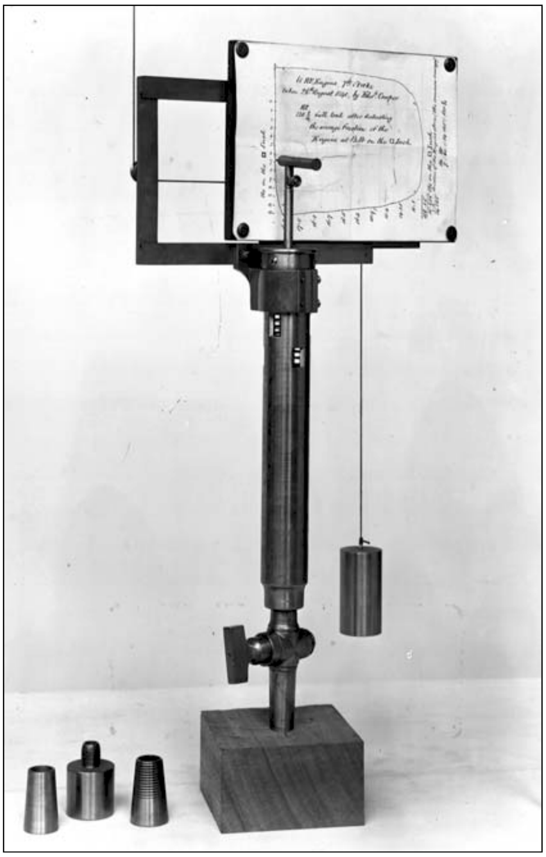


Abb. 2.35: „Watt-Indikator“
zur automatischen Aufzeichnung der
Volumen-Druck-Kurve bei einer Dampfmaschine

1800: LUKE HOWARD (England)

LUKE HOWARD hat die Idee der kontinuierlichen automatischen graphischen Darstellung zeitabhängiger Messwerte (wie Luftdruck und Temperatur). [91] Dies führt zur automatischen Erfassung empirischer Funktionen.

1801: PLAYFAIR

WILLIAM PLAYFAIR präsentiert erstmalig Kreis- bzw. Tortendiagramme zur Visualisierung ökonomischer Daten (Abb. 2.36). [92]

1817: ALEXANDER VON HUMBOLDT

Alexander von Humboldt verwendet *Isothermen* zur Darstellung der mittleren Temperatur auf der gesamten Welt. [93]

1821: JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768 – 1830)

FOURIER stellt die *Häufigkeitsverteilung der Altersstruktur* der Einwohner von Paris durch einen Funktionsgraphen dar (Abb. 2.37). [94]

[91] [Friendly & Denis 2002, 9]

[92] [Friendly & Denis 2002, 9]

[93] [Friendly & Denis 2002, 9]

[94] [Friendly & Denis 2002, 9]

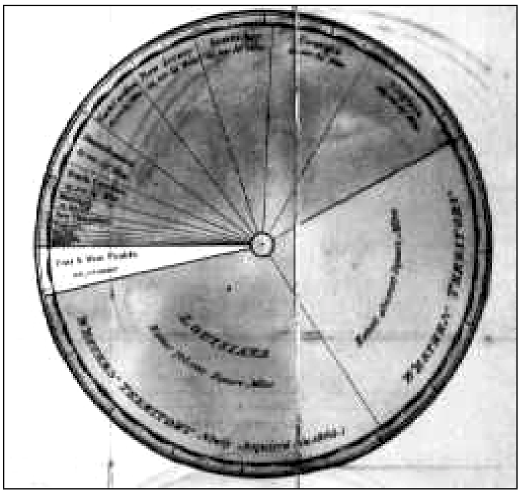


Abb. 2.36: Tortendiagramm von PLAYFAIR

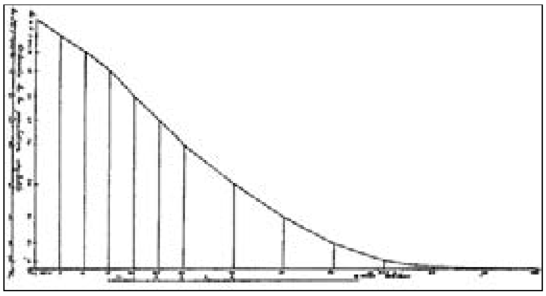


Abb. 2.37: Häufigkeitsverteilung von FOURIER

1822: FOURIER

Abb. 2.38: JOSEPH FOURIER

In seinem Hauptwerk „Théorie de la chaleur“ (also: Theorie der Wärme) definiert FOURIER den Funktionsbegriff erstmals allgemeiner als vor ihm BERNOULLI und EULER. Er verlangt nicht mehr, dass Funktionen durch analytische Ausdrücke gegeben sein müssen: [95]

> Allgemein repräsentiert die Funktion $f(x)$ eine Folge von Werten oder Ordinaten, von denen jeder beliebig ist. Da die Abszissen x unendlich viele Werte annehmen dürfen, so gibt es auch unendlich viele Ordinaten $f(x)$. Alle haben bestimmte Zahlenwerte, die positiv, negativ oder Null sein können. Es wird keineswegs angenommen, dass diese Ordinaten einem gemeinsamen Gesetz unterworfen sind; sie folgen einander auf irgendeine Weise und jede Ordinate ist so gegeben, als wäre sie allein gegeben.

Anmerkung

Diese Funktionsdefinition mutet bereits recht allgemein und modern an. Zwar schränkt FOURIER, dem damaligen Kenntnisstand folgend, Argumente und Funktionswerte noch

[95] Nach [Felgner 2002].

auf *Zahlen* ein, aber er setzt nicht zwingend eine „Gesetz" oder eine „Regelmäßigkeit" voraus, nach dem die Funktionswerte gebildet sind. Es ist zu vermuten, dass diese verallgemeinernde Sichtweise aus FOURIERS Beschäftigung mit empirischen Daten aus der Physik und der Soziologie entstanden ist.

1829: JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859)

Wir kommen zum Jahr 1829, rund 110 Jahre nach der ersten mathematischen Definition von „Funktion" durch JOHANN I BERNOULLI und rund 80 Jahre nach EULERS verbesserter Definition. Es ist die Zeit des Beginns der sog. „exakten Grundlegung der Analysis", und wir müssen uns JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET zuwenden.

Abb. 2.37: LEJEUNE DIRICHLET [96]

DIRICHLET ist nicht etwa Franzose, wie der Name suggeriert. Er wurde 1805 in Düren geboren, einer Stadt zwischen Aachen und Köln, die allerdings damals in napoleonischer Zeit zum französischen Protektorat gehörte. Seine Familie kam aus der belgischen Stadt Richelet, und so wurde er der „Junge aus Richelet" bzw. der „Le jeune de Richelet" genannt, woraus dann „Lejeune Dirichlet" wurde. [97]

Bereits im Alter von 12 Jahren hatte er seine Leidenschaft für Mathematik entdeckt und gab dafür sein Taschengeld aus. In der Schule, einem Bonner Gymnasium, galt er als ungewöhnlich aufmerksam und sowohl für Mathematik als auch für Geschichte besonders begabt. [98] Im Jahre 1822, also im Alter von 17, nahm er das Mathematikstudium auf. Da aber

> an den deutschen Universitäten zu dieser Zeit [...] (außer Gauß) keine nennenswerten Mathematiker tätig waren, wählte er Paris als Studienort, „zu dieser Zeit noch das unbestrittene Weltzentrum der Mathematik" [...]
>
> [...] der junge Dirichlet studierte Fouriers Werk über die Wärmeleitung (das im Jahr seiner Ankunft in Paris erschien) ebenso wie Cauchys *Cours d'Analyse* und hatte persönlichen Kontakt zur Fourier. [99]

[96] Abb. aus URL 29.

[97] Gesprochen als „Dirischle" wie in „schleppen".

[98] URL 29

[99] [Jahnke 1999, 331]

Um nun den weiteren Verlauf zu verstehen, muss man wissen, dass zu der Zeit klar war, dass mit CAUCHYS Integralbegriff zumindest stetige Funktionen integrierbar waren. Ausgehend von FOURIERS Untersuchungen über trigonometrische Reihen entstand aber nun die Frage, ob auch für „beliebige Funktionen" ein bestimmtes Integral definierbar wäre.

Und hier ist nun der Beitrag DIRICHLETS zu sehen: 1829 veröffentlichte er in *Crelles Journal* eine Arbeit mit dem Titel « *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites données* ».

In dieser Arbeit veröffentlichte er dann auch die berühmte nach ihm benannte Funktion, die wir auch als „Dirichlet-Monster" [100] kennen und die wir heute verallgemeinert wie folgt darstellen können:

$$\mathrm{dir}_{a,b}(x) := \begin{cases} a & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ b & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Für $a \neq b$ ist diese Funktion überall unstetig. Damit war ganz im Sinne FOURIERS eine „willkürliche" Funktion erzeugt worden, die nicht integrierbar ist.

1837: LEJEUNE DIRICHLET

Durch FOURIER und seinen Schüler DIRICHLET war somit die Tür aufgestoßen, um den bis dahin dominierenden EULERschen Funktionsbegriff zu verallgemeinern.

Wir müssen aber zunächst noch einmal kurz zurückblicken: [101] 1823 fand DIRICHLET in Paris in einem General von NAPOLEON, MAXIMILIEN SÉBASTIEN FOY, einen Gönner, in dessen Haus er aufgenommen wurde und dessen Familie er Deutschunterricht gab. So fand er in Paris ausgezeichnete Rahmenbedingungen für seine Studien. Als General FOY 1825 starb, änderten sich diese Bedingungen, und DIRICHLET beschloss, nach Deutschland zurückzukehren, worin er von ALEXANDER VON HUMBOLDT ermutigt wurde, der sich ebenfalls sehr für ihn einsetzte. Natürlich wollte DIRICHLET nicht als Student an eine Universität gehen, sondern als Dozent — im Alter von 20 Jahren!

Und so gab es ein großes spezifisch deutsches Problem: Er war nicht habilitiert! Nun wäre es für ihn ein Leichtes gewesen, eine Habilitationsschrift vorzulegen, aber das war nicht erlaubt: denn er war noch nicht einmal promoviert, und er sprach nicht lateinisch, was Anfang des 19. Jhts. in Deutschland noch Bedingung war.

[100] [Jahnke 1999, 331]

[101] Gemäß URL 29, siehe Anlage.

Es gab dann doch eine trickreiche Lösung: Die Universität zu Köln verlieh ihm die Ehrendoktorwürde, und an der Universität zu Breslau reichte er eine Habilitationsschrift über Polynome und Primteiler ein, und nach einer langen Kontroverse zwischen deutschen Professoren für und gegen ihn bekam er in Breslau seine erste Professur.

Aber: Das Niveau war ihm dort zu niedrig (sic!), ihn zog es nach Berlin, und schließlich gelang es ihm, an die Berliner Universität zu wechseln, wo er von 1828 bis 1855 tätig war. Er wurde dann Nachfolger von GAUß in Göttingen, und sein Schüler RIEMANN wurde später dort sein Nachfolger.

1837 veröffentlichte DIRICHLET im *Repertorium der Physik* eine Arbeit *„Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen“*, mit der er an seine Pariser Arbeit anknüpfte. [102]

Hier finden wir dann seine verallgemeinerte Definition einer *Funktion, denn er*

> verlangt von einer Funktion nur noch, dass *„jedem x ein einziges, endliches y“* entsprechen soll. Auf eine einheitliche analytische Darstellbarkeit greift auch er nicht mehr zurück. Genauso wie Fourier betont er, dass die abhängige Größe y nicht immer *„nach demselben Gesetz von x abhängig“* sein müsse, wenn x die Werte zwischen zwei reellen Zahlen a und b durchläuft. [103]

Und FELGNER kommentiert dieses: [104]

> Funktionen sind [...] bei Fourier und Dirichlet dem Begriffe nach eindeutige Zuordnungen. Im Begriff der Funktion ist die Definierbarkeit durch einen analytischen Ausdruck nicht eingeschlossen. Dieser Funktionsbegriff wird oft nur mit dem Namen Dirichlets in Verbindung gebracht, obwohl doch Fourier der eigentliche Urheber ist.
>
> [...] Funktionen im Sinne von Fourier und Dirichlet müssen weder differenzierbar noch stetig sein.

Würde man dieses noch mit Hilfe der Mengensprache der Strukturmathematik umformulieren, so waren FOURIER und DIRICHLET im Grunde bei der allgemeinsten Auffassung einer *Funktion als einer rechtseindeutigen Relation*. Auf sie beide geht somit die moderne Auffassung des Funktionsbegriffs als abstrakte Abbildungsvorschrift zurück, wobei sie aber – natürlich! – noch nicht die Bezeichnungen „Menge“ und „reelle Zahl“ benutzen.

[102] [Jahnke 1999, 515]

[103] Aus [Felgner 2002].

[104] Aus [Felgner 2002].

1875: DU BOIS-REYMOND (1831 – 1889)

1875 stellt DU BOIS-REYMOND fest, *„Die mathematische Funktion, ... ist eine den Logarithmentafeln ähnliche ideale Tabelle“.*

1875: RICHARD DEDEKIND (1831 – 1916)

1888 definiert DEDEKIND „Abbildung“ ganz im Sinne von „Funktion“ als *eindeutige Zuordnung*.

1891: GOTTLOB FREGE (1848 – 1925)

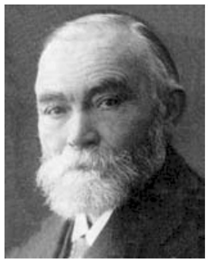


Abb. 2.39: GOTTLOB FREGE

Nun muss der Mathematiker und Philosoph GOTTLOB FREGE angesprochen werden, ein scharfsinniger Denker, dem es zu verdanken ist, dass die Disziplin „Logik“ von der Philosophie in die Mathematik gelangte.

Seine Analysen über „Funktion und Begriff“ waren maßgeblich für die weitere Entwicklung des Funktionsbegriffs, können aber hier in diesem Rahmen nicht angesprochen werden, weil solche philosophischen Texte eine eigene intensive Behandlung erfordern.

Ich muss mich für den Rest mit einigen Mitteilungen begnügen: [105]

- Ende des 19. Jahrhunderts:
  PEANO, PEIRCE und SCHRÖDER erklären *Funktionen als Relation* und *Relation als Mengen geordneter Paare*.
- 1908: ZERMELO definiert das *„Kartesische Produkt“* zweier Mengen.
- 1914: HAUSDORFF definiert auf mengentheoretischer Grundlage *„geordnete Paare“*, darauf aufbauend Relationen und schließlich eine *Funktion als zweistellige Relation*, die – wie wir heute sagen – auch *rechtseindeutig* ist.

Diese formale Definition von „Funktion“ hat sich dann seit den 1970er Jahren in Schule und Hochschule durchgesetzt, sie wird jedoch weder in der Schule noch in Wissenschaft und Anwendung durchgängig so verwendet, vielmehr stehen wir heute vor der kontextbezogenen Vielfalt und Reichhaltigkeit, wie sie in Kap. 1 beschrieben wurde.

[105] Vgl. z. B. [Felgner 2002].

3 „Funktion" heute: Stand und Probleme

3.1 Funktion als rechtseindeutige (binäre) Relation

Legt man den mengentheoretischen Maßstab der modernen Mathematik zugrunde, so muss man zu der Auffassung gelangen, dass heute als einzige formal zufrieden stellende umfassendste Definition von „Funktion" der Weg über Relationen ist. Dies sei kurz skizziert.

Um den Begriff „Relation" im Sinne von „Beziehung" zu präzisieren, beschränkt man sich zunächst auf die Beziehung zwischen den Elementen aus zwei Mengen A und B und spricht dann von *binären Relationen*. Sofort ist ersichtlich, dass die konkrete Relation R dann treffend durch die Angabe derjenigen geordneten Paare $(a,b) \in A \times B$ gekennzeichnet ist, die hier „in Beziehung stehen". Das legt nahe, jede Teilmenge von $A \times B$ als „Relation von A und B" aufzufassen. Also:

> Definition 1:
>
> Es seien A, B und R Mengen.
>
> R ist **Relation** aus A in B
>
> $:\Leftrightarrow R \subseteq A \times B$

Diese zunächst bestechend anmutende Definition zeigt schnell Schwächen, weil ja die Paarmenge R Teilmenge beliebig vieler Produktmengen sein kann. Das liegt daran, dass der Begriff „Teilmenge" ohne Angabe einer Bezugsmenge sinnlos ist. Somit **muss** hier die konkrete Produktmenge stets mit angegeben werden, obige Definition **muss** also modifiziert werden, etwa wie folgt:

> Definition 1*:
>
> Es seien A, B und R Mengen.
>
> (R, A, B) ist **Relation** aus A in B
>
> $:\Leftrightarrow R \subseteq A \times B$

Dies ist formal einwandfrei, hat nur leider den Nachteil, dass eine Relation nicht mehr direkt als Teilmenge erscheint. Bewusst dürfen die vorkommenden Mengen leer sein, so dass es also „leere Relationen" gibt.

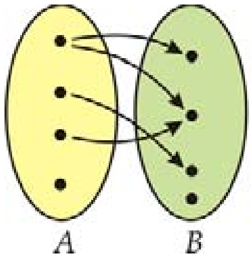
Nunmehr kann man diverse Relationseigenschaften definieren, etwa die folgenden:

> Definition 2:
>
> Es sei (R, A, B) eine **Relation** aus A in B.
>
> (R, A, B) ist **rechtseindeutig**
>
> $:\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x,y,z} \big((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R \rightarrow y = z\big)$

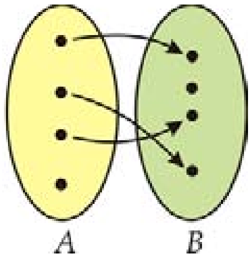
Analog kann man „linkseindeutig" definieren. Das führt dann zur Formalisierung der Definition für „Funktion":

> Definition 3:
>
> Es sei (f, A, B) eine **Relation** aus A in B.
>
> (f, A, B) ist **Funktion** aus A in B
>
> $:\Leftrightarrow (f, A, B)$ ist rechtseindeutig

Die für eine Funktion gegenüber einer Relation wesentliche Einschränkung kann man an einem „Pfeildiagramm" veranschaulichen:



keine Funktion aus A in B



Funktion aus A in B

Es mag noch irritieren, dass nicht jedem Element aus A genau ein Element aus B zugeordnet wird. Das erreicht man ggf. wie folgt:

> Definition 4:
>
> Es sei (R, A, B) eine **Relation** aus A in B.
>
> (R, A, B) ist **linkstotal**
>
> $:\Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x\in A} \bigvee\limits_{y\in B} (x,y) \in R$

Und damit dann:

> Definition 5:
>
> Es sei (f, A, B) eine **Relation** aus A in B.
>
> (f, A, B) ist **Funktion** von A nach B
>
> $:\Leftrightarrow (f, A, B)$ ist rechtseindeutig und linkstotal

Üblicherweise ist dies die Definition von „Funktion", aber es geht auch schwächer wie in Def. 3. „Funktion" und „Abbildung" werden synonym verwendet. Schreibweise:

f ist **Funktion** von A nach B $\Leftrightarrow: f : A \rightarrow B$,

kurz gelesen: „f ist Funktion von A nach B".

Ist eine Funktion (f, A, B) gegeben und $(x, y) \in f$ mit Variablen x, y, so schreibt man

$$(x,y) \in f \;\Leftrightarrow:\; y = f(x) \;\Leftrightarrow:\; x \underset{f}{\mapsto} y\,,$$

wobei man das f unter dem Pfeil i. d. R. weglässt.

Hierbei muss man die beiden Pfeile streng unterscheiden, weil z.B. $\{1,2,3\} \rightarrow \{1\}$ und $\{1,2,3\} \mapsto \{1\}$ etwas grundsätzlich anderes bedeuten.

Dies ist ein möglicher formaler Aufbau zur Funktionsdefinition; es gibt Alternativen, auf die ich aber hier nicht eingehe.

3.2 Vorteile

Man kann bereits für Relationen z. B. Verkettung und Inversion definieren und diverse Eigenschaften wie etwa die Assoziativität der Verkettung beweisen und all diese Eigenschaften damit automatisch auf Funktionen übertragen. Und wenn dann irgendwo in der Mathematik oder in Anwendungen Funktionen in diesem Sinne auftauchen, kann man auf diese grundlegenden Eigenschaften zurückgreifen.

Hier liegt somit strukturtheoretisch ein Werkzeug vor, das von ähnlich grundlegender Bedeutung ist wie die „Menge".

„Funktion" bzw. dann synonym „Abbildung" erscheinen hier als übergreifende Begriffe, so dass dann etwa „Funktional", „Operator", „Operation", „Morphismus", „Tabelle" etc. als spezielle Funktionen aufzufassen sind.

3.3 Nachteile

Für den konkreten Anwender sowohl in mathematischen Teilgebieten als auch außerhalb der Mathematik ist diese Charakterisierung nicht immer wirklich gewinnbringend. Und so kommt es zu den speziellen Sicht- und Schreibweisen von „Funktion", wie ich sie bereits eingangs skizziert habe:

- Für Funktionentheoretiker oder Zahlentheoretiker sind Funktionen *eindeutige Zuordnungen zwischen Zahlenmengen*.
- Für Numeriker gilt dies ohnehin, und erst recht reicht es bei ihnen vielfach aus, etwa $f(x)$ oder eine numerische Tabelle als Funktion zu begreifen.
- Viele werden auch einen Unterschied zwischen „Abbildung" und „Funktion" sehen wollen und diese Bezeichnungen für unterschiedliche Bereiche reservieren.
- Physiker werden selbstverständlich davon sprechen, dass z. B. $s = s(t)$ gilt, und dies dann eine „Weg-Zeit-Funktion" nennen, weil hiermit natürlich wunderbar ein inhaltlicher Aspekt zum Ausdruck kommt, der in der formal-abstrakten Charakterisierung über die Paarmenge fehlt. Denn formal ist obige Schreibweise unsinnig und verboten!
- Man kann bei diesem mengentheoretisch begründeten Zugang zum Funktionsbegriff nicht mehr von *„Funktionen mit mehreren Veränderlichen"* sprechen, weil sich ja nichts verändert! Stattdessen sind hier die Bezeichnungen „Einstellige Funktion" oder „Mehrstellige Funktion" angemessen. (An dieser Stelle wäre es nötig, auf GOTTLOB FREGE einzugehen.)

3.4 Fundamentale Idee

Es zeigt sich also, dass der Funktionsbegriff in der Mathematik und in den Anwendungen weder formal noch inhaltlich einheitlich gehandhabt wird. Dieser Begriff ist also recht *vage*, und dennoch bleibt als gemeinsamer Kern die *eindeutige Zuordnung*. Denn selbst eine sog. *„mehrdeutige Zuordnung"* lässt sich ja eindeutig interpretieren, indem ein n-Tupel zugeordnet wird.

So scheint es sinnvoll zu sein, zu unterscheiden zwischen

- *Funktionen im weiteren Sinne* und
- *Funktionen im engeren Sinne*.

Funktionen im weiteren Sinne bilden bzw. bieten ein die Mathematik und die außermathematischen Anwendungen übergreifend strukturierendes Konzept des sog. *„funktionalen Denkens"*, während ***Funktionen im engeren Sinne*** typische Verwendungsweisen in bestimmten speziellen mathematischen Bereichen darstellen.

Der historische Überblick deutet an, in welcher Vielfalt „funktionale Denkweise" die letzten 4000 Jahre der Menschheitsgeschichte durchzieht. Und weiterhin ist uns klar, dass mit dem funktionalen Denken grundlegende Prinzipien mathematischer Vorgehensweise verbunden sind.

Dies kann man auch beschreiben, dass im Funktionsbegriff eine *fundamentale Idee der Mathematik* zum Ausdruck kommt: [106]

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

🕮	sind aufzeigbar in der *historischen Entwicklung* der Mathematik,
Σ	geben (zumindest partiell) Aufschluss über *das Wesen der Mathematik*,
☯	sind, gewissermaßen als *Archetypen des Denkens*, auch außerhalb der Mathematik auffindbar.

Und ferner:

Fundamentale Ideen der Mathematik ...

≈	sind eher vage als präzise.

Meine Ausführungen sollten deutlich machen, dass diese Eigenschaften auf den Funktionsbegriff zutreffen.

Ich schließe mit einer wichtigen Anmerkung und einigen Beispielen.

[106] Vgl. [Hischer 1998].

3.5 Eine Anmerkung

Ist z. B. $T(x)$ ein Term und der Einsetzungsbereich für x eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$, so ist durch die Angabe

$$f:\begin{cases} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto T(x) \end{cases}$$

eine reelle Funktion definiert.

Wie liest man nun speziell $x \mapsto T(x)$ oder vereinfacht $x \mapsto y$? Wie machen Sie es selber?

Immer wieder musste ich feststellen, dass Schülerinnen und Schüler lesen:

„x wird zugeordnet y."

Nun liegt der Verdacht nahe, dass sie das so gelernt haben, und in der Tat habe ich diese Redeweise auch manchmal von Lehrkräften gehört, wenn auch nicht immer.

Und wir alle wissen natürlich, dass diese Sprechweise schwammig und unpräzise ist, weil nicht klar wird, wer hier wem zugeordnet wird. Die deutsche Sprache erlaubt aber eine Präzisierung mittels des bestimmten Artikels. Und das war in meinem eigenen Unterricht in Klasse 7 auch immer der Ansatz, auf diese Weise Klarheit bei meinen Schülerinnen und Schülern zu schaffen.

Offenbar gibt es doch vier Möglichkeiten, hier den bestimmten Artikel zu setzen:

(1) dem x wird das y zugeordnet
(2) das x wird dem y zugeordnet
(3) dem y wird das x zugeordnet
(4) das y wird dem x zugeordnet

Wir wissen, dass die mittleren beiden falsch und die anderen beiden äquivalent sind. Für meine Schülerinnen und Schüler war dies trotz intensiver vorheriger Erarbeitung keinesfalls klar, so dass ich stets ratlos war wegen dieses sprachlichen Problems.

Ich legte das dem Deutschlehrer der Klasse vor, um ihm klar zu machen, mit was für Sprachverständnissen diese Klasse zu kämpfen habe. Seine Reaktion war für mich niederschmetternd:

„Natürlich wird das x dem y zugeordnet, wenn der Pfeil von x nach y geht!"

Ich legte dasselbe Problem etlichen anderen unvorbelasteten Nichtmathematikern vor:

Stets dieselbe Reaktion! Es sei doch klar:

- „Wenn der Pfeil vom x zum y geht, dann geht das x zum y!"

Warum ich das erwähne? Es wird klar, dass die von uns benutzte und für sinnvoll erachtete Symbolik keinesfalls naheliegend und selbstredend ist. Konkret in diesem Fall zeigt sich, dass wir offenbar die natürliche intuitive Interpretation dieses Symbols gewaltsam verbiegen. Das sollte uns sensibel machen für derartige Phänomene!

So empfiehlt sich übrigens folgende Lesart:

„aus x wird y"

3.6 Beispiele

Von dem Technomathematiker NEUNZERT aus Kaiserslautern stammt die Aussage:

Mathematik ist überall, nur wer weiß das schon!

Mit Blick auf meine Ausführungen modifiziere ich diesen Satz wie folgt:

Funktionen sind überall, nur wer weiß das schon!

Dass Funktionen überall in der Mathematik sind, ist wohl klar. Aber außerhalb?

- **Pixelgraphik**: Wenn eine Bitmap-Datei auf einem Bildschirm dargestellt wird, liegt eine Funktion vor, die jedem Pixel einen Farbcode zuordnet. Durch Zoomen kann man dieses auch direkt erleben, wenn man nämlich so weit vergrößert, dass man die ursprünglichen Pixel als einfarbiges Quadrat sieht. Im RGB-Modus wird dabei jedem Pixel ein Zahlentripel zugeordnet, dessen einzelne Elemente die Werte 0 bis 255 annehmen können, so dass jedem Bildpunkt 2^{24} Farbwerte zugeordnet werden können (24-Bit-Darstellung).

- Ein **Kinofilm** ist die Darstellung einer zeitachsenorientierten Funktion: Bestimmten diskreten Zeitpunkten eines abgeschlossenen Intervalls wird ein Bild des Filmstreifens zugeordnet. Durch Verkettung mit der Abbildungsmaschine des Projektors entsteht eine Bildfolge auf der Leinwand. Dieses wird wiederum verkettet mit der Abbildung auf unsere Netzhaut. ... So findet hier eine Verkettung mehrerer Funktionen statt.

- Eine **WAV-Datei** ist eine zeitachsenorientierte Funktion, die wir als Funktionsgraph sichtbar machen können bzw. durch Verkettung auch hören können.

- Eine **MIDI-Datei** ist ebenfalls eine zeitachsenorientierte Funktion, die wir als Partitur sichtbar machen und durch Verkettung auch hören können. Durch Verkettung können wir dabei jeder einzelnen Stimme ein beliebiges „synthetisches Instrument" zuordnen.

4 Literatur

Baron, Margaret E. [1969]: The Origins of The Infinitesimal Calculus. Oxford / London / Edinburgh / New York / Toronto / Sydney / Paris / Braunschweig: Pergamon Press.

Barraclough, Geoffrey (Hrsg.) [1979]: Knaurs großer historischer Weltatlas. München / Zürich: Droemersche Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf.

Brieskorn, Egbert & Knörrer, Horst [1981]: Ebene algebraische Kurven. Basel / Boston / Stuttgart: Birkhäuser.

Braunmühl, A. von [1900]: Geschichte der Trigonometrie. Leipzig. (Nachdruck 1971 bei Dr. Sändig)

Bronstein, I. N. & Semendjajew, K. A. & Musiol, G. & Mühlig, H. [202]: Taschenbuch der Mathematik. Thun / Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch.

Cantor, Moritz [1892]: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band, 1200 – 1668. Leipzig: B. G. Teubner.

Cantor, Moritz [1898]: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band, 1668 – 1699. Leipzig: B. G. Teubner.

Duschek, Adalbert [1960]: Vorlesungen über höhere Mathematik, Erster Band. Wien: Springer.

Euler, Leonhard [1988]: Introduction to Analysis of the Infinite. Nachdruck in englischer Übersetzung des lateinischen Originals „Introductio in analysin infinitorum“ von 1748. New York / Berlin / Heidelberg: Springer.

Felgner, Ulrich [2002]: Der Begriff der Funktion. In: Felix Hausdorff – Gesammelte Werke Band II, Grundzüge der Mengenlehre. New York / Berlin / Heidelberg: Springer.

Friendly, Michael & Denis, Daniel J. [2002]: Milestones in the History of Thematic Cartography, Statistical Graphics, and Data Visualization — An illustrated chronology of innovations. In URL 30 und als PDF-Datei in URL 31 (im Anhang).

Funkhouser, H. Gray [1936]: A note on a tenth century graph. *Osiris*, (1936)1, 260 – 262.

Günther, Sigmund [1877]: Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincipes. *Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg*, **VI**(1877), 19.

Herget, Wilfried & Malitte, Elvira & Richter, Karin: Funktionen haben viele Gesichter — auch im Unterricht! In: Flade, Lothar & Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS — Anregungen für die Sekundarschulen. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 2000, 115 – 124.

Hischer, Horst & Scheid, Harald [1982]: Materialien zum Analysisunterricht. Freiburg / Basel / Wien: Herder.

Hischer, Horst & Scheid, Harald [1995]: Grundbegriffe der Analysis – Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg / Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Hischer, Horst [1998]: „Fundamentale Ideen“ und „Historische Verankerung“ — dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: *mathematica didactica* **12**(1998)1, 3 – 21.

Jahnke, Hans Niels (Hrsg.) [1999]: Geschichte der Analysis. Heidelberg / Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Krüger, Katja [2000]: Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips. Berlin: Logos Verlag.

Neugebauer, O. [1935]: Mathematische Keilschrifttexte. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Berlin: A3. (Literaturangabe aus Resnikoff & Wells!)

Neugebauer, O. & Sachs, A. J. (Hrsg.) [1945]: Mathematical Cuneiform Texts. American Oriental Series, Vol. 29. New Haven, Conn.: American Oriental Society. (Literaturangabe aus Resnikoff & Wells und URL 2e)

Oresme, Nicolas [1486]: Tractatus de latidudinibus formarum. Padua: Matthaeus Cerdonis. (Gemäß [Cantor 1892, S. 117] möglicherweise vor 1361 geschrieben, dann 1482, 1486, 1505, 1515 im Druck erschienen.)

Resnikoff, H. L. & Wells, R. O. jr. [1983]: Mathematik im Wandel der Kulturen. Braunschweig / Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Robson, Eleanor [2001]: Words and pictures: new light on Plimpton 322. In: *Historia Mathematica*, **28** (2001), 167 – 201.

Robson, Eleanor [2002]: Words and pictures: new light on Plimpton 322. In: *American Mathematical Monthly*, **109**(2002)2, 105 – 120.

Steiner, Hans-Georg [1969]: Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs. In: Der Mathematikunterricht **15**(1969)3, 13 – 39.

Tufte, Edward R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, Connecticut: Graphics Press (12. Auflage März 1992).

Volkert, Klaus [1988]: Geschichte der Analysis. Mannheim / Wien / Zürich: BI Wissenschaftsverlag.

Vollrath, Hans-Joachim [1989]: Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* **10**(1989), 3 – 37.

5 Nachweis der verwendeten Internetquellen

Nr.		*URL*	*Datum*
URL 1		http://www.ams.org/new-in-math/plimpton	05.01.2002
URL 2	a	http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Babylonian_mathematics.html	06.01.2002
	b	http://www.math.utsa.edu/ecz/l_p.html	
	c	http://www.cenius.net/refer/articles/p/plimpton322_ency.asp	
	d	http://www.mythen.ch/stbuehlm/projekte/antike/plimpton_322.htm	
	e	http://www.swan.ac.uk/compsci/ResearchGroups/TheoryGroups/AlgMethFolder/DSTFolder/HistoryOfTables/Plimpton/Plimpton.html	
	f	http://www.maths.adelaide.edu.au/pure/pscott/history/robyn/plimpton322.html	
	g	http://www.angelfire.com/realm2/joni_math/plimpton.html	
URL 3		http://www.ams.org/new-in-math/02-2001-media.html	05.01.2002
URL 4		http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html	05.01.2002
URL 5		http://www.mythen.ch/stbuehlm/projekte/antike/plimpton_322_uebersetzt_korrigiert.htm	05.01.2002
URL 6		http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/refs.html#Tufte:1983	05.01.2002
URL 7		http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/refs.html#Funkhouser:1936	05.01.2002
URL 8		http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Aristotle.html	03.01.2002
URL 9		http://www.freudenthal.nl/wiskrant/artikelen/hist_grafieken/begin/begin.html	05.01.2002
URL 10		http://www.netzmarkt.de/thomann/mspecial2-7.html?sn=1e0ffdd4c5b2620c03472be1e08b7b10	10.01.2002
URL 11		http://www.bautz.de/bbkl/o/oresme_n.shtml	05.01.2002
URL 12		http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/pic/objekte/oresme-800.jpg	05.01.2002
URL 13		http://www.reppa.de/lexikon/o/Oresmius.htm	05.01.2002
URL 14		http://www.econo-my.de/wiwi001.html	04.01.2002
URL 15		http://www.math.utah.edu/history/oresme.html	04.01.2002
URL 16		http://www.kv-kadmos.com/Oresme.html	04.01.2002
URL 17		http://www-math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw/samenv/samenv0198.html	10.01.2002
URL 18		http://w3u.minic.ac.at/ammu/Detail.html	04.01.2002
URL 19		http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Chronology/1300_1500.html	04.01.2002
URL 20		http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Oresme.html	04.01.2002
URL 21		http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Huygens.html	12.01.2002
URL 22		http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Halley.html	12.01.2002
URL 23		http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/sec3.html	20.01.2002
URL 24		http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Viete.html	20.01.2002
URL 25		http://www.za.uni-koeln.de/research/zhsf/content-analysis/suesm.htm	21.01.2002
URL 26		http://www.wmich.edu/ssc/images/bigplay2.gif	21.01.2002
URL 27		http://hotspur.psych.yorku.ca/SCS/Gallery/images/fg4.jpg	21.01.2002
URL 28		http://hotspur.psych.yorku.ca/SCS/Gallery/historical.html	21.01.2002
URL 29		http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Dirichlet.html	21.01.2002
URL 30		http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/index.html	21.01.2002
URL 31		http://www.math.yorku.ca/SCS/Gallery/milestone/milestone.pdf	21.01.2002